Math. u. 77-3,2

Ad Bibliothecam
Canoniæ SS. Apoſt. Petri & Pauli
in Weyarn
comparavit
P. Valentinus Hansch Conventualis ibid.

TITULUS SCRINII.	SERIES.	NUMERUS.

<36602267370015

<36602267370015

Bayer. Staatsbibliothek

3
Math univ 77/III,2
R

Anfangsgründe
der
Analyſis
des Unendlichen.

Abgefaßt
von

Abraham Gotthelf Käſtner
Königl. Großbr. Hofr. der Math. und Naturl. Prof. der Kön. Soc. der Wiſſ. zu Göttingen Mitgliede, der daſigen Königl. Deutſchen Geſ. Aelteſten; der Kön. Schwed. u. Preuſſ. Akad. d. Wiſſ. der Erfurtiſchen Churf. Geſ. nützl. Wiſſ. des Bononiſchen Inſtituts, und der Peruſiniſchen Acad. Auguſtae, der Leipz Deutſchen Geſ. und daſigen Geſ. der freyen Künſte, der Jenaiſchen latein. und teutſch. Geſellſch. der marggräfl. Badenſchen lateiniſchen Geſellſchaft Mitgliede.

der mathematiſchen Anfangsgründe
dritter Theil. Zweyte Abtheilung.

Zweyte Auflage.

Göttingen
im Verlag der Wittwe Vandenhoeck.
1770.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Dem

Hochgebohrnen Herrn

Herrn

Levin Adolph von Hake

Sr. Königl. Majeſtät von Großbritannien und Churfürſtlichen Durchlauchtigkeit von Braunſchweig Lüneburg

Hochbetrauten

wirklichen Herrn Geheimden Rathe und Conſiſtorial-Präſidenten,

Meinem gnädigſten Herrn

Hochgebohrner Herr
Gnädigſter Herr

Ew. Hochgebohrnen Excellenz Urtheile eine Probe meines Fleiſſes vorzulegen, und die tiefſte Verbindlichkeit gegen die

mir ertheilten Gnadenbezeigungen zu bekennen, ſind Pflichten, deren Erfüllung wohl keine weitläuftige und ausgeſuchte Rechtfertigung nöthig hat. Sonſt würde ich, auſſer der allgemeinen Achtung mit welcher Ew. Excellenz die Wiſſenſchaften überhaupt aus Einſicht beehren, mich ſelbſt darauf berufen, daß unter Ew. Exc. Schutze, die heiligſten und wichtigſten Kenntniſſe, erhalten und ausgebreitet werden. So ſehr dieſe wirklich

über

über den Innhalt des gegenwärti-
gen Buches erhoben ſind, mit ſo
viel Rechte erklären ſich gleichwohl
die Mathematikverſtändigen für die
Haushälter der Geheimniſſe die
uns den Allmichtigen in ſeinen
Werken zeigen, und es iſt keiner
von den geringſten Vorzügen un-
ſerer Zeiten daß die Lehrer höherer
Wahrheiten ſich ihrer Dienſte oft
glücklich gebrauchet.

Unter den eifrigſten Wünſchen
für das beſtändige Wohlergehn

Ew. Exc. und Dero hohen Hauſes verharre in tiefſter Devotion

Hochgebohrner Herr
Gnädigſter Herr

Höchſtzuehrender Herr
Geheimder Rath und
Conſiſtorialpräſident

Ew. Hochgebohrn. Excellenz

Göttingen
im März
1761.

unterthänigſt gehorſamſter Knecht.
Abrahan Gotthelf Käſtner.

Vorrede.

Geheimniſſe müſſen doch was ſehr Reizendes für den menſchlichen Verſtand ſeyn, weil man ſelbſt in derjenigen Wiſſenſchaft dergleichen zu haben geſucht hat, die ſeit tauſenden von Jahren, ihrer Deutlichkeit und augenſcheinlichen Ueberzeugung wegen berühmt geweſen iſt. Man ſieht ohne mein Erinnern, daß ich die Lehre vom Unendlichen in der Mathematik meyne, wie ſie von vielen Schriftſtellern, ſelbſt ſolchen die das Reich der Wiſſenſchaften dadurch erweitert haben, vorgetragen wird.

Gröſſen die unterſchieden ſind und doch als gleich angeſehen werden; Unendlich groſſe Dinge die in Vergleichung mit andern Nichts, und unendlich kleine die in Vergleichung mit andern unendlich groß ſind; krumme Linien, die aus geraden Theilchen beſtehen, welche gerade Theilchen man nach Gefallen wieder krümmt wie man will, und unzählich andere ſolche Sätze die wieder die erſten Gründe aller menſchlichen Erkänntniß anzuſtoſſen ſcheinen, ſollen von den Schülern der Mathematik als die erhabenſten Lehren ehrfurchtsvoll angenommen werden. Könnte der Aberglauben was mehr von ſeinen Anbetern fordern, wenn er nach Hallers Ausdrucke: mit Rauch die ſchimmernden Gewölber füllt?

Die Alten haben den Nahmen des Unendlichen, und alles was damit einige Verwandſchaft haben könnte, zu vermeiden, eine

ne Sorgfalt angewandt, die unſere Geduld überſchreitet, und Carteſius hat noch dafür mit Zittern das Wort unbegränzt, indefinitum, gebraucht. Auf ein Wort kömmt es nicht an, wenn man nur die Bedeutung deſſelben gehörig beſtimmt. So wie ich ſie im Anfange gegenwärtigen Werkes beſtimmt habe, ſcheint mir alles deutlich zu ſeyn, und die Geheimniſſe des Unendlichen, die manchem Schriftſteller unbegreiflich geſchienen haben, weil unſer endliche Geiſt das Unendliche nicht faſſen könne, verwandeln ſich theils in ſehr offenbahre Sätze, theils in Wortſpiele.

Da ſind es keine Wortſpiele, wenn man ſie als Redensarten anſieht, die etwas kurz und nachdrücklich ſagen, das man ſonſt viel weitläuftiger geſagt hat. Wie ſich der kühne Ausdruck eines Dichters, von dem vielleicht logiſch richtigern, aber trockenen

Vor-

Vortrage des Philoſophen unterſcheidet, ſo iſt ohngefähr die Rechnung des Unendlichen von den Beweiſen der Alten unterſchieden: Auch hat das feſte Land ſie zuerſt von einem Geiſte gelernt, bey dem ſich der Witz des Dichters, die Einſicht des Philoſophen, die Gründlichkeit des Geometers und die Beleſenheit des Polyhiſtors vereinigten. In der erſten Probe die er von ſeinen Entdeckungen durch die Rechnung des Unendlichen gegeben hat, in ſeiner Quadratur des Kreiſes *) hat er ſchon angezeigt wie wir das Unendliche, von unſern eingeſchränkten Kräften ungehindert, faſſen. Wir ſtellen uns nähmlich nicht alle ſeine Theile vor, aber wir kennen das Geſetz, das alle dieſe Theile gemeinſchaftlich beobachten. Von der Reihe $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \ldots$ kennen wir nie alle Glieder, aber daß jedes Paar

---

(*) Act. Er. Lipſ. Febr. 1682.

Paar nächſte Glieder $+\frac{1}{4n+1}-\frac{1}{4n+3}$ heiſſen muß, begreifen wir vollkommen.

Vermittelſt des newtoniſchen Parallelogramms finden wir aus einer gegebenen Gleichung, die erſten Glieder einer unendlichen Reihe, und das Geſetz ihres Fortganges, dadurch ſind die übrigen Glieder alle beſtimmt; es ſteht nicht bey uns wie ſie beſchaffen ſeyn ſollen, wenn wir die erſten feſtgeſetzt haben; Für die erſten könnten wir andere und andere annehmen, und dadurch andere und andere Reihen erhalten: Iſt es ſo was Ungereimtes, als der Freygeiſt, und der zu weichherzige Fromme uns bereden wollen: daß unſer Schickſaal für eine Ewigkeit, durch das gegenwärtige Leben beſtimmt wird? können unſere jetzigen Jahre nicht die erſten Glieder in den Theilen einer Gleichungsreihe ſeyn, (*) dadurch alle

(*) Alg. 649.

alle die folgenden ohne Ende beſtimmt werden?

Paucula iam ſeries monſtrat primordia naſcens
Lege ſua partes haec ſine fine regunt:
Qualiter a vita quam bis ſex luſtra coercent
Aeua tenent formam non numeranda ſuam.

Sobald wir ſtatt des Geſetzes des Fortganges unendlicher Theile, alle Theile ſelbſt zu faſſen glauben, ſobald wir uns das Unendliche als etwas würkliches und ſchon vorhandenes vorſtellen, ſobald wiederſprechen wir der Erklärung eines wirklichen Dinges. Beſtimmt ſeyn gehört zu ſeinem Weſen, aber beſtimmt ſeyn heißt, ſich angeben laſſen, und alſo endlich ſeyn. Dieſe Erinnerung

rung hat Barrow (*) gemacht, aus deſſen geometriſchen Lectionen Newton gewiß, und vielleicht auch Leibniz die erſten Begriffe der Rechnung des Unendlichen geſchöpft hat. Gegentheils ſind die unendlich kleinen oder groſſen Gröſſen, **ihrer Natur nach, nicht zu beſtimmen** wie ſich Hauſen ausdrückt, (**) der nie vergaß ſeine Zuhörer zu erinnern, daß im **Unendlichen** geſchehen, **niemals** geſchehn heißt, und der Ort wo eine Parallele mit der andern, die Hyperbel mit der Aſymptote, zuſammenfällt, nirgends iſt.

In den Geſprächen in denen Galiläus die Geſetze des Falles zuerſt gelehret, und die

(*) deſultoriam & indeterminatam quantitatem habere, eſt habere nullam; eſt enim aliquid determinate, quicquid eſt, quod vbique eſt, nuſquam eſt. BARROW lect. Mathem. anni 1666. quinta p. 262. ed. Londin 1684.

(**) natura ſua indeterminabilis. HAVSEN El. Ar. Schol. Prop. 20.

die Feſtigkeit der Körper zu unterſuchen angewieſen hat, (*) finden ſich viel ſeltſam klingende Sätze vom Unendlichen (**) und er

---

(*) Diſcorſi e dimoſtrazioni matematiche intorno à due nuoue ſcienze &c. (ed. Elſev. 1638; 4to) dialogo 1.

(**) Ich will einen davon beybringen, den Stedler (Fränkiſche Acta Erud. & Curioſ. X. Samml. VII Art.) vorgetragen hat, doch ohne einmahl das Buch des Galiläus anzuzeigen, darinnen er ſich findet. „Jedes Kreiſes Umfang „ſoll ſeinem Mittelpuncte gleich ſeyn.„ Ich will bey meinem Vortrage zum voraus ſetzen, daß man den 66. Satz meiner Geometrie, und die dazu gehörige 127 Fig. vor Augen habe. Ein Kreis der QH zum Halbmeſſer hat, iſt ſo groß als der Ring zwiſchen den beyden Kreiſen die QE und QL zu Halbmeſſern haben. Aber wenn QL in KG fällt, ſo verwandelt ſich der Kreis in den Mittelpunct K, weil $QH = 0$; und der Ring in den Umfang eines Kreiſes mit KG; weil $QE = QL$ alſo iſt der Mittelpunct dem Umfange gleich. So ſchließt Salviati beym Galiläus (a. a. O. 28. S.) Aber aus $QH^2 = QL^2 - QE^2$ oder $QH^2 . \pi = (QL^2 - QE^2) . \pi$ folgt für $QE = QL$ nichts als $QH = 0$ und $0 = 0$, ob ſich alſo wohl die Gleichheit des Kreiſes und des Ringes bis auf den Augenblick da beyde verſchwinden erhält, ſo

er läßt ſeine Leſer in aller der Verwirrung, in welche ſie durch ſeine Spitzfündigkeiten können ſeyn gebracht worden; wie ich glau-
be

ſo iſt es doch nicht erlaubt den Mittelpunct K als den letzten unter den immer abnehmenden Halbmeſſern QH; und den Umfang eines mit KG beſchriebenen Kreiſes als den letzten unter den immer abnehmenden Ringen zu betrachten. Wenn ſich eine Gröſſe durch beſtändige Abnahme in eine andere verwandelt, ſo muß ohne Zweifel der Unterſchied zwiſchen beyden immer kleiner und kleiner werden. Aber man kann ſich keinen Unterſchied und folglich auch keinen immer abnehmenden Unterſchied zwiſchen K und QH; oder zwiſchen dem Umfange und dem Ringe vorſtellen.

Wenn es erlaubt iſt, von der beſtändigen Verhältniß zwoer veränderlichen Gröſſen, auf die Verhältniß deſſen zu ſchlieſſen, das noch bleibt, wenn die Gröſſen nicht mehr ſind, ſo will ich mit leichter Mühe noch gröſſere Ungeheuer, z. E. einen Punct der ſich ſelbſt nicht gleich iſt, zum Vorſcheine bringen. In der erſten der zu gegenwärtigem Werke gehörigen Figuren, ſey TM eine gerade Linie die mit TP einen Winkel von 30 Gr. macht: So iſt allemahl MP = ½ TM wo auch M genommen wird; Man laſſe alſo MP immer näher an T rücken, bis ſie endlich in T fällt, ſo verwandelt ſich MP ſowohl als TM in T; und es iſt alſo

der

be aus einem philoſophiſchen Muthwillen. Denn ſonſt würde er ohne Zweifel dieſe Knoten eben ſo leicht aufgelöſet haben, als

er

---

der Punct T als die letzte MP betrachtet, halb ſo groß als vollkommen eben derſelbe Punct T, als die letzte TM betrachtet.

Ich wollte daß ich hiebey nicht erinnern müßte, daß man aus der Gleichung $2.0 = 1.0$ nicht etwa ſchlieſſen ſoll: ein Nichts könne halb ſo groß als ein anderes Nichts, oder $0 : 0 = 1 : 2$ ſeyn. Die Gleichung ſagt ſoviel ich einſehe nur ſoviel: daß Nichts und Nichts dazu auch noch Nichts iſt. Aus $2. y = 1. x$ folgt $y : x = 1 : 2$; wenn man aber hier 0 ſtatt y und x ſetzt, ſo bedeutet 2. 0. nicht ſo etwas wie 2y bedeutet. Dieſes heißt ein Ding zweymahl nehmen, und jenes, Nichts zweymahl nehmen. Wollte man ſich verſtatten ein Nichts hier ſtatt Nichts zu ſetzen, und das Nichts wie ein Ding zu betrachten das man zweymahl nähme, ſo würde man ſich den Erinnerungen ausſetzen die Herrn Premontval in den Mem. de l' Ac. R. de Pruſſe 1754; 421. und 433 S. wieder den Wolfiſchen Beweis vom Satze des zureichenden Grundes gemacht hat. Oder, um die Sache weniger metaphyſiſch vorzutragen: Man würde den Grund der erhabenſten Rechnung, mit dem Witze eines alten deutſchen Formenſchneiders Johann Daniel Müllers legen, der nach der Mitte des vorigen Jahrhunderts gelebt hat. Ich beſitze von ihm den Niemand nach dem Leben abgebildet, und in ſchönen deutſchen Ver-

Ver-

er ſie geknüpft hat: dieſes erhellt aus der richtigen Erinnerung auf der 36 S. ſeines Werkes, daß die Frage, ob eine Linie nur eine endliche Menge Theile oder unendlich viel enthalte ſich ſo beantworten läßt. Sie enthalte jede gegebene Zahl von Theilen.

Der ältere Sturm hat die unbegreiflichen Lehren der Mathematick in einer eigenen Abhandlung geſammlet. (*) Sie beruhen alle auf dem Unendlichen, und werden nur

Verſen alles zu ſeinem Lobe und Tadel geſagt, was Niemand thut, oder gethan haben will. Bey dieſem Niemande, und bey den zwey Nichtſen deren eines noch einmahl ſo groß als das andere iſt, fällt mir ein lateiniſches Heldengedicht ein, damit ich dieſe lange Anmerkung ſchlieſſen will

Nullus & Nemo
Mordebant ſe in ſacco;
Nullus clamabat
Nemo audiebat.

(*) De Matheſcos incomprehenſibilibus. v. Io. Chriſtoph Sturmii praelect. Acad. ed. a Dan. Algoewero : 1722.

nur durch den Vortrag unbegreiflich. Die Gleichheit der Parallelogrammen auf einer Grundlinie zwiſchen einerley Parallelen kömmt hier auch vor. Die hätte ich nun würklich hier nicht geſucht: Weil ich ſie aber doch hier fand, ſo ſuchte ich da noch eine andere eben ſo groſſe Unbegreiflichkeit, und die fand ich nicht: Es war die Ochſenhaut der Dido, die in Riemen zerſchnitten, einen Umfang gab, in dem Carthago ſtehen konnte.

Der P. Boſcowich hat eine neue Sammlung von den Geheimniſſen, und ſelbſt Ungereimtheiten des Unendlichen gemacht. (*). Sie finden aber nur alsdenn ſtate, wenn man eine unendliche Gröſſe als et-

(*) De transformatione locorum geometrizorum; §. 880. ſequ. am Ende ſeiner Anfangsgründe der Kegelſchnitte die den dritten Theil ſeiner Elementorum Matheſeos (Rom 1754) ausmachen.

etwas wirklich vorhandenes anſieht, nnd wie ſich der P. Boſcowich ausdrückt ein indefinitum abſolutum annimmt. Nimmt man nur Gröſſen die unendlich wachſen oder abnehmen können, unbeſtimmt an, ſo läßt ſich wie er ebenfalls erinnert, alles ohne Schwürigkeit erklären. Daß der Gebrauch des Unendlichen ſo vielen Einwendungen iſt ausgeſetzt geweſen, rührt nach Fontenellens Gedanken (†) daher, weil die Geometrie von der Seite wo das Unendliche in ihr vorkömmt, mit der Naturlehre, mit dem innern Weſen der Körper zuſammenhängt, das uns ſo unbekannt iſt. Dieſer Einfall, hat wie viel andere dieſes Schriftſtellers in dieſem Buche, mehr Witz als Gründlichkeit, wenn anders wahrer Witz ohne Gründlichkeit ſeyn kann. Ich müßte mich ſehr irren, wenn ihm nicht ein Einfall eines Deutſchen

(†) Elemens de la geometrie de l'infini; pref.

ſchen an Scharfſinnigkeit und Wahrheit weit vorzuziehen wäre. Fontenelle nimmt Gröſſen an, die zwiſchen die endlichen und unendlichen fallen; Es ſind die, die wir durch $\infty \frac{1}{2}$ u. d. g. ausdrücken; durch dieſe meynt er, geſchehe der Uebergang aus dem Endliche ins Unendliche. Bey dieſen Brücken aber die aus dem Endlichen ins Unendliche führen, hat er, wie Hauſen ſcherzte, nicht bedacht, daß auf ſie aus dem Endlichen zu kommen, wieder andere Brücken nöthig ſind.

Daß die Geometrie das Unendliche aus der Naturlehre haben ſollte, iſt ſo unrichtig, daß man vielmehr das Unendliche aus der Geometrie in die Naturlehre durch Schlüſſe hat bringen wollen, von denen ich ſchon anderswo meine Gedanken eröffnet habe. (*) Mit dieſen Schlüſſen haben

(*) Anfangsgr. der Geom. 3. Erkl. Anm.

ben ſich ſchon die ältern Philoſophen ſo verwirrt, daß Fromond ein Buch in denen er viel dergleichen geſammlet hat, mit dem Nahmen eines Labyrinths beleget. (*) Blancan hat bey Gelegenheit der Schrift des Ariſtoteles von untheilbaren Linien, erinnert, (†) daß die Unterſuchung ob untheilbare Weſen, und wie ſie in der Natur vorhanden ſind, aus andern Gründen als aus geometriſchen geführt werden muß: Eine Erinnerung die manche Beſtreiter der Monaden wohl hätten leſen mögen, ehe ſie falſche Schlüſſe für geometriſche Beweiſe hätten drucken laſſen.

Maclaurin hat in ſeinem Treatiſe of Fluxions alle Nebel der eingebildeten Geheim-

(*) Liberti Fromondi Labyrinthus, ſ. de compoſitione continui liber vnus, philoſophis, mathematicis, theologis vtilis & iucundus. Antu. 1631.

(†) Blancani loca Ariſtotelis mathematica p. 209.

heimniſſe des Unendlichen zerſtreut. Man könnte auf ſein Buch den Titel einer ſehr berüchtigten Schrift parodiren, und es Infinity not myſterious nennen. Nur bringt die ſynthetiſche Methode, die er nach Art der Engelländer durchgängig braucht, zweyerley Unbequemlichkeiten hervor. Die erſte, die groſſe Weitläuftigkeit, entſchuldiget er ſelbſt damit, daß man bey Kunſtgriffen die uns die wichtigſten Unterſuchungen ſo nützlich verkürzen, nicht zu weitläuftig im Vortrage ihrer Gründe ſeyn könne. Viele ſeiner Beweiſe, die z. E. verſchiedene Fälle eines einzigen Satzes darthun, ſind auch einander ſo ähnlich, daß man nur einen leſen darf, um ſie alle zu überſehen. Aber bey einem Buche daß uns den vortrefflichſten Theil der mathematiſchen Erfindungskunſt lehret, wäre wohl dienlich geweſen, ſelbſt den Vortrag der Gründe ſo einzurichten daß man ſähe wie ſie erfunden worden ſind.

Ich

Ich habe in gegenwärtigem Werke mich meiſtens der Methode der erſten oder letzten Verhältniſſe bedient, die Newton in ſeinen principiis gebraucht hat. Ohngeachtet ich gewieſen habe, wie ſich die gewöhnlichen Redensarten der Rechnung der Unendlichen rechtfertigen laſſen, ſo habe ich doch ſie ſelbſt wo es ohne allzugroſſe Weitläuftigkeit hat geſchehen können zu vermeiden geſucht, oder doch allemahl ſo gebraucht, daß man ſieht wie ſie nur Abkürzungen des Vortrages ſind. Ein Frauenzimmer das die Natur vollkommen wohl gebildet hatte, giebt ſich zuweilen durch eine Kleidung nach der Mode ein ungeſtaltes Anſehen: und die Rechnung des Unendlichen, ſcheint in der Hülle ſolcher Redensarten Fehler an ſich zu haben, die dadurch nicht bedeckt werden, daß ſie dem Mathematikverſtändigen unerſchöpfliche Sätze von Erfindungen darbietet; Denn für die Augen eines Geiſtes dem nur

Wahrheit ſchön iſt, würde ſie doch allemahl eine häßliche Reiche ſeyn. Zum Glücke ſind es nur Fehler ihrer Kleidung; zuweilen hat ſie ſich ungeſchickter Schneider bedient, zuweilen hat ſie mit Willen in der Eil eine Salope um ſich geworfen; und der Geometer kann ſo entzückt als Ovid ſagen:

Vt ſtetit ante oculos poſito velamine noſtros
In toto nuſquam corpore menda fuit.

Göttingen;
im März 1761.

Erinnerung
bey der zweyten Ausgabe.

Bey dem Gebrauche den ich von dieſem Buche zum Unterrichte machte, gab ſich unter andern ſogleich Gelegenheit die vielen Druckfehler zu bemerken die in die erſte Ausgabe eingeſchlichen ſind. Den größten Theil der Anzeige derſelben bin ich meinen Zuhörern ſchuldig. Ich erwähne dieſen Umſtand deßwegen, weil man die Druckfehler die in mathematiſchen Büchern häufiger vorkommen als in andern, auch da für viel gefährlicher zu halten pflegt.

In trigonometriſchen, aſtronomiſchen, oder andern Tafeln, die man nicht nachrechnen mag, iſt das letzte freylich wahr, unddoch kann man auch bey ſolchen Tafeln, aus der Ordnung in der die Zahlen fortgehen müſſen u. d. g. ex ingenio Verbeſſerungen machen, die ſicherer ſind als Bentleys Verbeſſerungen des Horaz.

In einem Lehrbuche, pflegt allerdings der Schüler anzuſtoſſen, wenn ſeine Rechnung ihm was anders giebt als er gedruckt findet. In den Falle, rechne er nur aus dem was er herausgebracht hat weiter fort. Stimmt das, was ihm ſeine fernere Rechnung giebt, mit den fernern Lehren des

Buches überein, ſo hatte er recht gerechnet, und der Zwiſt zwiſchen ihm und dem Buche rührte von einem Druckfehler her, wie man das Ding nennt, dafür doch der Drucker gar nichts kann, ſondern der Setzer, und oft auch der nicht, ſondern der Autor der zu gelehrt ſchreibt.

Indem ich aber dieſes Buch erklärte mußten mir nothwendig auch Stellen in die Augen fallen, wo durch Aenderungen im Ausdrucke und Vortrage die Sache konnte erleichtert werden, wo ſich die Unterſuchungen ohne Schaden der Gründlichkeit und Vollſtändigkeit abkürzen lieſſen.

Endlich konnten einige neuere Schriften beſonders Hr. Eulers Inſtitutiones Calculi Integralis (*) mir Materie zu Vermehrungen darbieten.

Bey den Veränderungen die ſich ſolchergeſtalt machen lieſſen, konnte ich gleichwohl, die Ordnung des Vortrages, und die Zahlen der Abſätze, beträchtlich ändern, wenn ich nicht ein neu Buch machen wollte, und dazu hatte ich keine Luſt, weil ich noch nicht ſehe daß ich das neue ſehr viel beſſer machen könnte. Auch konnte ich freylich nicht

(*) Zu Petersburg gr. 4. Vol. I. 1768. 542. S. Vol. 2. 1769. 526. S.

nicht alles in dieſes Buch bringen was von der Rechnung des Unendlichen geſchrieben iſt. Hr. Euler hat in vier ſtarken Quartbånden (*) nur einen Anfang gemacht ſie vorzutragen, und ich mußte nach meinen Abſichten, denen die ſich meines Buches bedienen wollen, von viel mehrerley Dingen, als in dieſen Bånden vorkommen, wenigſtens Begriffe geben.

Ich habe alſo die Vermehrungen die mir nöthig ſchien, wo es ſich am bequemſten thun lieſſe eingeſchoben. Hievon und von andern Verbeſſerungen, will ich das wichtigſte anzeigen, håufige Kleinigkeiten übergehe ich.

Beym 9 Abſ. iſt der Beweis erleichtert.

Im 144 u. f. iſt die Uebereinſtimmung zwiſchen den Coefficienten des binomiſchen Satzes und der höhern Differentiale gewieſen, und daraus der Ausdruck einer Gröſſe durch höhere Differentiale, hergeleitet worden. Ich habe dadurch vermieden was ich in der vorigen Ausgabe nöthig hatte, den unbeſtimmten Binomialcoefficienten für einen unendlichen Exponenten anzugeben.

Die

(*) Introductio in Analyſin infiniti Lauſ. 1748. 2 Theile 718 S. Inſtitutiones calculi differentialis Petrop. 1755. 880 S. u. die angef. Inſt. calc. Int.

Erinnerung bey der zweyten Ausgabe.

Die Lehre von den Logarithmen 213 u. f. §. habe ich hier meiner Einſicht nach viel beſſer abgehandelt.

Die wichtige Integration 248 iſt ordentlicher und ausführlicher vorgetragen.

Daß jede Zahl unzähliche Logarithmen habe, iſt 332 §. aus der Vergleichung der Kreisbogen mit Logarithmen hergeleitet worden. Dieſer Beweiß wird leichter und kürzer als der den Hr. Euler gegeben hat.

Die Integrirung irrationaler zweytheilichten Differentiale habe ich 399 § nach Hr. Eulern vorgetragen, ſtatt eines Verfahrens in der vorigen Ausgabe das ich 404 §. anzeige.

Bey den 494 u. f. Abſ. iſt vieles erläutert worden.

Die beyden Anhänge von der kepleriſchen Aufgabe und vom Schwerpuncte, haben auch Verbeſſerungen erhalten.

Weil einiges nicht genug Brauchbare weggeblieben, anderes kürzer gefaßt iſt, und dieſe Ausgabe etwas kleinere Schrift hat als die vorige, ſo beträgt ſie der angezeigten Vermehrungen ohngeachtet 11 Octavſeiten weniger.

Göttingen im September
1770. A. G. Käſtner.

Inn-

Innhalt.

	§.
Gründe der Lehre vom Unendlichen	1
Gründe der Diſſerentialrechnung	13
Begriffe von der Fluxionenrechnung	31
Allgemeiner Beweis des Binomiſchen Lehrſatzes	46
Formel für die Potenz einer unendlichen Reihe	56
Die Tangenten	63
Die Normallinien	91
Tangenten zu ziehen; wo die Ordinaten aus einem Puncte gehen	104
Die Aſſymptoten	108
Von den höhern Differentialen	120
Vergleichung der Binomialcoefficienten mit den Coefficienten der Differentiale	145
Ausdrückung eines unbeſtimmten Gliedes einer Reihe durch die höhern Differentiale	146
Von den Größten und Kleinſten	152
Betrachtung gewiſſer paraboliſcher Linien die zur Erläuterung der Lehre von den Gleichungen dienen	163
Von den gleichen Wurzeln	172

Vier

§.

Die unmöglichen Wurzeln ſind alle⸗ mahl paarweiſe da 174

Wieviel ihrer da ſind zu finden 175

Regel die Zahl der bejahten und vernein. ten Wurzeln aus den Zeichen der der Coefficienten zu finden 186

Von den Gränzen der Wurzeln 134

Die Integralrechnung.

Erklärungen 201

Von der Quadratur der krummen Li. nien 205

Von den logarithmiſchen Differen⸗ tialen 213

Reihen für die Logarithmen 220

Von der Exponentialrechnung 235

Einige Formeln für die Integrirung zuſammengeſetzter Differentiale 245

Von der verkehrten Methode der Tan⸗ genten 262

Von der Rectification der krummen Linien 266

Quadraturen und Rectificationen die zum Kreiſe gehören 273

Die Verhältniß des Durchmeſſers zum Umkreiſe 306

Berechnung der trigonometriſchen Li⸗ nien 311

Von

Innhalt.

§.
Von den Ausſchnitten der Hyperbel 317
Vergleichung derſelben mit den Ausſchnitten des Kreiſes 322
Vervielfältigung der Winkel vermittelſt der Tangenten 331
Einer Zahl gehören unzählich viel Logarithmen. 332
Allgemeiner Ausdruck der Seiten ordentlicher Vielecke 333
Gleichung zwiſchen den Sinuſſen des einfachen und des vielfachen Winkels 337
Zerfällung der unendlichen Reihe für den Sinus in Factoren 338
Eben für den Coſinus 341
Logarithmen des halben Umfangs 343
Logarithmen der Sinuſſe 344
Zerlegung der gebrochnen Functionen in einfache 347
Von den Werthen ſolcher Functionen die unter gewiſſen Umſtänden unbeſtimmt ſcheinen 372
Integrirung der rationalen Differentiale 385
Erfindung der dreytheilichten Factore 389

An-

§.
Anwendung auf die Integrationen 397
Integration der Differentiale die eine zweytheilichte Irrationalgröſſe enthalten 399
Integrirung der Differentialgleichungen wo die veränderlichen Gröſſen vermengt ſind 405
Integrirungen durch Reihen, vermittelſt des Parallelogramms und anderer Methoden 419
Nicolaus Bernoullis Methode 465
Differentiale für gewiſſe Werthe der veränderlichen Gröſſe 471
Betrachtungen über die Differentiale der Functionen die zwo veränderliche Gröſſen enthalten 477
Von den Differentialen der Functionen die drey veränderliche Gröſſen enthalten 487
Anwendung auf die Differentialgleichungen 494

Fernere Anwendung der Rechnung des Unendlichen auf die krummen Linien.

Quadraturen und Rectificationen wenn die Ordinaten aus einem Puncte gehen 505

Die

Innhalt.

§.

Die logarithmiſche Spirallinie 510
Von der Krümmung 512
Den Rückkehrpunct zu finden 520
Wenn die krumme Linie hohl oder erhaben iſt 521
Unendlich groſſe Krümmung 529
Wendungspunct 532
Vom Krümmungskreiſe 538
Fragen die mit ihm zuſammenhängen 552
Halbmeſſer der Krümmung für die Radlinie 557
Rectification, Gleichungen und Quadratur der Radlinie 559
Wie die Veränderung der Krümmung gemeſſen wird 560
Von der Evolution 563
Die krummen Linien zu finden, die ihren Evoluten ähnlich ſind 578
Gleichungen zwiſchen Ordinaten aus einem Puncte, und Perpendikeln auf die Tangenten 593
Wenn Linien für die ſolche Gleichungen gegeben werden, algebraiſch ſind 598

Aus

§.

Ausrechnung runder Körper und ihrer Flächen 609

Von den hufförmigen Abſchnitten cylindriſcher Körper 617

Von Abſchnitten runder Körper 626

Schnitte der Späroiden von Regelſchnitten die den beſchreibenden Linien ähnlich ſind 627

Anwendung der Integralrechnung auf die kepleriſche Theorie der Planeten

Die Fläche der Ellipſe

Den Schwerpunct durch die Integralrechnung zu finden.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Gründe der Lehre
vom
Unendlichen.

1. Erkl. Eine Gröſſe wächſt unendlich (creſcit in infinitum) wenn ſie gröſſer werden kann, als jede endliche Gröſſe, die ſich angeben, oder mit beſtimmten und gegebenen Gröſſen von ihrer Art vergleichen läßt. (quantitas in infinitum creſcens, dabili aut adſignabili quauis fieri poteſt maior.

Dergleichen iſt m Alg. (348)

2. Anm. Eine Gröſſe kann ohne Ende, (ſine fine) wachſen, ohne unendlich zu werden, wie die Summe der erſten Glieder der Reihen Alg.(108). Sie kann nähmlich immer weniger und weniger wachſen, oder immer geringere und geringere Vermehrungen bekommen, die ohne Ende hinzugeſetzt doch eine gewiſſe beſtimmte Gränze nie erreichen oder überſteigen.

3. Zuſ. Bekömmt eine Gröſſe, ohne Aufhören immer gleiche, oder immer gröſſere Vermehrungen, ſo wächſt ſie unendlich.

4. Zuſ. Eigentlich kann man nicht ſagen: eine Gröſſe iſt unendlich groß. Jede Gröſſe, die iſt, läßt ſich angeben. Wenn man aber dieſen Ausdruck braucht, ſo ſtellt man ſich gleichſam eine Gränze vor, der ſich die Gröſſe durch die beſtändige Vermehrung (1) immer nähert, und nimmt dieſe Gränze ſtatt der Gröſſe in einem Zuſtande, den man für ihren letzten anſieht, ob es gleich wiederum keinen ſolchen letzten giebt.

So wird die Summe Alg. 108. genommen.

5. Erkl. Wenn eine Gröſſe kleiner als jede Gröſſe, die ſich angeben läßt, werden kann, ſo nimmt ſie unendlich ab, oder verſchwindet (euaneſcit). Bildet man ſich hier eine Gränze ihres Abnehmens ein, wie (4) ſo ſagt man, ſie werde unendlich klein.

Wie das eingebildete letzte Glied Alg. (107)

6. Zuſ. Wenn $u = \frac{1}{x}$ oder $x = \frac{1}{u}$ und u unendlich wächſt, ſo nimmt x unendlich ab.

7) Erkl. Eine Gröſſe nähert ſich einem Werthe unendlich, wenn ihr Unterſchied von dieſem Werthe kleiner als jede Gröſſe werden kann, die ſich angeben läßt. Der Werth heißt

als.

alsdenn ihre Gränze (4). So heißt auch eine Verhältniß, der ſich eine andere unendlich nähert, die Gränze dieſer andern.

8. Zuſ. Wenn $y = e + z$ ſich dem Werthe e unendlich nähert, ſo kann für y jeder Werth geſetzt werden, der zwiſchen e und $e + z$ fällt. Man darf alſo z unendlich abnehmen laſſen, und die Gränze die man ſtatt y brauchen kann, iſt e.

9. Aufg. Wenn u; eine Gröſſe, die unendlich wächſt, bedeutet und $au + b = z$, die Gränze, der ſich z unendlich nähert, zu finden.

Aufl. $\frac{au + b}{au} = 1 + \frac{b}{au}$; Wenn nun u unendlich wächſt, ſo nimmt $\frac{b}{au}$ unendlich ab, und $1 + \frac{b}{au}$ nähert ſich unendlich dem Wehrte 1; Aber $\frac{au + b}{au} = \frac{z}{au}$ Wenn alſo u unendlich wächſt ſo nähert ſich $\frac{z}{au}$ unendlich dem Wehrte 1; das iſt z nähert ſich unendlich dem Wehrte au.

Behauptete jemand $\frac{z}{au}$ müßte von 1 allemahl wenigſtens um e eine Gröſſe die ſich ange-

 ben

ben lieſſe, unterſchieden ſeyn; ſo daß nie $\frac{z}{au}$ $\gtrless$ 1 + e würde, ſo könnte 1 + $\frac{b}{au}$ nie kleiner als 1 + e werden; das iſt $\frac{b}{au}$ nie kleiner als e; Wider die Vorausſetzung daß u ſo groß als man will, werden kann, wodurch gewiß $\frac{b}{au}$ kleiner als jede Gröſſe die ſich angeben läßt wird. Alſo iſt 1 hier eine ſolche Gränze, der ſich $\frac{z}{au}$ unendlich nähert, und die man wie in (4) für erreicht anſieht, wenn man u unendlich nennt.

Dieſes pflegt man ſo auszudrücken:

Wenn u unendlich wird, ſo verſchwindet in Vergleichung mit dem Theile, der u als einen Factor enthält, alles andere, worinnen u nicht als ein Factor befindlich iſt, alſo iſt für u = ∞ (das Zeichen des unendlichen) z = a. ∞

10. Zuſ. Wenn n eine kleinere bejahte Gröſſe als m iſt, und $z = au^m + bu^{m-n}$, ſo iſt $\frac{z}{au^m}$ $= 1 + \frac{b}{au^n}$ welches ſo nahe an 1 kommen kann als man will;

will; wenn man u ſo groß nehmen darf als man will; wenn alſo u unendlich wächſt, ſo nähert ſich wieder $\frac{z}{au^m}$ unendlich der Gränze 1, oder z den Wehrte au^m; oder wenn eine Gröſſe aus verſchiedenen Theilen beſteht, deren jeder eine andere Potenz von u als einen Factor enthält, ſo verſchwinden für $u = \infty$ alle Theile, die niedrigere Potenzen enthalten, in Vergleichung mit den höchſten.

Man trägt den Beweiß dieſes Satzes ordentlich ſo vor: $au^m : bu^{m-n} = au^n : b$ wo u ſo groß iſt, daß das zweyte Glied in Vergleichung des erſten für nichts zu achten iſt.

11. Zuſ. $y = au^m$ und $t = bu^{m-n}$ können beyde alle Gränzen überſteigen, d. i. unendlich werden, und doch wird y in Vergleichung mit t unendlich. Es giebt alſo unendlich groſſe Gröſſen von verſchiedenen Ordnungen; da man y von einer höhern Ordnung heißt, in Vergleichung mit welcher, die andere t verſchwindet. Ueberhaupt heißt hier y ein Unendlich groſſes von der Ordnung m, es mag nun m ein bejahter Bruch oder eine ganze bejahte Zahl ſeyn.

Wenn c der Parameter einer Parabel und (Alg. 349.) $y = c^{\frac{1}{2}} u^{\frac{1}{2}}$ iſt, ſo wird y, die Ordi-

nate der Parabel ein unendlich Groſſes von der Ordnung $\frac{1}{2}$ wenn die Abſciſſe u ein unendlich Groſſes von der Ordnung 1 wird. Die Abſciſſe wird alſo unendlich mahl gröſſer als ihre Ordinate, denn es iſt $y : u = \sqrt{cu} : u = \sqrt{c} : \sqrt{u}$ wie was Endliches zu der Quadratwurzel von was Unendlichen, welche ohne Zweifel auch unendlich iſt. Die Ordinate iſt nähmlich die mittlere Proportionallinie zwiſchen dem Parameter und der Abſciſſe; alſo allemahl kleiner als die Abſciſſe, wenn die Abſciſſe gröſſer als der Parameter iſt, und folglich ſehr vielmahl kleiner als die Abſciſſe, wenn die Abſciſſe ſehr vielmahl gröſſer als der Parameter iſt.

Auch iſt $\frac{k}{u^m} : \frac{l}{u^{m+n}} = k . u^m : l$ oder der letzte dieſer beyden Quotienten verſchwindet in Vergleichung mit dem erſten, wenn u unendlich wird. Er nimmt nähmlich ſchneller ab als der erſte, weil die Gröſſe, die unendlich wächſt, in ſeinem Diviſor auf eine höhere Potenz erhoben iſt. Die beyden Quotienten laſſen ſich auch (nach 5) ſo ausdrücken, $k. x^m$ und $l. x^{m+n}$ deren Verhältniß $= k : l. x^n$ iſt, wo das letzte Glied verſchwindet, wenn x unendlich abnimmt, und alſo eben den vorigen Schluß giebt. Alſo hat man Unendlich Kleine von verſchiedenen Ordnungen, da die höhere in Vergleichung mit der niedrigen verſchwin-

ſchwindet, wie hier der letzte Quotient in Vergleichung mit dem erſten.

Wenn in der Parabel $yy=cx$ die Ordinate y unendlich klein von der erſten Ordnung wird, ſo wird $x=\frac{yy}{c}$ unendlich klein von der zweyten. Weil ſich nähmlich die Abſciſſe wie das Quadrat der Ordinate verhält, ſo nimmt die Abſciſſe viel ſchneller ab als die Ordinate, wenn die Ordinate klein iſt, weil das Quadrat eines eigentlichen Bruches kleiner als der Bruch ſelbſt iſt. Gegentheils wenn x unendlich klein von der Ordnung 1 iſt, ſo iſt y unendlich klein von der Ordnung $\frac{1}{2}$ oder $= \infty^{\frac{1}{2}}$.

Wenn die Abſciſſe eines Kreiſes, deſſen Durchmeſſer $=2r$ iſt, x die Ordinate y heißt, ſo iſt die Ordinate $y=\sqrt{(2rx-xx)}$ (Alg. 324.) welche ſich dem Werthe $\sqrt{2rx}$ unendlich nähert, wenn x unendlich abnimmt, weil $2rx-xx=(2r-x).x$ welches Product ſich unter dieſen Umſtänden dem Werthe $2rx$ unendlich nähert. Wird alſo x ein unendlich kleines der erſten Ordnung, ſo wird $y=\sqrt{2rx}$ ein unendlich kleines der Ordnung $\frac{1}{2}$ und bleibt alſo unendlich gröſſer als x weil $\sqrt{2rx} : x=\sqrt{2r} : \sqrt{x}$ wo das letzte Glied in Vergleichung mit dem erſten verſchwindet. Die Abſciſſe nimmt hier aus eben der vorigen Urſache ſchneller ab als die Ordinate.

12. Zuſ. Es ſey $ty = z$ ein Product aus zwo veränderlichen Gröſſen. Wenn nun y unendlich wird, ſo folgt deßwegen doch nicht, daß z unendlich wird, denn t kann unendlich klein werden. Ob nähmlich gleich der Factor y alle Gränzen überſteigt, ſo kann doch der Factor t ſo abnehmen, daß das Product nicht alle Gränzen überſteigt. Wenn u und x noch die Bedeutung (6) haben, alſo u eine unendlich groſſe Gröſſe, und x eine unendlich kleine bedeuten kann; und m; n; bejahte Zahlen ſind, ſo ſey $y = qu^{m}$; $t = px^{n}$; $ty = pqu^{m-n} = pq.x^{n-m}$. Man kann den Ausdruck durch u oder x brauchen, nachdem m oder n gröſſer iſt. In jenem Falle iſt z ein Unendlich groſſes der Ordnung $m-n$ in dieſem ein unendlich kleines der Ordnung $n-m$: Indeſſen kann man, welchen Ausdruck man will, brauchen. Denn wäre z. E. $m < n$ ſo wäre $n-m$ bejaht, $u^{m-n} = \frac{1}{u^{n-m}} = x^{n-m}$ oder z wäre ein Unendlich groſſes einer verneinten Ordnung $m-n$; d. i. ein Unendlich kleines der bejahten $n-m$. Und ſo umgekehrt, wenn $n < m$; So bedeutet ein Unendlich kleines der verneinten Ordnung $n-m$ ſoviel als ein Unendlich groſſes der bejahten $m-n$.

Wenn $m = n$; ſo bedeuten Unendlich groſſe und kleine der Ordnung o; ſoviel als endliche Gröſ-

Gröſſen; So verhält es ſich bey der Hyperpel, wenn t; y; Coordinaten auf der Aſymptote ſind, (Alg. 412.) da m = n = 1.

Iſt $t^3 = a^3 : y$ alſo für ein unendlich groſſes $y = qu$; $t^3 = a^3 x : q$ ſo iſt $m = 1$; und $t = \sqrt[3]{\frac{a^3}{q}} . \sqrt[3]{x}$ alſo $n = \frac{1}{3}$ folglich im Unendlichen, t y ein Unendlich groſſes von der Ordnung $m - n = \frac{2}{3}$.

Iſt $tt = a^5 : y^3$; alſo für ein unendlich groſſes y; $tt = a^5 : q^3 u^3$ und $t = \sqrt{\frac{a^5}{q^3}} : \sqrt{u^3}$ ſo iſt $m = 1$; $n = \frac{3}{2}$; und $m - n = - \frac{1}{2}$; alſo im Unendlichen, t y ein Unendlich groſſes von der Ordnung $-\frac{1}{2}$; d. i. ein Unendlich kleines von der Ordnung $+ \frac{1}{2}$.

In Alg. 422. X ſuchte ich ſtatt des Products g ſin γ ein anders, weil jenes Werth, wenn g unendlich wächſt, und γ unendlich abnimmt, nicht ſo leicht zu beſtimmen war.

Auf eine ähnliche Art kann man oft beſtimmen, was ein Product, oder ein Quotient wird, wenn von den veränderlichen Gröſſen die darinnen vorkommen, eine unendlich wächſt, die andere unendlich abnimmt. So iſt coſ. λ. tang λ = ſin. λ; Nun wird für λ = 90 Gr.; in dieſen Producte der erſte Factor = 0; der zweyte unendlich; Man weiß aber daß alsdenn der Sinus = 1; Folglich

lich giebt hier das verſchwindende, mit dem Unendlichen multiplicirt 1 zum Producte.

Gründe der Differentialrechnung.

13. Erkl. Z ſey durch z und beſtändige Gröſſen gegeben, alſo eine Function von z, Z+E ſey eben die Function von z+e, oder Z+E komme heraus, wenn man z+e ſtatt z in die Gleichung zwiſchen Z und z ſetzt. Wenn man nun e unendlich vermindert (5) ſo heißt man die Gränze der ſich die Verhältniß E: e unendlich nähert, die Verhältniß der Differentiale von Z und z; auch die unendlich kleinen e; E; die Differentiale von z; Z.

Z; Z+E; ſind zwey nach einander folgende Glieder einer Hauptreihe, und E iſt ihr Unterſchied (Alg. 724.) dieſer kann unendlich abnehmen, wenn e unendlich abnimmt, und läßt ſich alſo ſelbſt, für dieſe unendliche Abnahme des e nicht beſtimmen. Wenn aber ſeine Verhältniß E: e bey einer unendlichen Abnahme des e noch endlich bleibt, ſo läßt ſich dieſe noch angeben.

14. Zuſ. Es ſey Z = PM 1 Fig; z = AP; Z+E = QN; z+e = AQ und MS mit AP parallel, ſo iſt die Verhältniß E: e = NS: SM und man kann ſich alſo vorſtellen, die Ordinate QN nähere ſich der PM ohne Ende, da denn die Verhältniß NS: PQ ſich der Verhältniß der Differen-

ferentialien der Abſciſſe und der Ordinate ohne Ende nähert. Wenn man alſo ſetzt mR: Pp ſey die Verhältniß, der ſich die NS: PQ ohne Ende nähert, oder wenn man Pp und mR unendlich klein annimmt, ſo ſind ſolches die Differentialien der Abſciſſe und Ordinate.

15. Aufg. Wenn $a^{n-1}. Z = z^n$ die Verhältniß der Differentialien zu finden.

Aufl. Hier iſt $a^{n-1} (Z+E) = (z+e)^n$; alſo (Alg 141.).

$$a^{n-1}. \frac{E}{e} = n.z^{n-1} + \frac{n.(n-1)}{1.2} e.z^{n-2} + \frac{n.(n-1).n-2}{1.\ 2.\ 3} e^2 z^{n-3} \ldots$$

Wenn nun in der Reihe rechter Hand z einen gewiſſen Werth behält, ſo kann ſich doch e ohne Ende vermindern, und bis auf nichts abnehmen; dadurch nähert ſich der Werth dieſer Reihe ohne Ende der Gränze nz^{n-1} und folglich iſt die Verhältniß der Differentialien $\frac{E}{e} = \frac{nz^{n-1}}{a_{n-1}}$; oder wenn $a = 1$; und e das Differential von z heißt, das als unendlich klein angeſehen wird, ſo iſt das zugehörige Differential von Z; oder $E = n.e.z^{n-1}$

16. Zuſ. Dieſe Rechnung ſetzt zum voraus, daß z eine gewiſſe Gröſſe hat, e anfangs endlich iſt, und bis auf Nichts vermindert wird. Wäre

aber

aber $z = o$, ſo wäre offenbahr $E = e^n$ was auch e für einen Werth hätte. Dieſe Erinnerung iſt bey einigen, obwohl ſeltener vorkommenden Fällen nöthig, denn ordentlich iſt nicht $z = o$. S. Jac. Bernoulli Op. n. 103. art. 22. Eul. Inſt. Calc. diff. P. II. c. 14.

17. Anm. Wenn in der Reihe

$$E = nez^{n-1} + \frac{n.(n-1)}{1.2} e^2 z^{n-2} + \frac{n.(n-1).(n-2)}{1.2.3.} e^3 z^{n-3} \ldots$$

e eine unendlich kleine Gröſſe bedeutet, ſo verſchwindet jedes folgendes Glied in Vergleichung mit dem nächſtvorhergehenden. Denn das erſte verhält ſich zum zweyten wie $z : \frac{(n-1).}{1.2} e$ das zweyte zum dritten wie $z : \frac{n-2}{3} e$ u. ſ. w. wo jeder Verhältniß letztes Glied, weil es e als einen Factor enthält, in Vergleichung mit dem endlichen z; für nichts zu achten iſt. Alſo wird $E = nez^{n-1}$. So trägt man dieſen Beweis insgemein vor. Man mag nun die unendlich kleinen Gröſſen als was wirkliches, als eine Erdichtung, oder mit Herrn Eulern Inſt. Calc. diff. Cap. III. als o anſehen, ſo wird doch die Auflöſung (15) ihre Richtigkeit behalten. Eigentlich ſucht man bloß die Gränze der Verhältniß $E : e$ in endlichen Gröſſen $nz^{n-1} : 1$ ausgedruckt; Nimmt man nun an, e bedeute was Unendlich kleines, ſo wird E eben dergleichen bedeuten, und man kann ſich alſo ein paar unendlich kleine Gröſſen vorſtellen, welche dieſe Verhältniß hätten, folglich vermittelſt der Gleichung $E = nez^{n-1}$ eine durch

die

die andere ausdrücken. Dieſe Gleichung iſt in der völligen Schärfe wahr, weil es in völliger Schärfe wahr iſt, daß $nz^{n-1} : 1$ die Gränze der Verhältniß $E : e$ iſt. Aber der Beweis im Anfange dieſer Anmerkung könnte den Verdacht erregen, als wäre dieſe Gleichung nur beynahe wahr, weil man ſagt, die folgenden Glieder der Reihe würden als unendlich klein in Vergleichung mit den vorhergehenden weggelaſſen. Wenn man den Begriff vom unendlich Kleinen, den ich (5) gegeben habe, annimmt, wird dieſer Verdacht verſchwinden. Man kann die Verhältniß $E : e$ der $nz^{n-1} : 1$ ſo ſehr nähern als man will, ſo daß ſich kein Unterſchied zwiſchen beyden angeben läßt. Gröſſen, zwiſchen denen ſich kein Unterſchied angeben läßt, ſind ohne Zweifel gleich; und wenn es alſo in völliger Schärfe wahr iſt, daß $E : e = nz^{n-1} : 1$ ſo iſt in eben der Schärfe $E = nez^{n-1}$ Es verhält ſich hier eben ſo wie bey der Summe Alg. 108.

18. Willk. Satz. Das Differential einer Gröſſe bezeichne man durch den Buchſtaben d vor ſie geſetzt. So iſt $E = dZ$; $e = dz$; und in (15) $dZ = nz^{n-1}dz$. Man muß bemerken, daß d hier nicht etwa einen Factor bedeutet, ſondern mit der Gröſſe, die nach ihm folgt, zuſammen ein einziges Zeichen ausmacht. Auch ſchreibt man, Verwirrung zu vermeiden, in jedem Producte das Differential gern zuletzt; z. E. adx ſtatt $dx.a$.

19. **Erkl.** Wenn eine Gröſſe Z eine Function von z iſt, ſo heißt die Verhältniß der Differentiale (13) finden; Z differentiiren. Und aus der endlichen Gleichung zwiſchen Z und z eine

zwiſchen

zwiſchen ihren Differentialen finden, heißt die Differentialgleichung zwiſchen Z und z finden.

20. Aufg. Wenn die endliche Gleichung auf einer Seite Z auf der andern z allein enthält, die Differentialgleichung zu finden.

Aufl. Man ſtelle ſich jede der veränderlichen Gröſſen in zween Zuſtänden; Z; Z+E und z; z+e vor, (13) und ziehe der Gröſſe Z erſten Zuſtand von ihrem zweyten Z+E ab. Durch dieſen Abzug heben ſich nothwendig alle Glieder auf, die nur Z und z, und nicht E; e; enthalten, denn dieſe Glieder müſſen in der Gröſſe Z erſten Zuſtande ſchon zu finden ſeyn. Alſo bekömmt man eine Gleichung, wo auf einer Seite E, auf der andern lauter Gröſſen, die mit e multiplicirt ſind, ſtehen; die man alſo ſo ausdrücken kann $E = e . K$ wo K durch z; e; und beſtändige Gröſſen gegeben iſt: Folglich iſt $\frac{E}{e} = K$ und die Gränze, der ſich $\frac{E}{e}$ unendlich nähern kann, iſt dasjenige, was aus K wird, wenn man darinnen e bis auf Nichts abnehmen läßt. Wenn $e = 0$ werde K in L verwandelt, und man ſchreibe ſtatt E; e; nun dZ; dz; ſo iſt $\frac{dZ}{dz} = L$ oder $dZ = L . dz$ für die Differentialgleichung.

Das Verſ. (15) dient, dieſen Beweis zu erläutern.

21. Zuſ.

21. Zuſ. Wenn eine veränderliche Gröſſe die Summe oder Differenz einiger Veränderlichen iſt, ſo iſt *jener* ihr Differential die Summe oder Differenz von dieſer Differentialen.

Es ſey $Z = u + x - y$ alſo

$$\begin{array}{r} Z + dZ = u + du + x + dx - y - dy \\ \hline dZ = du + dx - dy \end{array}$$

22. Zuſ. Eine veränderliche Gröſſe, und die Summe oder der Unterſchied dieſer veränderlichen Gröſſe und einer beſtändigen, haben einerley Differential.

$$\begin{array}{r} Z = u + a \\ Z + dZ = u + du + a \\ \hline dZ = du \end{array}$$

In dieſem Verſtande ſagt man, es ſey $da = o$ wenn man nähmlich mit a hätte wie mit x oder y in 21 verfahren wollen.

23. Zuſ. Wenn die Gleichung zwiſchen zwo veränderlichen Gröſſen ſo beſchaffen iſt, daß eine abnimmt, indem die andere wächſt, ſo bekommen ihre Differentiale entgegengeſetzte Zeichen.

$$\begin{array}{r} x + y = a \\ x + dx + y + dy = a \\ \hline dx + dy = o \text{ oder } dx = - dy \end{array}$$

Ein verneintes Differential einer bejahten Gröſſe zeigt alſo ein Abnehmen an, oder es zeigt an, daß dieſe bejahte Gröſſe abnimmt, indem eine andere

bejahte zunimmt. Aber eine verneinte Gröſſe nimmt ab, oder wird eine kleinere verneinte, wenn ihr Differential bejaht iſt, ſo wie ſie zunimmt, wenn es verneint iſt. Die gewöhnlichen Regeln der Subtraction zeigen dieſes deutlich.

24. Aufg. Das Differential eines Products $xy = Z$ zu finden, oder eine Gleichung zwiſchen dZ und x; y; dx; dy; zu finden.

Aufl. $4Z = (x+y)^2 - (x-y)^2$; alſo iſt $4\,dZ =$ dem Differentiale von $(x+y)^2$ weniger dem Differentiale von $(x-y)^2$ gleich. (21) Es ſey $x + y = u$; ſo iſt $dx + dy = du$ (21) und $(x+y)^2 = u^2$; und das Differential des Quadrates von $x + y$ ſo groß als $2\,u\,du$ (aus 18; wenn dorten 2; u; ſtatt n; z; geſetzt wird). Aber $2\,u\,du = 2.\ (x+y).\ (dx + dy)$

Es ſey $x - y = v$ ſo iſt $dx - dy = dv$ (21) und $(x-y)^2 = v^2$ und das Differential des Quadrates von $x - y$ ſo groß als $2\,v\,dv$ (18) $= 2.\ (x-y).\ (dx - dy)$ alſo $4dZ = 2.\ (x+y).\ (dx + dy) - 2.\ (x-y).\ (dx - dy)$

$$2\,dZ = xdx + ydx + xdy + ydy$$
$$\quad - xdx + ydx + xdy - ydy$$

$$dZ \text{ oder } d(xy) = ydx + xdy$$

25. Anm. Die gewöhnliche Art, dieſes Verfahren zu rechtfertigen, iſt folgende: $Z + dZ = (x + dx).\ (y + dy)$ giebt $dZ = y\,dx + x\,dy + dx\,dy$ wo das letzte Glied in Vergleichung jedes der beyden andern verſchwindet wie in 17.

26. Aufg.

26. Aufg. Die Differentialgleichung für $\frac{x}{y} = v$ oder das Differential eines Quotientens zu finden.

Aufl. $x = vy$; alſo $dx = vdy + ydv$ (24) und dv oder $d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{dx - vdy}{y} = \frac{ydx - xdy}{y^2}$

27. Aufg. Die Differentialgleichung für $\sqrt[n]{u^m} = w$ oder das Differential einer Wurzelgröſſe zu finden, wo m; n; ganze bejahte Zahlen ſind.

Aufl. $u^m = w^n$ alſo $mu^{m-1}\, du = n.\, w^{n-1}$

dw (18) $= n.\, u^{\frac{m}{n}(n-1)}\, dw$ (Arithm. II. 9; 8;)

$= nu^{m-\frac{m}{n}}.\, dw$ alſo $\frac{m}{n} u^{\frac{m}{n}-1}.\, du =$

$dw = d\left(\sqrt[n]{u^m}\right) = d\left(u^{\frac{m}{n}}\right)$

28. Aufg. Die Differentialgleichung für $\frac{1}{v^r} = y$ oder das Differential von $y = v^{-r}$ (Ar. II. 12.) zu finden.

Aufl. $1 = y \cdot v^r$ folglich $0 = y \cdot rv^{r-1} dv + v^r dy$ (23; 24; 18) alſo dy oder $d(v^{-r}) = -ryv^{-1} dv = -\frac{ry}{v} dv = -r \cdot v^{-r-1} dv$.

29. Zuſ. Hier kann r einen bejahten Bruch bedeuten (27).

30. Zuſ. Wenn $x^\varepsilon = t$ ſo iſt $\varepsilon x^{\varepsilon-1} dx = dt$; Es mag ε eine ganze bejahte Zahl (18) oder ein bejahter Bruch (27) oder eine ganze verneinte Zahl (28) oder ein verneinter Bruch (29) ſeyn. Eine Irrationalzahl läßt ſich allemahl als ein Bruch betrachten, (Ar. IIII. 49.) Daher gilt dieſes, was auch ε für eine Zahl iſt. Es kann ſelbſt eine unmögliche Gröſſe ſeyn, weil man von der Rechnung mit unmöglichen Gröſſen keine andern Regeln hier zu beobachten hat, als von der Rechnung mit möglichen. Das Differential einer Potenz, wird nähmlich durch das zweyte Glied der Potenz $(x+dx)^\varepsilon$ beſtimmt, (15) ohne daß die folgenden dabey in Betrachtung kommen; und dieſes zweyte Glied hat für alle die genannten unterſchiedenen Werthe von ε einerley Ausdruck; (Alg. 627.)

Begriffe von der Fluxionen-rechnung.

31. Erkl. Wenn ein Punct p. 2 Fig. die Linie AG beſchreibt, (Geom. 5. Erkl.) und man den Anfang

ſang ſeiner Bewegung von einem willkührlichen Orte A an rechnet, ſo heißt die Geſchwindigkeit die er an jeder Stelle, z. E. C hat, die Fluxion von AC, und AC die derſelben zugehörige flieſſende Gröſſe (fluens).

32. Zuſ. Wenn ſich des Rechteck, deſſen beyde Seiten a; b; ſind in eines verwandelt, deſſen Seiten a + e; b + f; ſind, ſo iſt die Verhältniß dieſer beyden Rechtecke = ab : (a + e). b + f). Sollen ſich nun ein paar Linien g; h; eben ſo verhalten; ſo iſt $h = \frac{(a+e).\ (b+f)}{a\,b}.\ g$ wo ſich h durch Findung vierter Proportionallinien giebt; denn es ſey a : a + e = b + f; c ſo iſt b : c = g : h (Alg. 501.). Alſo kann man zwey Stücken AC : AG = g : h nehmen, die ſich wie die beyden Rrchtecke verhalten, oder überhaupt wenn ſich die Gröſſe eines Rechteckes durch Veränderung ſeiner Seiten verändert, ſo kann man allezeit Linien AC; AG; nehmen, die ſich in der Verhältniß verändern, in der ſich das Rechteck verändert, d. i. man kann die Gröſſe des Rechtecks in jedem Zuſtande durch ein Stück der Linie AG vorſtellen. Wenn alſo der Punct p, beſtändig Stücken AC; AG, u. ſ. w. beſchreibt, die ſich wie die veränderlichen Gröſſen des Rechtecks verhalten, ſo wird die Geſchwindigkeit des Punctes an jeder Stelle, der Geſchwindigkeit gleich ſeyn, mit der ſich die Gröſſe des Rechtecks verändert, oder die Fluxion des Rechtecks ſeyn.

33. Zuſ. Dieſes gilt überhaupt von jeder Fläche, weil jede ſich auf ein Rechteck bringen läßt. (G. 14. S. 7. Z.) Auf eine ähnliche Art erhellt, daß ſich die Veränderungen eines Körpers durch gerade Linien vorſtellen laſſen, und überhaupt daß dieſes für jede veränderliche Gröſſe ſtatt findet. Man wird alſo verſtehen, was die Geſchwindigkeit, mit der ſich eine Gröſſe verändert, ihre Fluxion iſt; nehmlich die Geſchwindigkeit eines Puncts, welcher Linien beſchreibt, die ſich allemahl wie dieſe veränderliche Gröſſe verhalten.

34. Zuſ. Wenn des Punctes Bewegung nicht gleichförmig iſt, ſo verhalten ſich ſeine Geſchwindigkeiten in C und G, wie die Räume, welche mit jeder dieſer Geſchwindigkeiten gleichförmig in gleichen Zeiten könnten beſchrieben, welche Verhältniß der Räume alſo mit der Verhältniß der Fluxionen von AC und AG einerley iſt.

35. Grundſatz. Wird die Bewegung beſchleunigt, ſo iſt CG gröſſer als der Raum, der mit der Geſchwindigkeit, die der Punct in C hat, gleichförmig in derjenigen Zeit beſchrieben würde, in welcher CG mit der wirklichen Bewegung beſchrieben wird, und kleiner als der Raum, der in eben der Zeit, mit der Geſchwindigkeit, welche der Punct in G hat, gleichförmig beſchrieben würde.

Die Zeit mag T heiſſen, die Geſchwindigkeiten in C und G, will ich durch vC; vG; anzeigen, und sTvC mag den Raum bedeuten, der in der

Zeit

Zeit T mit der Geſchwindigkeit in C gleichförmig beſchrieben wird. So wird ſich dieſer Satz ſo ausdrucken laſſen: CG > sTvC und < sTvG.

36. Grundſ. Wird aber die Bewegung vermindert, (motus retardatus) ſo iſt CG < sTvC und > sTvG.

37. Zuſ. Wenn die Veränderung der Bewegung ſtetig iſt, ſo läßt ſich eine Stelle D, ſo nahe bey C annehmen, daß die Geſchwindigkeiten in beyden Stellen ſo wenig als man will, oder weniger als um jede gegebene Gröſſe von einander unterſchieden ſind, oder der Unterſchied unter sTvC und sTvD weniger als jede gegebene Gröſſe beträgt. Da nun CD zwiſchen dieſe beyden Räume fällt, (33; 34;) ſo kann man jeden von ihnen für CD annehmen, oder man kann ſich vorſtellen CD werde mit einer gleichförmigen Bewegung beſchrieben.

38. Anm. Darauf gründet ſich in der Mechanik die Zerfällung der Bewegungen in gleichförmige. Wenn man ſich den Raum CG in viel kleine Theile getheilet vorſtellt, ſo kommen die Geſchwindigkeiten am Anfange und am Ende eines jeden ſolchen Theiles einander deſto näher, je kleiner dieſe Theile werden, und je gröſſer ihre Menge wird. Weil ſich alſo der Unterſcheid der Geſchwindigkeiten nach Gefallen vermindern läßt, ſo ſtellt man ſich vor, jeder Theil werde mit der Geſchwindigkeit beſchrieben, die der bewegte Körper am Anfange dieſes Theiles hat, und ſieht alſo die Bewegung durch dieſen Theil als gleichförmig an, ſo daß ſich die Geſchwindigkeit nur am Anfange jedes Theiles verändert,

und alſo der folgende Theil mit einer neuen Geſchwindigkeit beſchrieben wird. Dieſes kömmt der Wahrheit deſto näher, je kleiner die Theile werden, und man kann ſich der Wahrheit ohne Ende nähern. Daher zertheilt man den Raum in unendlich kleine Theile, die jeder mit einer gleichförmigen Bewegung beſchrieben werden.

39. Aufg. Der Punct m 2 Fig. beſchreibe ES dergeſtalt, daß er ſich in K; L; S; befindet, wenn p in C; D; G; iſt, und alſo KL; LS; in denjenigen Zeiten beſchreibt, in denen CD; DG; von p beſchrieben werden. Es verhalte ſich aber beſtändig $EK : EL = AC^n : AD^n$; $EL : ES = AD^n : AG^n$; oder der Weg des Punctes m von E an gerechnet, verhalte ſich allemahl wie die Potenz n des zugehörigen Weges des Punctes p von A an gerechnet. Man ſucht die Verhältniß der Geſchwindigkeiten beyder Puncte in jedem Paare zuſammengehöriger Stellen, oder die Verhältniß der Fluxionen, der Potenz und der Wurzel.

Aufl. I. In zwo gleichen, nach einander folgenden Zeiten, T; beſchreibe p mit was für einer veränderten Bewegung man will, CD; DG; alſo m in eben den gleichen Zeiten KL; LS; Es ſey ferner $AD = x$; $EL = \frac{x^n}{a^{n-1}}$ die beſtändige Linie a; gebrauche ich hier nur, damit EL eine Linie wird, die

die ſich wie die Potenz einer andern Linie verhält, oder damit die Abmeſſungen gleich werden (Trig. 19. S. Anm.) Ich kann alſo $a = 1$ und $EL = x^n$ ſetzen. Ferner ſey $CD = e$, $DG = f$ (32) ſo iſt:

$$EK = (x - e)^n = x^n - nex^{n-1} + Be^2 x^{n-2}$$

$$ES = (x + f) n = x^n + nfx^{n-1} + Bf^2 x^{n-2} \ldots$$

wo B den zweyten Binomialcoefficienten bedeutet. Man kann ſich dieſe Reihen aus dem binomiſchen Lehrſatze leicht fortgeſetzt vorſtellen, und begreift, daß für $f = e$; die geraden Glieder entgegenſetzt und gleich, die ungeraden völlig gleich ſeyn werden.

II. Folglich iſt

$$KL = nex^{n-1} - Be^2 x^{n-1} \ldots$$

$$LS = nfx^{n-1} + Bf^2 x^{n-2} \ldots$$

$$LS - KL = n. (f - e) x^{n-2} + B (f^2 + e^2) x^{n-2} \ldots$$

wo in jedem ungeraden Gliede eine ungerade Potenz der Gröſſe e; von eben der ungeraden der Gröſſe f abgezogen wird; in jedem geraden Gliede aber, werden gleiche gerade Potenzen beyder Gröſſen addirt.

III. Iſt alſo e nicht gröſſer als f; ſo iſt LS — KL bejaht oder $LS > KL$; Wenn aber des Punctes p Bewegung durch CDG gleichförmig iſt, ſo iſt $e = f$; und wenn ſeine Bewegung durch CDG beſchleunigt iſt, ſo iſt $e < f$. In dieſen beyden

Fällen alſo iſt der Raum LS den m in der folgenden Zeit zurücke legt, gröſſer als der Raum LK in der vorhergehenden. Findet dieſes alſo beſtändig ſtatt, ſo klein man auch die Zeiten T annimmt, ſo wird die Bewegung von m beſchleunigt wenn die Bewegung von p beſchleunigt oder gleichförmig iſt.

IIII. Geſetzt alſo, die Bewegungen von m und p werden beſchleunigt, ſo iſt

$$\frac{sTvK < KL}{sTvD > DC} \qquad \frac{sTvS > LS}{sTvD < DG}$$

$$\frac{vK}{vD} < \frac{KL}{CD} \qquad \frac{vS}{vD} > \frac{LS}{DG}$$

$$\text{Alſo } \frac{vK}{vD} < nx^{n-1} - Bx^{n-2} e \ldots$$

$$\frac{vS}{vD} > nx^{n-1} + Bx^{n-2} \cdot f \ldots$$

Wenn man nun e, f, unendlich vermindert, ſo nähern ſich jede Reihen zur rechten Hand, unendlich dem Werthe ihres erſten Gliedes, das beyden gemein iſt. Alſo nähern ſich die Quotienten $\frac{vK}{vD}$ und $\frac{vS}{vD}$ unendlich dem Werthe nx^{n-1} oder ſie können dieſem Werthe ſo nahe kommen, daß ſie davon weniger als um jede gegebene Gröſſe unterſchieden ſind. Zwiſchen dieſen beyden Quotienten nun fällt der $\frac{vL}{vD}$; folglich läßt ſich kei-

ne

ne Gröſſe angeben, um welche dieſer letzte Quotient von nx^{n-1} unterſchieden iſt, weil ſich die Gränzen, zwiſchen die er fällt, dieſem Werthe unendlich nähern.

Es ſey $\frac{vL}{vD} = nx^{n-1} + k$. Man nehme ein f, das $\frac{vS}{vD}$ kleiner als $nx^{n-1} + k$ macht, weil nun allemahl $\frac{vL}{vD}$ kleiner als $\frac{vS}{vD}$ iſt, ſo kann nicht $\frac{vL}{vD} = nx^{n-1} + k$ ſeyn. Eben ſo zeigt ſich, daß nicht $\frac{vL}{vD} = nx^{n-1} - k$ ſeyn kann, wenn man e ſo nimmt, daß es $\frac{vK}{vD}$ gröſſer als $nx^{n-1} - k$ macht. Es laſſen ſich aber e und f ſo annehmen, weil ſich durch ihre Verminderung, beyde Quotienten den erſten Gliedern der Reihen, die ſie ausdrücken, ſo nahe bringen laſſen als man nur will.

V. Wenn die Bewegung von p gleichförmig, aber die von m beſchleunigt iſt (III) ſo bleiben alle die Schlüſſe IIII; denn $sTvD = DG = DG$ giebt auch $\frac{vK}{vD} < \frac{KL}{CD}$ und $\frac{vS}{vD} > \frac{LS}{DG}$

VI. Wenn die Bewegung von p vermindert wird, ſo giebt es drey Gattungen dieſes Falles.

Erſte Gattung. Die Bewegung von m wird beſchleunigt. So iſt sTvL gröſſer als KL; und sTvD kleiner als CD alſo $\frac{vL}{vD}$ gröſſer als $\frac{KL.}{CD}$ Auch sTvL kleiner als LS; sTvD gröſſer als DG; und $\frac{vL}{vD}$ kleiner als $\frac{LS}{DG}$; Alſo fällt $\frac{vL}{vD}$ zwiſchen zwo Gränzen, die man nach (IIII) durch die Verminderung von e; f; dem Werthe nx^{n-1} ſo nahe als man will, bringen kann.

Zweyte Gattung m bewege ſich gleichförmig. alſo sTvL = KL; sTvD kleiner als DC; und $\frac{vL}{vD}$ gröſſer als $\frac{KL}{e}$; Auch sTvL=LS; sTvD gröſſer als DG; und $\frac{vL}{vD}$ kleiner als $\frac{LS}{f}$; wo wieder die vorigen Gränzen vorkommen.

VII. Dritte Gattung. Die Bewegung von m wird vermindert. So iſt sTvK gröſſer als KL; sTvD $\lessgtr$ CD alſo $\frac{vK}{Dv}$ gröſſer als $\frac{KL}{e}$; sTvS kleiner als LS; sTvD gröſſer als DG; $\frac{vS}{vD}$ kleiner

als

als $\frac{LS}{f}$; alſo fällt der Quotient $\frac{vL}{vD}$ wieder zwiſchen die vorigen Gränzen; weil hier vL gröſſer als vS und kleiner als vK iſt.

VIII. Wenn alſo $y = x^n$ und vy: vx die zuſammengehörigen Geſchwindigkeiten bedeuten, mit denen ſich y; x; in einerley Augenblicke verändern, ſo iſt überhaupt $vy = nx^{n-1}\ vx$.

40. Zuſ. Bey den Potenzen iſt die Verhältniß der Fluxionen und die Verhältniß der Differentialen einerley. (39; 18) Und da die übrigen Regeln des Differentiirens aus den Potenzen ſind hergeleitet worden, (24; 26;) ſo wird man ſich leicht vorſtellen, daß es einerley iſt, Fluxionen oder Differentiale zu finden.

41. Zuſ. Wenn ſich nähmlich z (13) mit ungleicher Geſchwindigkeit verändert, d. i. in gleichen Zeiten bald viel, bald wenig ab- oder zunimmt, ſo iſt e eine ſolche Veränderung von z, die mit veränderlicher Geſchwindigkeit iſt erzeugt worden; und eben ſo E. Es werden aber E; e; in einer Zeit erzeugt. Wenn nun dieſe Zeit immer kleiner und kleiner wird, ſo kömmt die Geſchwindigkeit, mit der ſich jede der beyden Gröſſen z; Z; am Ende dieſer Zeit verändert, der Geſchwindigkeit, mit der ſie ſich im Anfange veränderte, immer näher und näher, und dieſe Näherung läßt ſich ſo weit treiben als man will. Alſo nähert

ſich

ſich die Verhältniß E; e unendlich der Verhältniß ſolcher Veränderungen, die mit den Geſchwindigkeiten entſtanden wären, mit denen ſich Z, z; am Anfange der Zeit verändern, das iſt, der Verhältniß dieſer Geſchwindigkeiten ſelbſt. So wird durch die unendliche Verminderung der Zeit aus E: e die Verhältniß dZ; dz = vZ: vz.

42. Zuſ. Die Differentiale dZ; dz; ſind nähmlich nicht Gröſſen, um welche Z; z; wirklich wachſen, oder abnehmen, ſondern um welche ſie in einer Zeit wachſen oder abnehmen würden, wenn jedes ſich mit der Geſchwindigkeit zu verändern fortführe, die es am Anfange dieſer Zeit hat. Die Zeit kann alsdenn endlich ſeyn, und ſo groß als man will, da würden denn dZ; dz; endliche Gröſſen ſeyn, die ſich ſo wie die Geſchwindigkeiten verhielten. Denn daß man dZ; dz; unendlich klein annimmt, gründet ſich blos darauf, weil die Verhältniß dieſer beyden Gröſſen, mit der Verhältniß der Geſchwindigkeiten einerley ſeyn ſoll, und man daher die Zeit ſo vermindert, daß durch ihre ganze Dauer jede Geſchwindigkeit als unverändert kann angeſehen werden, (38) da denn die Veränderungen ſelbſt auch immer mit vermindert werden müſſen.

43. Anm. Die Engelländer bedienen ſich nach Newton der Fluxionenrechnung. Sie bezeichnen die Fluxion einer Gröſſe mit einem Puncte über ihr: So ſieht die

Glei-

Gleichung am Ende von 40; folgendergeſtalt aus: $\dot{y} = n\dot{x}x^{n-1}$

44. Anm. Wegen der Erfindung beyder Arten von Rechnungen (13. 31) iſt ein Streit entſtanden, deſſen vollſtändige Erzählung hier zu weitläuftig ſeyn würde. Engelland hat ſie Newton zuſchreiben wollen, und die Deutſchen haben ſie Leibnitzen zugeeignet. Man findet die Geſchichte dieſes Streites in den Leibnitziſchen Lebensbeſchreibungen, z. E. des Neufville ſeiner wie ſolche bey der 1739. herausgekommenen lateiniſchen Ueberſetzung von Leibnitzens Theodicee, (Tentamina theodiceae; verſio noua cet.) im I. B. zu finden iſt 235. u. f. S. Mir hat es immer geſchienen, als ob jeder dieſer beyden Gelehrten für ſich auf ſeine Erfindung gerathen wäre. Leibnitz hat die ſeinige gewiß zuerſt in den Leipziger Actis Eruditorum 1684. bekannt gemacht, da Newton nicht eher als in den 1687. herausgekommenen principis philoſ. naturalis etwas von der ſeinigen öffentlich erwähnt hat. Man hat Leibnitzen beſchuldigen wollen, er habe aus Briefen zuvor Newtons Methode kennen gelernt; aber dieſe Beſchuldigung iſt ganz unerwieſen, Leibnitzens bekannter Charakter iſt wider ſie, und da jeder bey ſeiner Rechnung ganz andere Begriffe, einer Unterſchiede, der andere Geſchwindigkeiten zum Grunde legt, ſo ſcheint dieſes deſtomehr darzuthun, daß jeder durch eignes Nachdenken auf ſeine Rechnung gekommen. Auch führen ſowohl die Schriften der Alten beſonders des Archimedes, als der Neuern, welche von beyden Geometern geleſen worden ſind, nach und nach dieſen Rechnungen ſo nahe, daß Geiſter, wie ſie waren, ohne große Schwürigkeit darauf kommen konnten. Der Begriff der Fluxionen und ſelbſt das Wort fluere, finden ſich in Nepers 1614. herausgekommenem Werke: **Mirifici canonis logarithmorum deſcriptio; L. I. c. 1.**

wie

wie Mac. Laurin Treat. of Flux. art. 151. bekennt. S. auch unten 90.

45. Anm. Auf dem europäiſchen veſten Lande ſind die Leibnitziſchen Ausdrückungen und Gröſſen faſt bey allen Mathematikverſtändigen gewöhnlich: Sie haben auch in verſchiedenen Abſichten vor den Newtoniſchen den Vorzug, welche letztern faſt nur in Britannien beybehalten werden. Ich kann indeſſen nicht läugnen, daß mir der gewöhnliche Vortrag der erſten Gründe der Differentialrechnung, nie der geometriſchen Schärfe gemäß geſchienen hat. Ich habe ihn deswegen auf die Gränzen der Verhältniſſe (rationes primas et vltimas) zu bringen geſucht, welches Verfahren ſchon Newton princ. L. I. Sect. I. beobachtet hat. Eine Schrift, in welcher die Gründe der Fluxionenrechnung und ihrer Anwendung mit der vollkommenſten geometriſchen Schärfe gewieſen werden, iſt Colin Mac Laurin Treatiſe of Fluxions Edinb. 1742 2 Quartbände. Die Weitläuftigkeit dieſes Buchs rühret großentheils nur daher, daß er die Beweiſe der erſten Sätze alle mit Worten ausgedruckt und öfters bey einem Satze verſchiedene Fälle betrachten müſſen, wo der Beweis für einen Fall wie für den andern nur mit geringen Veränderungen geführt wird, Dieſe Weitläuftigkeit iſt alſo in meinen Augen ein geringerer Fehler des Buches als die ganz ſynthetiſche Lehrart, in den Beweiſen der erſten Hauptſätzen. Ich habe zu meinem eigenen Unterrichte die Art, wie die meiſten gefunden werden aufgeſucht, der Raum verſtattet mir hier aber nichts mehr als (39) mitzutheilen, woraus man ſchon urtheilen wird, in was für eine Weitläuftigkeit die Beobachtung der größten Schärfe und Deutlichkeit hier führen würde. Indeſſen hat es mir nöthig geſchienen, dieſe Begriffe von der Fluxionenrechnung zu geben, ob ſie gleich in den gewöhnlichen, auch gröſſern Anleitungen zur Differentialrechnung vermißt

mißt werden. Würde mich nicht ſchon das zulänglich dieſerwegen rechtfertigen, daß es für einen Liebhaber der Mathematik wichtig iſt, bey dieſer Rechnung auch die Mathematikverſtändigen jenſeit des Meeres

penitus toto diuiſos orbe Britannos

Virg.

gebrauchen zu können? Man verſteht ſie aber ſchlecht, wenn man ſich nach Veranlaſſung verſchiedener Anleitungen zur Differentialrechnung einbildet, ihre Fluxionen, und unſere Differentialen wären völlig einerley. Wenn ſie mit uns einerley Regeln der Rechnung beobachten, ſo iſt die Uebereinſtimmung nur ſo groß als zwiſchen zween Lehrern des Naturrechts, deren einer die Beförderung der Vollkommenheit, und der andere die Geſelligkeit zum Grunde ſetzt, einerley Pflichten daraus herzuleiten. Aber die Fluxionen erweitern auch ſelbſt unſere Begriffe von den Gründen dieſer Rechnuug, und geben uns von ihren Gründen mehr Ueberzeugung, als wenn man ſich die Differentialen in Vergleichung mit den endlichen Gröſſen etwa nach Wolfs Anleitung wie Sandkörnchen in Vergleichung mit einem Berge vorſtellt.

Allgemeiner Beweis des Binomiſchen Lehrſatzes durch die Differentialrechnung.

46. Aufg. Eine Formel für die Ausdrükkung der Potenz einer zweytheilichen Wurzel durch eine unendliche Reihe zu finden, deren Exponent mag bejaht oder verneint, ganz oder gebrochen ſeyn.

Aufl.

Aufl. I. Die Reihe für die Potenz m jeder zweytheilichten Wurzel zu finden, iſt genug, daß man nur dieſe Reihe für die Potenz von $1+y$ ſucht (Alg. 144.) Es ſey alſo

$$(1+y)m = 1 + Ay + By^2 + Cy^3 \ldots\ldots$$
$$+ Py^n + Qy^n + \ldots\ldots = w$$

wo man die Coefficienten dieſer Reihe w beſtimmen will. Daß ſie von 1 anfängt, iſt klar, weil ſie für jeden Werth von y und alſo auch für den Werth $= 0$ richtig ſeyn ſoll.

II. Alſo iſt $m.\ (1+y)^{m-1}\ dy = dw$ oder $m.\ (1+y)m\ dy = (1+y)\ dw$ oder $mwdy = (1+y)\ dw$ oder $\frac{(1+y)\ dw}{dy} - mw = 0$.

Es iſt aber

dw

$$\frac{dw}{dy} = A + 2By + 3Cy^2 \ldots\ldots + nPy^{n-1} + (n+1)Qy^n \ldots\ldots$$

$$\frac{(1+y)\,dy}{dw} = A + 2By + 3Cy^2 \ldots\ldots + nPy^{n-1} + (n+1)Qy^n \ldots\ldots$$

$$+ A \quad + 2B \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + nP \ldots\ldots$$

$$- mw = - m - mA - mB \ldots\ldots\ldots\ldots - mP \ldots\ldots$$

Alſo iſt (Alg. 624.)

$$A = m;\ B = \frac{m-1}{2} A;\ C = \frac{m-2}{3} B;\ ..\ Q = \frac{m-n}{n+1} P$$

Es erhellt, daß dieſe Coefficienten nach dem Geſetze (Alg. 141.) gemacht werden, weil das dortige a; b; hier 1; y ſind. Folglich gilt dieſes Geſetz für alle Werthe von m; für welche die Regeln zu differentiiren gelten, vermittelſt deren die Coefficienten hier gefunden werden; d. i. für gebrochne, verneinte, und ſelbſt unmögliche (30)

47. Wenn m keine ganze bejahte Zahl iſt, ſo hört die Reihe nicht auf, weil der Zähler eines jeden Coefficienten ein Product aus Factoren iſt, die aus m immer um ganze Zahlen vermindert beſtehen. Daß alſo das Glied b^m (Alg. 141.) oder hier y^m nicht vorkömmt, wie auch deswegen nicht geſchehen kann, weil y hier wie dorten b lauter ganze bejahte Zahlen zu Exponenten hat.

48. Anm. Verſchiedene Schriftſteller haben den binomiſchen Lehrſatz durch die Differentialrechnung finden gelehrt, als Euler Inſt. Calc. diff. P. II §. 72; Colſon Comment. on Newtons Method of Fluxions p. 309. Auch hat Herr Clemm einen Beweis, der dem hier vorgetragenen völlig ähnlich iſt, von Herrn Eulern gelernt, und ſchon vor einigen Jahren in ſ. lettre ſur quelques paradoxes du calcul analytique bekannt gemacht. S. ſeine erſten Gründe aller mathemat. Wiſſenſch. 110. §. Die Abſicht derer, die ſolche Anwendungen der Differentialrechnung gemacht haben, kann aber nicht geweſen

ſen ſeyn, den Satz dadurch in völliger Schärfe zu erweiſen. Denn ſie haben nicht zuvor dargethan, daß man von den Gründen, auf denen die Regeln der Differentialrechnung beruhen, überzeugt ſeyn könne, ehe man dieſen Satz in ſeiner völligen Allgemeinheit weiß, wie ich (30). Ihr Verfahren kann alſo keine andere Abſicht als eine Uebung dieſer Rechnung haben, auch iſt es ſonſt von dem meinigen weit unterſchieden, auf das ich 1756. gerathen bin, als ich Herrn Huben, der ſich durch ſeine analytiſche Abhandlung von den Kegelſchnitten bekannt gemacht hat, einen befriedigenden Beweis von der Allgemeinheit des binomiſchen Lehrſatzes zu geben ſuchte. Ich verfiel anfangs auf Differentiirung der Logarithmen, weil ich aber dabey nach der Schärfe, die ich ſuchte, ſorgfältig verhüten wollte, daß nichts vorausgeſetzt würde, das ſich ſchon auf den binomiſchen Lehrſatz in ſeiner Allgemeinheit gründete. ſo fand ich für dienlicher alles auf die einfachſte Anwendung der Differentialrechnung zu bringen; So habe ich den Beweis in einem 1758. hier herausgegebenen Programma: theorema binomiale vniuerſaliter demonſtrat. bekannt gemacht; den Beweis für ganze bejahte Exponenten (Alg. 141.) habe ich in einer 1745. zu Leipzig herausgegebenen Schrift Demonſtratio theorematis binomialis mitgetheilet.

49. Anm. Joh. Bernoulli Op. T. IIII. p. 173. giebt Paſcalen für den Erfinder des binomiſchen Lehrſatzes an. Man ſ. auch das Commercium epiſtolicum Io. Collins *cet.* p. 67. Man hat ohne Zweifel die allgemeine Formel für ganze bejahte Exponenten anfangs aus Vergleichung der Coefficienten mit den figurirten Zahlen (Alg. 726.) gefunden, und Jac. Bernoulli Art. Coni. P. II. c. 8. p. 131. hat gewieſen, wie ſie aus der Lehre von den Combinationen fließt: Nähmlich a + b verſchiedenemahl mit einander multipliciren heißt ſo-

 viel

viel als a und b auf verſchiedene Arten mit einander combiniren, nur mit dem Unterſchiede von Alg. 735; daß hier in einer Verbindung eine Sache zu wiederhohlten mahlen vorkömmt. In dieſer Formel der Potenzen für jeden ganzen Exponenten, hat man ſich nun die Freyheit genommen, ſtatt des Exponenten einen Bruch und eine verneinte Zahl zu ſetzen, weil Wurzeln und Quotienten dergleichen Exponenten haben. Ob man gleich das letztere zugeſtehen muß, ſo hat es mir doch immer geſchienen, als berechtige uns dieſes nicht, in der binomiſchen Formel den Exponenten einem Bruche oder einer verneinten Zahl gleich zu ſetzen, weil dieſe Formel aus dem Begriffe der Multiplication und folglich aus der Vorausſetzung, daß der Exponent eine ganze bejahte Zahl iſt, hergeleitet werden muß. Daß gründliche Algebraiſten eben dergleichen Bedenken gehabt, erhellt aus ihren Bemühungen, dieſe Erweiterung zu rechtfertigen, ſ. Clairant Algebra IIII. Th. 54. u. f. Art. 286. S. in Mylius Ueberſ. von Segner Elem. Analyſ. finitor. §. 264; 329; Bey dem Verfahren dieſer Gelehrten bleibt mir der Zweifel Alg. 627. übrig. Und eben dieſer Zweifel zeigt, warum die Differentialrechnung einen ſo kurzen und offenbahren Beweis giebt, weil ſie nähmlich von der Reihe, in welche eine Potenz anfgelöſet wird, nicht alle Glieder braucht. (30) Es iſt auch einer guten Methode deſto weniger zuwider, die Differentialrechnung hier zu brauchen, weil man die Erweiterung der binomiſchen Formel auf andere als ganze bejahte Exponenten, nicht eher als bey der Rechnung des Unendlichen vorgenommen hat, wovon Newtons analyſis per aequationes infinitas; im Commerc. epiſt. Io. Collins p. 3. und Newtons Brief daſelbſt p. 49. Proben enthalten.

50. Exempel. Für $m = -\frac{1}{2}$ ſind die Coefficienten: $-\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2} \cdot -\frac{3}{2} : 2 = +\frac{3}{8}$; $+\frac{3}{8} \cdot -\frac{5}{2} \cdot 3$
$= -$

$= - \frac{5}{16}; \frac{5}{16}. - \frac{7}{2}: 4 = + \frac{35}{128}$ u. ſ. w. alſo

$$\frac{1}{\sqrt{(1+y)}} = (1+y)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$1 - \frac{1}{2}y + \frac{3}{8}y^2 - \frac{5}{16}y^3 + \frac{35}{128}y^4 \ldots$$

Dieſe Reihe multiplicirt mit

$(1+y)^{\frac{1}{2}} =$ (Alg. 625.)

$$1 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^2 + \frac{1}{16}y^3 - \frac{5}{128}y^4 \ldots$$

giebt

$$\begin{array}{llllll} 1 & -\frac{1}{2}y & +\frac{3}{8}y^2 & -\frac{5}{16}y^3 & +\frac{35}{128}y^4 \ldots \\ & +\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & +\frac{3}{16} & -\frac{5}{32} \\ & & -\frac{1}{8} & +\frac{1}{16} & -\frac{3}{64} \\ & & & +\frac{1}{16} & -\frac{1}{32} \\ & & & & -\frac{5}{128} \end{array}$$

oder = 1 weil ſich alle folgende Glieder aufheben, welches als eine Probe dienet, daß beyder Reihen Coefficienten, ſo weit ſie da ſtehen, richtig ſind berechnet worden.

51. Exempel. Für $m = \frac{1}{n}$ iſt $(1+y)^{\frac{1}{n}} =$

$$1 + \frac{1}{n}y + \frac{1.(1-n)}{1.2n^2}y^2 + \frac{1.(1-n)(1-2n)}{1.\ 2.\ 3\ n^3}y^3 \ldots$$

$$+ \frac{1.(1-n)\ldots\ldots(1-(r-1)n)}{1,2\ldots\ldots\ldots r.\ n^r}y^r$$

$$+\frac{P.(1-rn)}{(r+1).n}y^{r+1}$$

Wenn der Coefficient bey der Potenz r von y; P heißt. Iſt der folgende = Q ſo iſt

$$Q = P.\frac{\frac{1}{n}-r}{r+1} = -P.\frac{r-\frac{1}{n}}{r+1}$$ wo das, was in P multiplicirt wird, gewiß ein bejahter eigentlicher Bruch iſt, es mag nun n eine bejahte oder eine verneinte ganze Zahl ſeyn. Alſo iſt, ohne Abſicht auf das Zeichen, jeder Coefficient kleiner als der vorhergehende; und das Zeichen mit betrachtet iſt er dem vorhergehenden allemahl entgegengeſetzt.

52. Exempel. Wenn e eine ganze bejahte Zahl und n (51) eine ganze verneinte Zahl ſeyn ſoll, ſo ſetze man e = — n; dieſes giebt

$$(1+y)^{-1:e} = 1-\frac{1}{e}y+\frac{1.(1+e)}{1.\,2\,e^2}y^2\ldots$$

$$+\frac{1.(1+e)\ldots 1+(r-1)e}{1.\,2.\ldots\ldots r.\,e^r}y^r - P.\frac{r+1:e}{r+1}y^{r+1}$$ wo wieder jeder Coefficient kleiner als der vorige und ihm mithin entgegengeſetzt iſt.

53. Zuſ. Wenn m (46) ein eigentlicher bejahter Bruch iſt, ſo ſind $m-1$; $m-2$; u. ſ. w. lauter verneinte Zahlen: Alſo iſt der zweyte Coefficient $\frac{m.(m-1)}{1.\ 2.}$ verneint; dieſer aber mit $\frac{m-2}{3}$ multiplicirt giebt den dritten bejaht, und ſo ſind ferner alle Coefficienten abwechſelnd bejaht und verneint, ſo daß der erſte bejaht iſt.

54. Zuſ. Weil $(1-y)^m = 1 - m.y + \frac{m.(m-1)}{1.\ 2.} y^2 \ldots$ und alſo wenn $y = 1$ geſetzt wird; $0 = 1 - m + \frac{m.(m-1)}{1.\ 2}$ u. ſ. w. ſo ſind dieſer Reihe zweytes, viertes u. ſ. f. alle gerade Glieder verneint, wenn m ein bejahter eigentlicher Bruch iſt; denn es ſind bejahte Gröſſen (51) vor denen das Zeichen – ſteht (Alg. 148.) das dritte, fünfte, und alle folgenden ungeraden Glieder aber ſind verneinte Gröſſen (51) vor denen das Zeichen + ſteht, (Alg. 148.) und alſo verneint. Alſo beſteht dieſe Reihe aus einer 1 und lauter verneinten Gröſſen, die alſo zuſammen = — 1 ſeyn müſſen, weil die Reise = 0 ſeyn ſoll. Hieraus folgt, daß die unendliche Reihe der Binomialcoefficienten, wenn m ein eigentlicher bejahter Bruch iſt, vom erſten, m, an gerechnet, zuſammen = – 1 giebt, welches dient unzählige unendliche Reihen von Brüchen zu finden, die zuſammen = 1 ſeyn müſſen.

So iſt (51) $1 = \frac{1}{n} + \frac{n-1}{2\,n^2} + \frac{(2n-1).\ (n-1)}{2.\ 3.\ n^3} + \frac{(3n-1).\ (2n-1).\ (n-1)}{2.\ 3.\ 4.\ n^4}$ u. ſ. w.

55. Zuſ. Für einen verneinten Werth von m = — n läßt ſich ein Schluß wie 54 nicht anbringen. Es wird alsdenn $(1 - y)^{-n} = 1 + ny + \frac{n.\ (n+1)}{1.\ 2} y^2 \ldots + \frac{n.\ (n+1) \ldots (n+r-1)}{1.\ 2 \ldots r} y^r$
In allen geraden Gliedern nähmlich enthält der Coefficient eine ungerade Anzahl verneinter Factoren, und in allen ungeraden eine gerade; alſo wäre der Coefficient für ſich, dorten verneint, hier bejaht: Aber in allen geraden Gliedern iſt der Coefficient in eine ungerade Potenz, und in allen ungeraden in eine gerade von – y multiplicirt, folglich das Product allemahl bejaht. Folglich beſteht dieſe Reihe, und alſo auch die, welche herauskömmt, wenn y = 1 geſetzt wird; aus lauter bejahten Gröſſen. Jede dieſer Gröſſen, wie $\frac{n.\ (n+1) \ldots (n+r-1)}{1.\ 2 \ldots\ldots r}$ iſt endlich, wie groß auch r ſeyn mag; alſo machen ihrer unendlich viel eine unendliche Summe, nähmlich $\frac{1}{0^n}$ welches unendlich iſt. (Trigon. 4. Erkl. 4. Zuſ.)

Formel

Formel für die Potenz einer unendlichen Reihe. (infinitiomium.)

56. Aufg. Die Potenz m der Reihe $1 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \delta z^4 + \varepsilon z^5 \ldots$ zu finden; wo die griechiſchen Buchſtaben gegebene Coefficienten bedeuten.

Aufl. Man ſetze ſie $= 1 + y$; und ihre Potenz m; $= w = 1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + Ez^5$ wo man die großen lateiniſchen Buchſtaben ſucht (wie 46). Alſo iſt $m.\ (1+y)^{m-1}\, dy = dw$ oder $mwdy = (1+y).\ dw$

II. Nun iſt $dy = (\alpha + 2\beta z + 3\gamma z^2 \ldots)\, dz$ und $dw = A + 2Bz + 3Cz^2 \ldots)\, dz$; alſo

$$\text{III)}\ (1+y).\frac{dw}{dz} = A + \left.\begin{array}{l} A\alpha \\ +2B \end{array}\right] z + \left.\begin{array}{l} A\beta \\ +2B\alpha \\ +3C \end{array}\right\} z^2$$

$$\left.\begin{array}{l} +A\gamma \\ +2B\beta \\ +3C\alpha \\ +4D \end{array}\right\} z^3 \quad \left.\begin{array}{l} +A\delta \\ +2B\gamma \\ +3C\beta \\ +4D\alpha \\ +5E \end{array}\right\} z^4 \ldots$$

$$\text{IIII)}\ \frac{mwdy}{dz} = m\alpha + \left.\begin{array}{l} 2m\beta \\ +mA\alpha \end{array}\right] z + \left.\begin{array}{l} 3m\gamma \\ +2mA\beta \\ +mB\alpha \end{array}\right\} z^2$$

$$\left.\begin{array}{l} +4m\delta \\ +3mA\gamma \\ +2mB\beta \\ +mC\alpha \end{array}\right\} z^3 \quad \left.\begin{array}{l} +5m\varepsilon \\ +4mA\delta \\ +3mB\gamma \\ +2mC\beta \\ +mD\alpha \end{array}\right\} z^4 \ldots$$

V) Wenn man nun die Coefficienten bey einerley Potenzen von z; (coefficientes terminorum homogeneorum) in III; IIII; gleich ſetzt, welches ſo viel iſt, als ob man alles auf eine Seite gebracht hätte, und nach Alg. 624. verführe; ſo erhält man $A = m\alpha$; $B = \frac{(m-1) A\alpha + 2m\beta}{2}$; $C = ((m-2) B\alpha + (2m-1) A\beta + 3m\gamma) : 3$; $D = ((m-3) C\alpha + (2m-2) B\beta + (3m-1) A\gamma + 4m\delta) : 4$; $E = ((m-4) D\alpha + (2m-3) C\beta + (3m-2) B\gamma + (4m-1) A\delta + 5m\varepsilon) : 5$

VI) Wenn man das Geſetz, daß dieſe Coefficienten beobachten, bemerkt, ſo wird man folgenden Ausdruck für den nächſten daraus ſchlieſſen:

VII) $F = ((m-5) E\alpha + (2m-4) D\beta + (3m-3) C\gamma + (4m-2) B\delta + (5m-1) A\varepsilon + 6m\zeta) : 5$.

VIII. Dieſe Vermuthung zu rechtfertigen, und eine allgemeine Formel bequem herauszubringen; will ich jeden Coefficienten der Reihe $1 + y$ mit λ, und mit Beyfügung ſeiner Zahl bezeichnen; ſo daß der erſte $\alpha = \lambda 1$; der zweyte $\beta = \lambda 2$; und ſo der n te und n—1 te, die zu z^n und z^{n-1} gehören, λn und $\lambda (n-1)$ heiſſen. Eben ſo bedeute L mit beygefügter Zahl, jeden Coefficienten der Reihe w; ſo daß $L1 = A$; $L2 = B$; und Ln und $L(n-1)$ zu z^n und z^{n-1} in dieſer Rei-

he

he gehören. So laſſen ſich die Reihen folgendergeſtalt ausdrücken:

$$1+y=1+\lambda 1.\ z\ldots+\lambda r.\ z^r\ldots+\lambda n.\ z^n\ldots$$

$$w=1+L1.\ z\ldots+Lr.\ z^r\ldots+Ln.\ z^n\ldots$$

$$\frac{dy}{dz}=\lambda 1\ldots\ldots+r.\ \lambda r.\ z^{r-1}\ldots+n.\ \lambda n.\ z^{n-1}$$

$$\frac{dw}{dz}=L1\ldots+r.\ Lr.\ z^{r-1}\ldots+n.\ Ln.\ z^{n-1}\ldots$$

VIIII) Man ſuche den Coefficienten des Products $(1+y).\ dw:dz$ zu z^n

die Glieder der Reihe $dw:dz$; in denen z auf die Potenz n; $n-1$; .... $n-r$; .... 0; erhoben iſt, jedes nach der Ordnung in eines der Glieder der Reihe $1+y$ multiplicirt, wo ſich z auf die Potenz 0; 1; ...r; ... n erhoben befindet, geben Producte, die z^n enthalten. Der geſuchte Coefficient iſt alſo die Summe der Coefficienten dieſer einzelnen Producte. Er wird alſo $1.\ L1.\ \lambda n+2.\ L2.\ \lambda(n-1)+3.\ L3.\ \lambda(n-2)\ldots+(n-r+1).\ L(n-r+1).\ \lambda r\ldots\ldots+n.\ Ln.\ \lambda 1+(n+1)\ L(n+1).\ 1$

X) Man ſuche den Coefficienten des Products $w\,dy:dz$ zu z^n

Er beſtehet eben wie in VIIII; aus den Producten jedes Coefficienten der Reihe $dy:dz$; die zu den Potenzen n; $n-1$; ...$n-r$; .. 0 gehören, in einen

einen der Coefficienten der Reihe w; die zu den Potenzen 0; 1; . . . r; . . . . n gehören. Er iſt alſo

$(n+1)\lambda(n+1).\ 1 + n.\ \lambda n.\ L1 + (n-1).\ \lambda(n-1).\ L2 \ldots + r.\ \lambda r.\ L(n-r-1) \ldots\ldots + 2.\ \lambda 2.\ L(n-1) + \lambda 1.\ Ln.$

XI) Um alſo das Verfahren (V) hier anzubringen, multiplicire man jedes Glied des Coefficien. (X) mit m; ſetze, was herauskömmt, dem Coefficienten (VIIII) gleich, und ſuche aus dieſer Gleichung L (n + 1). Man wird dafür folgenden Ausdruck finden:

$$(n+1)L(n+1)=(m-n).Ln.\lambda 1+(2m-n+1)L(n-1.)\lambda 2 \ldots + (m.r-n+r-1).L(n-r+1).\lambda r \ldots \ldots + (m.n-1).L1.\lambda n + m.(n+1).\lambda(n+1)$$

XII) Wenn man hier, was zur rechten Hand des Gleichheitszeichens ſteht, mit n + 1 dividirt, ſo erhält man einen allgemeinen Ausdruck für L (n − 1) durch die gleich anfangs gegebenen Coefficienten der Reihe 1 + y und durch die ſchon gefundenen vorhergehenden der Reihe w; wo ſich denn zeiget, daß das (VI) beobachtete Geſetz allgemein iſt.

XIII) Dieſer allgemeine Coefficient (XII) deſſen Nenner n + 1 iſt, hat zum allgemeinen Gliede des Zählers $(mr-n+r-1).L(n-r+1).\lambda r$, welches alle Glieder des Zählers giebt, wenn man nach der Ordnung 1; 2; . . . . n + 1 ſtatt r ſetzt.

r ſetzt. Hier iſt zu bemerken, daß Lo = 1; weil L1 = A und alſo der Coefficient der Reihe w welcher vor A vornhergeht, Lo ſeyn muß. Die aber vor dieſem hergehen L—1; L—2; u. ſ. w. ſind alle = 0.

XIIII. Wenn man ſtatt A; B; u. ſ. w. ihre Werthe ſetzt, ſo findet ſich

$$B = \frac{m.(m-1)}{1.\ 2.}\alpha\alpha + m\beta$$

$$C = \frac{m.(m-1).(m-2)}{1.\ 2.\ 3}\alpha^3$$
$$+ m.(m-1)\alpha\beta + m\gamma.$$

u. ſ. w. die folgenden Coefficienten aber werden immer mehr und mehr zuſammengeſetzt, wie man beym Wolf El. Analyſ. fin. §. 102. ſehen kann; und ich zweifele, ob ſich das Geſetz des Fortganges der auf dieſe Art ausgedrückten Coefficienten mit gehöriger Schärfe würde erweiſen laſſen. Selbſt zum Gebrauche iſt mein Ausdruck bequemer, weil man doch einen Coefficienten nach dem andern berechnet, und es alſo am bequemſten iſt, wenn die folgenden nicht ganz von neuem, ſondern vermittelſt der ſchon berechneten vorhergehenden gefunden werden.

XV) Die allgemeinſte Reihe $\pi u^e + \alpha u^{e+w} + \beta u^{e+2w} \ldots$ läßt ſich auf den Ausdruck πu^e
$1 +$

$(1 + \frac{\alpha}{\pi} u + \frac{\beta}{\pi} u^{2w} \ldots)$ bringen, welcher ſich wenn $u^w = z$ geſetzt wird, in $\pi z^{e:w} (1 + \frac{\alpha}{\pi} z + \frac{\beta}{\pi} z^2 \ldots)$ verwandelt. Es iſt klar, daß man nur die Potenz m des letzten Factors der unendlichen Reihe, ſuchen, jedes Glied derſelben durch dieſe Potenz des erſten Factors multipliciren, und alsdenn ſtatt z ſeinen Werth u^w ſetzen darf. Daß alſo das Verfahren gegenwärtiger Aufgabe, zulänglich iſt, die Potenz jeder unendlichen Reihe zu finden.

57. Anm. Jac. Bernoulli Op. T. II. n. 103. art. 1. lehret zwo Arten die Potenz einer unendlichen Reihe zu finden. Eine davon, welche die Integralrechnung erfodert, zieht er der andern vor, weil ſie das Geſetz der Coefficienten beſſer vor Augen ſtellte, ſie ſcheint mir aber nicht ſo geſchickt dergleichen Geſetz allgemein zu erweiſen, als mein Verfahren. Die Erinnerung, die ich (56. XV.) gemacht habe, findet ſich auch in Cramers Anmerkungen bey dieſer Stelle Bernoullis, weil Bernoulli geglaubt hatte, die Reihe $1 + \alpha z \ldots$ ſey nicht allgemein genug. Zuvor hatte ſchon de Moivre Trans. n. 230. und aus ihm Colſon in ſ. Comment. über Newtons Method of Fluxions p. 312. dieſe Aufgabe aufgelöſet, aber ſo, daß ſich das allgemeine Geſetz der Coefficienten nicht ſo leicht erweiſen läßt wie aus meinem Verfahren. Des Moivre Reihe findet ſich beym Wolf (56. XIIII.) weiter fortgeführt als beym Colſon.

Das

Das Geſetz, das ich hier angewieſen habe, findet ſich auch beym Euler Inſt. Calc. diff. P. II. §. 202.

58. Zuſ. Aus 56. folgt die Potenz jeder endlichen Reihe. So iſt für eine dreytheilichte Wurzel $o = \gamma = \delta = \varepsilon$ u. ſ. w. alſo der allgemeine Coefficient von $(1 + \alpha z + \beta z^2)^m$ aus 56; XII.

$$L(n+1) = (m-n).\ Ln.\ \alpha + (2m-n+1).\ L(n-1)\beta + (3m-n+2).\ L(n-2).\ \gamma) : (n+1)$$

Hier iſt für den erſten Coefficienten $n = 0$ alſo $A = m.\ \alpha$ (56. XIII.). Für den zweyten und dritten $n = 1$; $= 2$; alſo $B = (m-1)A.\ \alpha + 2m\beta) : 2$; $C = (m-2).\ B.\ \alpha + (2m-1).A.\beta) : 3$. u. ſ. w. wie in 56. V. wenn dorten $\gamma = \delta = \varepsilon = 0$ geſetzt werden.

59. Zuſ. Auch kann man die Reihe unendlich laſſen, aber die Potenz beſtimmen. So iſt für $m = 2$; der allgemeine Coefficient (56. XI.) des Quadrates einer unendlichen Reihe

$$(2-n).\ Ln.\ \lambda 1 + (5-n).\ L(n-1).\ \lambda 2 + (8-n).\ L(n-2).\ \lambda 3 \ldots + (3r-1n).\ L(n-r+1).\ \lambda r \ldots + 2.\ (n+1).\ \lambda(n+1) : (n+1).$$

60. Exempel. Für eine dreytheilichte Wurzel wird dieſer Ausdruck (59) $(2-n).\ Ln.\ \alpha + (5-n).\ L(n-1).\ \beta) : (n+1)$. Setzt man hier nach und nach 0; 1; 2; 3; 4; 5; ſtatt n; ſo bekömmt man $A = 2\alpha$; $B = \dfrac{A\alpha + 4\beta}{2} = \alpha\alpha + 2\beta$; $C = \dfrac{3A\beta}{3}$ $= 2\alpha\beta$; $D = \dfrac{-C\alpha + 2B\beta}{4} = \beta\beta$; $E = \dfrac{-}{2D\alpha}$

$\frac{2D\alpha+C\beta}{5}=0$; $6F=-3E.\alpha+0.D.\beta=0$; für n > 5 verſchwinden alſo Ln und L (n+1) daher das Quadrat einer dreytheilichten Wurzel auf dieſe Art wie durch die gewöhnliche Rechnung gefunden wird.

61. Zuſ. Dieſes Exempel zeigt, wie die Reihe w (56.). für eine Wurzel von einer beſtimmten Menge von Theilen abbricht, wenn man ſtatt m eine ganze Zahl ſetzt, weil alsdenn die Coefficienten (59) verſchwinden.

62. Zuſ. Es erhellt aber, daß m in 56 alle Werthe haben darf, die es in 46 haben durfte, weil die Auflöſung beyder Aufgaben völlig auf einerley Gründen beruhet. Ich habe die in (56) einem hier 1759. herausgegebenen Programma: infinitinomii ad potentiam indefinitam eleuati formula, bekannt gemacht.

Beſtimmung der Tangenten der krummen Linien; durch die Differentialrechnung.

63. Lehrſatz. Wenn LMN 1 Fig. ein zuſammenhängender Bogen einer krummen Linie iſt, da ML; MN; Sehnen zweener Bogen ſind, die jenen ganzen ausmachen, und von M auf beyden Seiten genommen werden, ſo nähert ſich dieſer Sehnen Winkel LMN; zween

zween Rechten unendlich, indem ſich die Puncte L; N; beyde zugleich, oder auch einer allein dem Puncte M unendlich nähern; das iſt: Man kann allemahl einen und den andern beyder Bogen ML; MN; oder auch, wenn man einen ungeändert läßt, nur den andern, ſo klein nehmen, daß der Winkel LMN weniger als um jeden gegebenen Unterſchied von 2 R unterſchieden iſt.

Bew. Dieß iſt weiter nichts als das Geſetz der Stetigkeit Geom. 6. Erkl. Anm. Ein Punct nähmlich, der den Weg LMN beſchreibt, muß in M wenn er nach N zugeht, ſeinen Weg ſo ändern, daß der Weg, auf dem er nach N zu geht, von dem, auf welchem er von L nach M kam, weniger als um jeden gegebenen Unterſchied abweicht. Nimmt man innerhalb des Bogens LM eine Stelle und zieht von ſolcher eine gerade Linie nach M; ſo unterſcheidet ſich der wahre Weg, den der Punct aus dieſer Stelle nach M nimmt, von dieſer geraden Linie deſto weniger, je näher die Stelle bey M iſt, und der Unterſchied wird unendlich vermindert, wenn die Stelle dem Orte M unendlich nahe rückt. So verhält es ſich auch mit einer Stelle in den Bogen MN; die geraden Linien alſo von M nach beyden Stellen müſſen von einer einzigen geraden Linie unendlich wenig unterſchieden werden, oder ihr Winkel muß 2 R unendlich nahe kommen.

64. Zuſ. Weil die gerade Linie von einer ſolchen Stelle nach M, dem wahren Wege des Punctes, d. i. dem Bogen zwiſchen der Stelle und M unendlich nahe kömmt, ſo kann man beyde für eines halten. In dieſem Verſtande ſtellt man ſich vor, die krumme Linie beſtehe aus unendlich kleinen geraden Linien als Elementen (G. 41. S. 5. 3.)

65. Zuſ. Von zween Bogen verſchiedener Schenkel einer krummen Linie, die einander in M ſchneiden 3. Fig. gilt 63 nicht. Ein Exempel geben Alg. 483; und daſelbſt III. Taf. 22. Fig. die beyden Bogen $\alpha\delta$ C; α D C; welche den Knoten der Muſchellinie machen, wenn das dortige C hier den Punct M 3 Fig. bedeutet.

66. Lehrſ. Der ganze Bogen LMN, liege auf einer Seite der geraden Linie TMV 1 Fig. die ihn alſo in M berührt, (Alg. 449). Ich ſage, man könne durch M, keine gerade Linie auf der Seite der Linie MV auf welcher N liegt, ziehen, die den Bogen MN nicht ſchneide; d. i. man könne keine gerade Linie zwiſchen der Tangente und dem Bogen MN ziehen.

Bew. Geſetzt MH 3 Fig. ſey eine gerade Linie zwiſchen der Tangente und dem Bogen MN; So fällt MT nothwendig zwiſchen ihre Verlängerung Mh und den Bogen MN; So nahe man

alſo

alſo auch die Stellen N; L; dem Orte M rücken läßt, ſo können die Sehnen ML; MN; doch nie einen gröſſern Winkel mit einander machen als der Winkel TMH iſt, und folglich kann ihr Winkel ſich 2R nicht unendlich nähern, wieder 63.

67. Zuſ. Wenn LMN ein zuſammenhängender Bogen einer krummen Linie ſeyn ſoll, ſo kann er nicht ganz auf einer Seite der geraden Linie TMV; und zugleich auch auf einer Seite der geraden Linie hMH liegen. Das iſt: Ein Bogen einer krummen Linie hat an einem Puncte nicht mehr als eine Tangente. Zweene Bogen, die einander in einem Puncte ſchneiden, können jeder an dieſem Puncte ſeine eigene Tangente haben. (65) Dergleichen wären LM; MN; 3 Fig. ihre Tangenten, MT; MH;

68. Zuſ. Der Punct N 1 F. kann dem Puncte M allemahl ſo nahe rücken, daß der Winkel VMN kleiner wird als jeder gegebene Winkel; oder: wenn N unendlich nahe an M rückt, ſo wird VMN unendlich klein. Denn jede gerade Linie durch den Berührungspunct, die einen endlichen Winkel mit der Tangente macht, ſchneidet die krumme Linie (66) alſo kann der Punct N allemahl ſo nahe an M rücken, daß er zwiſchen die nur genannte gerade Linie und die Tangente fällt; d. i. daß die Sehne MN mit der Tangente einen kleinern Winkel macht als die nur genannte gerade Linie, d. i. einen kleinern Winkel als jeder endliche Winkel iſt.

Weil nun der Bogen MN zwiſchen die Tangente und die Sehne fällt; der Winkel der Tangente und Sehne aber unendlich abnimmt, ſo nähern ſich Sehne, Bogen und Tangente, unendlich einem Zuſtande, da ſie nicht mehr zu unterſcheiden ſind; einem Zuſtande, da das Element des Bogens, oder ſein unendlich kleiner Theil, von den beyden geraden Linien, der Sehne und der Tangente, nicht mehr zu unterſcheiden iſt. Man ſieht alſo das Element des Bogens als einen geraden, unendlich kleinen Theil der Tangente oder die Tangente als des Elements Verlängerung an; dieſer Ausdruck will der Schärfe nach ſagen: der Bogen kann durch beſtändige Verminderung ſo weit gebracht werden, daß er ſich in der Lage und in der Länge, von ſeiner Sehne, und von einem der Sehne gleichen Stücke der Tangente, weniger als jede angebliche Gröſſe beträgt, unterſcheidet. Siehe Geom. 41. S. 5. Z. und Anm.

69. **Erkl.** Ein Bogen LMN einer krummen Linie 1 F. iſt nach einer Gegend O zu **hohl** (concauus) wenn die Sehnen LM; MN; ſo vielmahl man auch drey Puncte innerhalb dieſes Bogens nehmen kann, allemahl nach dieſer Gegend zu Winkel machen, die weniger als 2 R betragen. Nach der andern Seite zu, wie nach O 4 Fig; iſt er erhaben (conuexus).

70. **Zuſ.** Der Bogen fällt zwiſchen die Tangente und die Gegend, nach der er hohl iſt, 1 F.

aber

aber die Tangente fällt zwiſchen ihn und die Gegend, nach der er erhoben iſt. 4. F.

71. Zuſ. Wenn VNQ 1 F. NVQ 4. F. der Ordinate MP und MS der Abſciſſe AP; parallel iſt, ſo iſt $MNS = MVS \pm VMN$ das obere Zeichen für den hohlen Bogen, das untere für den erhabenen.

72. Zuſ. MNS nähert ſich dem Winkel MVS unendlich (68)

73. Zuſ. VS : MS = ſin VMS : ſin MVS (Trig. 10 S.
MS : NS = ſin MNS . ſin MNS

VS : NS = ſin VMS . ſin MNS : ſin NMS . ſin MVS (Arithm. V. 50.).

In der letzten Verhältniß nun nähern ſich die beyden erſten Factoren des erſten und zweyten Gliedes einander unendlich (68) und eben das thun die beyden letzten; (72) alſo nähert ſich die Verhältniß VS : NS unendlich der Verhältniß der Gleichheit.

74. Zuſ. VN wird alſo in Vergleichung mit NS immer kleiner und kleiner, ſo daß es in Vergleichung damit, weniger als jede angebliche Gröſſe (1) ſo klein ſie auch iſt, in Vergleichung mit einer andern angeblichen beträgt; oder VN verſchwindet gegen NS (5).

75. Zuſ. Die Verhältniß VS : SM nähert ſich unendlich der Verhältniß NS : SM.

76. Erkl. Wenn die verlängerte Tangente, der Abſciſſenlinie in T begegnet, ſo heißt PT die Subtangente.

77. Aufg. Die Verhältniß der Ordinate zur Subtangente, MP: PT zu finden.

Aufl. MP: PT = VS: SM (71) wie groß oder wie klein auch die Entfernung zwiſchen VQ und MP iſt, wenn man aber die erſte Linie ſich der zweyten unendlich nähern läßt, ſo nähert ſich die Verhältniß VS: SM unendlich der Verhältniß NS: SM (75). Folglich iſt MP: PT der Verhältniß NS: SM unter der Bedingung gleich, daß N unendlich nahe bey M iſt. Da iſt aber NS: SM die Verhältniß der Differentialen der Ordinate und Abſciſſe (14) heißt alſo PM = y; AP = x; ſo iſt $PT = \frac{y.\,dx}{dy}$ welches man in endlichen Gröſſen findet, wenn man nach den Regeln der Differentialrechnung den Quotienten $\frac{dx}{dy}$ ſucht. Daraus findet man auch A T = TP — AP

78. Zuſ. Wenn Mm das Element der krummen Linie (68) bedeutet, ſo iſt mR = dy; MR = dx da denn die Aehnlichkeit der Dreyecke MmR; TMP; eben das giebt. Das Dreyeck MmR welches vom Barrow (ſ. 90.) ſchon betrachtet worden, hat Leibnitz triangulum characteriſticum genannt,

nannt, weil ſich dadurch die krummen Linien unterſcheiden laſſen.

79. Wenn N ſich M unendlich nähert, alſo NS unendlich klein wird, ſo wird VN in Vergleichung mit einer unendlich kleinen Gröſſe unendlich klein, (74) oder ein Unendlich kleines der zweyten Ordnung, wenn NS eines der erſten iſt; oder wenn NS $= \frac{1}{\infty}$ ſo iſt VN $= \frac{1}{\infty^2}$ (11). Die Meinung iſt: indem VN und NS zugleich abnehmen ſo wird VN zu einer Zeit kleiner als jede angebliche Gröſſe, da ſich die Gröſſe von NS noch angeben läßt.

80. Zuſ. In den Figuren, auf welche ſich die Rechnung 77 gründet, iſt angenommen, daß Ordinaten und Abſciſſen von M nach N zu, zugleich wachſen, auch von N nach M zu zugleich abnehmen, oder daß ihre Differentiale beyde zugleich bejaht oder verneint ſind, (23) folglich ihr Quotient bejaht iſt, und alſo auch die Subtangente bejaht iſt, wenn die Ordinate bejaht angenommen wird. Zugleich aber erhellt aus eben den Figuren, daß die Subtangente von P nach dem Anfange der Abſciſſen zu fällt, oder T und A auf einer Seite der Ordinate liegen.

81. Zuſ. Nähme aber die Ordinate ab, indem die Abſciſſe zunimmt, wie wenn B der Anfang der Abſciſſen wäre, ſo wäre der Quotient

ihrer Differentiale verneint, und alſo auch die Subtangente bey einer bejahten Ordinate verneint. Da lägen aber T und B auf verſchiedenen Seiten der Ordinate.

82. Zuſ. Bey einer verneinten Ordinate wäre die Subtangente in 80 verneint, in 81 bejaht.

83. Zuſ. Die Subtangente und der Anfang der Abſciſſen, liegen auf einer oder auf verſchiedenen Seiten der Ordinate, nachdem Subtangente und Ordinate einerley oder verſchiedene Zeichen haben.

Exempel zu 77.

84. Aufg. Die Subtangente der Parabel (Alg. 349.) zu finden.

Aufl. Aus der Gleichung für die Parabel $yy = bx$ wird die Differentialgleichung $2ydy = bdx$ (18; 24) oder $\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{b}$; folglich $PT = \frac{2yy}{b} = \frac{2bx}{b} = 2x$ oder die Subtangente iſt der doppelten Abſciſſe der Parabel gleich, wenn die Abſciſſen vom Scheitel gerechnet werden.

Verzeichnung. An den gegebenen Punct der Parabel M; eine Tangente zu ziehen, ziehe man die Ordinate MP; und nehme AT vom Scheitel rückwärts (83) der Abſciſſe AP gleich, ſo iſt TM die Tangente.

85. Aufg.

85. Aufg. Die Subtangente für die Ellipſe (362) und Hyperbel (389) zu finden.

Aufl. Die Gleichung $yy = bx \mp \frac{bxx}{a}$ wo das obere Zeichen für die Ellipſe, das untere für die Hyperbel gilt, giebt $2ydy = \left(b \mp \frac{2bx}{a}\right) dx$ oder $\frac{dx}{dy} = \frac{2ay}{b.(a \mp 2x)}$ folglich $\frac{y.\,dx}{dy}$ oder PT $= \frac{2x.\,(a \mp x)}{a \mp 2x}$ Alſo PT — x oder $\frac{AT = ax}{a \mp 2x.}$

Verzeichnung. An den gegebenen Punct M der Ellipſe oder Hyperbel eine Tangente zu ziehen, ziehe man ſeine Ordinate, und ſuche die vierte Proportionallinie zu $a \mp 2x$; x; a; welche vom Scheitel hinausgenommen den Punct T giebt.

Für die Ellipſe iſt der Zähler der Subtangente beſtändig bejaht, (Alg. 375.) der Nenner aber bejaht oder verneint, nachdem die Abſciſſe vom Scheitel an gerechnet kleiner oder gröſſer als die halbe Axe iſt. In jenem Falle alſo liegen Subtangente und Anfang der Abſciſſen auf einer Seite der Ordinate, in dieſem auf verſchiedenen, wie die Figur der Ellipſe ſo gleich zeigt. Für die Hyperbel gäbe es noch mehr Fälle zu unterſcheiden, weil x ohne Ende wachſen, und auch verneint werden kann, jeder aber wird ſich aus der Figur entſcheiden und mit 83 vergleichen laſſen.

86. Zuſ. Für $x = \frac{1}{2} a$ iſt bey der Ellipſe $\frac{dy}{dx}$ oder $b. \frac{a - 2x}{ay} = \frac{b.o}{ay} = o$. Alſo verſchwindet hier dy in Vergleichung mit dx; das heißt; um den Mittelpunt herum nimmt die Ordinate unendlich weniger zu als die Abſciſſe. Folglich wird daſelbſt der Winkel mMR (78) unendlich klein; oder die Tangente mMT der Abſciſſenlinie parallel. Damit ſtimmt überein, daß in dieſem Falle $PT = a. \frac{\frac{1}{2} a}{o}$ unendlich wird. Eben ſo wird $\frac{dx}{dy} = \frac{ay}{b.o}$ unendlich, welches weiter nichts geſagt iſt, als daß der umgekehrte Bruch $\frac{dy}{dx}$ verſchwindet.

87. Zuſ. Ueberhaupt, wenn für eine gewiſſe Abſciſſe $\frac{dy}{dx} = o$ wird, ſo iſt die Tangente der Abſciſſenlinie parallel, und folglich ſenkrecht auf eine Linie, die auf die Abſciſſenlinie ſenkrecht iſt, wie AD 1 Fig. Hieraus ſieht man, was es bedeutet, wenn $\frac{dy}{dx} = \infty$; unendlich wird. Als-

denn

denn iſt $\frac{dx}{dy} = o$ oder die Tangente iſt der Linie AD parallel, welche mit dem Ordinaten y parallel geht, und alſo auf die Linie der Abſciſſen x ſenkrecht, wenn APM ein rechter Winkel iſt.

88. Zuſ. Die Regeln 85, verwandeln ſich nach 10 in 84 wenn a = ∞ geſetzt wird; wegen Alg. 384.

89. Zuſ. Dieſe Vorſchriften gelten auch, wenn die Abſciſſenlinie gleich nicht die Axe, ſondern nur ein Durchmeſſer iſt. Alg. 453.

90. Anm. Die Regel 77 kömmt völlig auf eines mit derjenigen heraus, die Barrow Lect. Geometr. X. am Ende als einen Anhang nach art. XIIII. gegeben hat, nur daß er ſich anderer Ausdrückungen bedient. Man kann nähmlich AF = y; Abſciſſe und FM = x Ordinate nennen. Nun hat Newton, Barrows als ſeines Lehrers Schriften gewiß geleſen, und Leibnitz vermuthlich auch. Ferner ſind die erſten Anwendungen der Fluxionen und der Differentialrechnung auf die Ziehung der Tangenten gemacht worden. Dieſe Erinnerung gehört zu 44. Jac. Bernoulli hat ſie ſchon in ſ. erſten Specimine calculi differentialis Act. Erud. Lipſ. Ian 1691. gemacht; und vermuthlich um Leibnitzen nicht zu mißfallen, am Ende des zweyten Speciminis (daſ. Iun. 1691.) etwas gemildert. S. Op. Iac. Bern. p. 431. und 453.

91. Erkl. Wenn MO auf die Tangente ſenkrecht ſteht, und die Abſciſſenlinie in O ſchneidet,

ſo

ſo heißt ſie eine Normallinie und PO die Subnormallinie.

92. Zuſ. Wenn die Ordinaten mit den Abſciſſen rechte Winkel machen, ſo iſt die Subnormallinie $PO = \frac{PM^2}{PT} = \frac{yy.\,dy}{ydx}$ (77) $= \frac{ydy}{dx}$ wie auch aus der Aehnlichkeit der Dreyecke MmR; MOP erhellt.

93. Zuſ. Alſo für die Parabel (84) $= y.\frac{b}{2y} = \frac{1}{2}\,b$ oder unveränderlich, und allemahl dem halben Parameter gleich.

94. Zuſ. Für die Ellipſe und Hyperbel (85) $= b.\frac{(a \mp 2x)}{2a}$

95. Anm. Wenn in der Ellipſe $x = \frac{1}{2}a$; ſo wird die Subnormallinie = o wegen (87). Iſt b = a, daß die Ellipſe ſich in einen Kreis verwandelt, ſo wird die Subnormallinie des Kreiſes $= \frac{1}{2}a - x =$ OP 1 Fig. wenn LMN der Bogen eines Kreiſes um den Mittelpunct O wäre, weil da alle Normallinien durch den Mittelpunct gehen.

96. Zuſ. Mm, mn; 5. Fig. ſind zweene nach einander folgende gleiche Bogen eines Kreiſes um den Mittelpunct O; Sie mögen anfangs beyde

endlich

endlich ſeyn. MS ſey die Tangente bey M. Der Winkel MOm = mOn heiſſe u; die Sehne Mm ſey in W verlängert, und mn die andere Sehne; So iſt OMS = R; OMm = OmM = Omn = R — $\frac{1}{2}$ u (G. 13. S. 5. Z.) folglich Wmn = WmO — Omn = mMO + u — mMO = u. Iſt OmS = R ſo ſchneiden beyde Tangenten einander unter dem Winkel VSm = u, wenn ſich nun die Sehnen Mm; mn; ihren Bogen unendlich nähern, und in Elemente des Kreiſes verwandeln (G. 41. S. 2. Z.) ſo wird der Winkel u unendlich klein, und der Satz wird ſo ausgedrückt: Wenn der Kreis in gleiche Elemente eingetheilet wird, ſo macht die Verlängerung jedes Elementes mit dem folgenden einen Winkel, welcher ſo groß iſt als der Winkel, der jedem Elemente am Mittelpuncte zugehört. Der Winkel eines Elements aber mit dem Halbmeſſer iſt von einem rechten, um die Hälfte des nur genannten Winkels unterſchieden. Wenn man die unendlich kleinen Veränderungen, zu- oder abnehmender Winkel ſucht, ſo muß man OMm = R — $\frac{1}{2}$ u annehmen; Sonſt aber kann OMm = R geſetzt werden, von dem es unendlich wenig unterſchieden iſt.

97. Aufg. Eine Tangente der Muſchellinie Alg. 479. zu ziehen.

Aufl. In der dortigen Gleichung (b + x) √(aa — xx) = yx ſetze man aa — xx = zz alſo

$$\frac{-xdx}{z}$$

$\frac{-xdx}{z} = dz$; ferner iſt $(b+x)z = yx$ alſo

$dz = \frac{(y-z)\,dx + xdy}{b+x}$ beyde Werthe von dz einander gleich geſetzt, geben nach gehöriger Rechnung $dx : dy = x : z - y - \frac{bx}{z} - \frac{x^2}{z}$

Wenn man nun Alg. III. T. 21. Fig. die Abſciſſen auf EF nimmt, ſo heiſſen ſie y; und die Ordinaten x; Heißt alſo die Subtangente die Entfernung zwiſchen den beyden Puncten, R und dem, wo die Tangente der Abſciſſenlinie begegnet, ſo verhält ſich $dx : dy = x$: Subtangente, und ſie iſt alſo $= z - y - \frac{bx}{z} - \frac{x^2}{z}$. Weil $z - y = QR - ER$; ſo wird ſie wenigſtens in dem obern Theile der Muſchellinie allemahl abwärts vom Anfange der Abſciſſen fallen, (83) welches auch in dem untern, einige Stellen des Knotens ausgenommen, ſtatt finden wird.

98. Aufg. Wenn F; G; 6 Fig. Brennpuncte einer Ellipſe ſind, in der ſich M befinde die Verhältniß zwiſchen den Winkeln zu finden, welche die Linien FM; GM; mit der Tangente an M machen.

Aufl. MN ſey Anfangs eine endliche Sehne der Ellipſe, weil $FM + MG = FN + NG$ (Alg. 378.)

378.) ſo iſt MG — GN = FN — FM; Wenn man alſo aus den beyden Brennpuncten durch M die Kreisbogen MQ; MS beſchreibt, ſo fallen ſolche auf verſchiedene Seiten der Sehne MN, und es iſt NS = NQ. Ferner iſt TMF = MNF + MFN und GMV = GNV — MGN; Nun laſſe man N ſich M unendlich nähern, daß ſich MN in ein Element der Ellipſe und TV in die Tangente verwandelt, (68) ſo nehmen die Winkel an F unendlich ab, und TMF; GMV; nähern ſich unendlich den Werthen FNM; GNV; zugleich aber nähern ſich die Bogen MQ; MS; unendlich ihren Sehnen, oder ſie verwandeln ſich in ihre Elemente, die man als gerade Linien anſehen kann; Folglich kann man die Figuren MNQ; NMS als geradlinichte Dreyecke anſehen, welche die Seite MN gemein, NQ = NS und bey Q, S, Winkel haben, die von rechten unendlich wenig unterſchieden ſind, (96) und alſo hier für gleich können angenommen werden. Dieſe beyden Dreyecke ſind alſo gleich, folglich iſt MNS = MNQ aber MNS iſt dem Scheitelwinkel VNG gleich; alſo ſind die Winkel VNG; MNQ gleich; und folglich auch die, welche ſich ihnen unendlich nähern, oder GMV = FMT; oder die Linien FM; GM; machen auf beyden Seiten mit der Tangente TV gleiche Winkel.

99. Anm. Alſo iſt nach den Geſetzen der Reflexion allemahl MG oder MF der zurückgeworfene Strahl, nachdem

nachdem FM oder GM der einfallende iſt. Daher heiſſen F; G, Brennpuncte. Wenn man nach Anleitung der Alg. 406; für die Hyperbel eben dergleichen Unterſuchung anſtellt, ſo findet man, daß der Strahl, der aus einem Brennpuncte auf ſie fällt, ſo zurückgeworfen wird, daß er rückwärts verlängert durch den andern geht. Für die Parabel rückt G unendlich weit hinaus, (Alg. 384.) daß MG der Axe parallel wird, (S. 12. S. 12. Z.) daher vereinigt die Parabel alle Strahlen, die mit ihrer Axe parallel einfallen, in F; deswegen ſie beſonders die Brennlinie iſt genannt worden.

100. Anm. Es ſey Alg. I. T. 11. Fig. AQ eine beſtändige Gröſſe $= e$, und MH der Axe parallel alſo $=$ PQ; man nenne dieſes $PQ = z$; ſo iſt, wenn der Parameter $= b$ heißt, aus Alg. 360; $FM = \frac{1}{4}b + x$; das iſt $= \frac{1}{4}b + e - z$ oder $\frac{1}{4}b + e = FM + z = FM + MH$.

Iſt AP > AQ; ſo wird z verneint, und wenn alſo MH linker Hand der Ordinate geht, iſt $FM - MH = \frac{1}{4}b + e$.

So iſt $e = 0$ für AG, und $FM - MG = \frac{1}{4}b$.

101. Anm. Für die Ellipſe hier 6 Fig. ſey $FG =$

$$\surd(a^2 - ba) \text{ (Alg. 376.)} = a - \tfrac{1}{2}b - \frac{bb}{8a} \ldots \quad (46)$$

wo die folgenden Glieder immer höhere und höhere Potenzen von a in den Diviſoren haben werden. Nun ſey A der Scheitel der Ellipſe, und KH ein Kreisbogen um G mit einem willkührlichen Halbmeſſer beſchrieben. So iſt $AF = \frac{a - \surd(aa - ab)}{2}$ (Alg. 376.) alſo

AG =

$AG = \frac{a + \sqrt{(aa-ab)}}{2}$ oder $AK + KG = a - \frac{1}{4} b - \frac{bb}{16a} \ldots$ Ferner $FM + MH + HG = a$; (Alg. 378.) folglich gleiches von gleichem abgezogen $FM + MH - AK = \frac{1}{4} b + \frac{bb}{16a} \ldots$ Hier verſchwinden nun alle Glieder, welche a im Diviſor haben, wenn a unendlich wird, (5) oder G unendlich weit hinaus rückt, alſo kömmt $FM + MH = \frac{1}{4} b + AK$ zugleich aber wird KH eine gerade auf die Axe ſenkrechte Linie (S. 20. S. 2. Z.) und MH der Axe parallel; daß alſo dieſes Verfahren aus dem, was von der Ellipſe erwieſen worden, die Eigenſchaft der Parabel (200) als einen beſondern Fall einer Ellipſe, deren Axe unendlich wird, herleitet; woraus noch deutlicher erhellt, wie die Parabel in 99 unter der Ellipſe 98 enthalten iſt.

102. Aufg. An einen gegebenen Punct P 7 Fig. der Cycloide FPA (Alg. 597.) eine Tangente zu ziehen.

Aufl. Man ziehe PLM mit AE parallel, und an L eine Tangente des Kreiſes LV; der die geſuchte Tangente PV in V begegnet. Man nehme p unendlich nahe bey P und ziehe p l m; auch Ps mit des Kreiſes Elemente L l parallel. Weil PV; LV; die Verlängerungen von pP; lL, ſind, (68) ſo ſind Ps; LV parallel, alſo die Dreyecke pSP; PLV; ähnlich und pS: SP = PL: LV. Es iſt aber $pS = pl - PL = dy$ und $PS = Ll = dx$

(Alg. 610.) folglich $LV = \frac{ydx}{dy}$. Weil nun bey der Radlinie $dy = dx$ (Alg. a. a. O.) ſo iſt $LV = y$. Man nehme alſo auf der Tangente des Kreiſes an L; $LV = LP$, ſo iſt PV die Tangente der Radlinie.

103. Zuſ. Wenn FLE was man will für eine algebraiſche krumme Linie iſt, und die krumme Linie FPA ſo beſtimmt wird, daß LP eine Function des Bogens FL iſt, ſo kann man allezeit die Verhältniß $dx : dy$ und folglich LV finden, und der Linie FPA Tangente ziehen. Es ſey z. E. $FL^2 = a. PL$ ſo iſt $2xdx = ady$ und $LV = ay : 2x$.

Tangenten an Linien zu ziehen, wo die Ordinaten aus einem Puncte gehen.

104. Aufg. In dem Kreiſe AP 8 Fig. um den Mittelpunct C iſt die Lage des Halbmeſſers $CA = r$ gegeben, von welchem der veränderliche Bogen $AP = x$ gerechnet wird. Nun iſt MN ein Bogen einer krummen Linie, deſſen Punct M ſich im Halbmeſſer CP befindet: auch iſt $CM = y$; und eine Gleichung zwiſchen AP und CM gegeben, daß man alſo hier die Bogen AP für die Abſciſſen, und die Linien aus einem Puncte CM für die Ordina-

dinaten annimmt. Man ſucht an M eine Tangente der Linie MN zu ziehen.

Aufl. Auf PC kann man in C ein Perpendikel ſetzen. Dieſes begegne der geſuchten Tangente in T; Man nehme des Bogens AP Element Pp und ziehe Cmp; imgleichen den Bogen MS mit dem Halbmeſſer CM; ſo iſt mM ein Element der krummen linie; MS eines Kreisbogens, der CM zum Halbmeſſer hat, auch mS = dy; und CP : Pp = CM : MS (G. 44. S. 11. Z.) alſo MS = ydx : r und auf Cp und CP ſenkrecht (96). Ferner mMT eine gerade linie (68) und mS : SM = mC : CT. Weil aber m unendlich nahe bey M iſt, ſo iſt die Verhältniß mC : CT der MC : CT unendlich nahe, oder die letzte kann ſtatt jener angenommen werden, alſo iſt $CT = \frac{yydx}{rdy}$.

105. Zuſ. CT und CA liegen auf einerley oder auf verſchiedenen Seiten von CP, nachdem CMm gröſſer oder kleiner als der rechte Winkel CMS (96) iſt, d. i. nachdem Cm gröſſer oder kleiner als CM iſt, d. i. nachdem dx und dy einerley oder verſchiedene Zeichen haben, (23) d. i. nachdem CT bejaht oder verneint iſt. Dieſes zeigt, ob man in dem Perpendikel, das auf CP geſetzt wird, den Punct T nach eben der Seite von CP zu nehmen ſoll, nach welcher A liegt, oder ob man ihn auf die andere Seite zu nehmen ſoll; Eine Erinnerung, die der (83) ähnlich iſt.

106. Exempel. Für die archimediſche Spirallinie (Alg. 580.) iſt $pdy = rdx$ und $CT = \frac{pyy}{rr} = \frac{xy}{r}$. Man muß alſo hier den Bogen AP in eine gerade Linie verwandeln können, wenn man die Tangente ziehen will. Und umgekehrt, wenn man eine Methode hätte, an jeden Punct der Spirallinie eine Tangente zu ziehen, ſo könnte man jedesmahl das zugehörige CT finden, und ſolchergeſtalt den Bogen AP in eine gerade Linie verwandeln. Die Tangente der Spirallinie hängt alſo mit der unbeſtimmten Quadratur des Kreiſes (Alg. 621.) zuſammen.

107. Exempel. Es ſey $PM^2 = a. AP$; oder man ſtelle ſich vor, die Axe einer Parabel werde in den Bogen eines Kreiſes gebeugt, ſo daß ihr Scheitel in A iſt. Weil die Ordinaten mit der Axe rechte Winkel machen, ſo gehen ſie bey dieſer Krümmung alle nach C zu, (95) und die Linie MN heißt die paraboliſche Spirallinie. Alſo iſt $(r-y)^2 = ax$ und $\frac{2.(y-r)}{a} = \frac{dx}{dy}$. Dieſer Quotient iſt verneint, weil MP und AP zugleich wachſen, folglich CM abnimmt, wenn AP wächſt. Auch wird $CT = \frac{2.(y-r).yy}{ar}$ verneint (105). Dieſe krumme Linie hat Jac. Ber-

Bernoulli im erſten Specimine calculi differentialis (90) betrachtet.

Von den Aſymptoten.

108. Lehrſ. Eine Aſymptote (Alg. 408.) kann als eine Tangente an einem unendlich entfernten Puncte angeſehen werden.

Bew. Wenn eine gerade Linie einen Punct mit einem Schenkel einer krummen Linie gemein hat, übrigens aber der Schenkel um dieſen Punct herum auf einer Seite der geraden Linie liegt, ſo iſt ſie des Schenkels Tangente (Alg. 449.) der Bogen der krummen Linie, welcher der Aſymptote zugehört, ſchneidet ſie nicht, und liegt alſo ganz auf einer Seite von ihr; ſeine Puncte nähern ſich ihr unendlich, oder man kann einen unendlich entfernten Punct in ihm anſehen, als wäre er in der Aſymptote; folglich iſt die Aſymptote ſeine Tangente an dieſem Puncte.

109. Zuſ. Sie kann aber den Schenkel, in welchem ſich dieſer Bogen befindet, ſchneiden. (Alg. 451.)

110. Zuſ. Jeder Bogen einer krummen Linie iſt gegen ſeine Tangente erhoben, (69) alſo auch hier der Bogen gegen die Aſymptote.

111. Zuſ. Schneidet ſie aber den Schenkel, (109) oder iſt ſonſt irgendwo hohl gegen ſie, wie bey der Muſchellinie Alg. 477. 478. der obere Theil

zunächſt um den Punct A Alg. III. T. 22. 23. F. ſo giebt es eine Stelle, wo der Bogen nach der Gegend, nach welcher er vorhin hohl war, erhoben wird.

112. Erkl. Eine ſolche Stelle heißt ein Wendungspunct (punctum flexus contrarii).

113. Aufg. Die Aſymptoten einer krummen Linie zu finden.

Aufl. Die Aſymptote berührt die krumme Linie in einem unendlich entfernten Puncte (108.) Es muß alſo von den beyden Coordinaten, welche dieſem Puncte zugehören, eine unendlich werden können; die andere kann vielleicht endlich bleiben, oder gar unendlich klein werden wie bey der Muſchellinie (Alg. 478.) die, welche unendlich werden kann, nehme man für die Abſciſſe an. Können beyde unendlich werden, ſo iſt es gleichgültig, welche man wählen will. Wenn nähmlich AD 1. F. mit PM parallel geht, ſo könnte man eine Parallele mit AP durch M bis an AD ziehen, und das Stück, AF, das ſie von A aus abſchnitte, und das = MP wäre, Abſciſſe, die Parallele ſelbſt aber AP = FM Ordinate nennen.

Nun muß die Aſymptote die angenommene Abſciſſenlinie entweder in einem gegebenen Puncte ſchneiden oder ihr parallel ſeyn.

TM 1. Fig. ſey eine Aſymptote für den erſten Fall; welche von AD, die den Ordinaten parallel

kel iſt, in K geſchnitten werde. So iſt der Punct M unendlich von A entfernt, weil AT endlich iſt. Dieſes AT=TP—AP; iſt alſo der Unterſchied zwiſchen einer unendlichen Subtangente und Abſciſſe. Weil aber unendliche Gröſſen, die um was endliches unterſchieden ſind, als gleich angeſehen werden, (10) ſo würde man nichts finden, wenn man beyde gleich anfangs unendlich ſetzte, und alsdenn von einander abziehen wollte. Daher iſt folgendes Verfahren nöthig. Für ein unbeſtimmtes endliches x, ſuche man $AT = \frac{ydx}{dy}$

$-x$ (77) und $\frac{PM.\ AT}{TP}$ oder $AK = y - \frac{xdy}{dx}$

ſo daß man den Quotienten $\frac{dx}{dy}$ durch endliche Gröſſen ausdruckt. In den gefundenen Ausdruckungen nun ſetze man x unendlich, ſo giebt ſich die Weite AT vom Anfange der Abſciſſen, in welcher die Abſciſſeulinie von der Aſymptote geſchnitten wird, und der Winkel T unter welchem ſolches geſchieht, aus der Verhältniß AT: AK, weil der Ordinatenwinkel A, gegeben iſt.

Wenn dieſes Verfahren für AT einen unendlichen Werth giebt, ſo iſt die Aſymptote der Abſciſſenlinie parallel, und AK ihre Entfernung davon. (Alg. 348.)

114. Exempel. Für die Hyperbel iſt (85) AT $= ax : (a+2x)$ und $AK = y - \frac{bx.\ (a+2x)}{2ay} = \frac{bx}{2y}$ In dieſen Ausdrückungen nun muß man x unendlich ſetzen. Alsdenn wird $AT = \frac{1}{2}a$ (10) und die Verhältniß $x : y$ oder $x : \surd(bx + \frac{bxx}{a}) = x : \surd\frac{bxx}{a}$ (12) $= \surd a : \surd b$; Alſo wird AK $= \frac{\surd ab}{2} = \frac{1}{2}c$ (Alg. 399). Alſo iſt T der Hyperbel Mittelpunct, TA die halbe große, und AK die halbe kleine Axe; alles wie Alg. 408.

Weil AK als eine Quadratwurzel zweene entgegengeſetzte ſonſt gleiche Werthe hat; ſo giebt es auch einen Punct K unter der Axe, durch welchen ebenfalls eine Aſymptote geht. Dieſe zweyte Aſymptote geht ebenfalls durch den Mittelpunct. Man findet ſie nähmlich, wenn man $-x$ unendlich ſetzt: da iſt $AT = a. - (a-2x)$ noch $= \frac{1}{2}a$.

115. Ex. Es ſey 9 F. $AP^2. (PM - AE) = a^3$; alſo, wenn $AE = c$; $AP = x$; $PM = y$; $xx. (y-c) = a^3$ oder $y = \frac{a^3}{xx} + c$; alſo $dy = -2a^3 x^{-3} dx$ und $\frac{dx}{dy} = \frac{-x^3}{2a^3}$; alſo $\frac{ydx}{dy}$

$\frac{ydx}{dy} - x = -\frac{3}{2}x - \frac{cx^3}{2a^3}$ welches für $x = \infty$, unendlich wird. Aber $y - \frac{xdy}{dx} = \frac{3a^3}{x^2} + c$ wird für die unendliche Abſciſſe $= c$. Alſo geht die Aſymptote EV in der Weite c parallel mit der Axe AP.

Nun nenne man $AQ = x$; $= x$; $QM = y$; alſo iſt $x = a^3 : yy + c$; da findet ſich $At = 2c - x$ welches für $x = \infty$ auch unendlich wird; aber $AK = y + xy^3 : 2a^3$ verſchwindet, wenn y verſchwindet, d. i. wenn x unendlich wird. Alſo iſt die Linie AS ſelbſt auch eine Aſymptote. Beydes hätte man kürzer alſobald aus der Gleichung $EO^2 . OM = a^3$ überſehen können, wo OM verſchwindet oder unendlich wird, nachdem EO ∞ oder $= 0$. Jenes giebt die Aſymptote EV, dieſes ES;

Dieſe krumme Linie iſt eine Hyperbel vom dritten Grade. Wenn c bejaht iſt, ſo iſt y allemahl bejaht, und für entgegengeſetzte ſonſt gleiche x einerley. Daher zieht ſie ſich mit vier unendlichen Schenkeln FMG; fmg; an beyden Seiten der Aſymptote ES; aber an einer der Aſymptote vV hin. Ihre Gleichung wird kürzer, wenn man $MO = y - c = z$ heißt, da iſt ſie $z = a^3 : xx$.

116. Anm. Wenn krumme Linien Aſymptoten haben, ſo werden die Gleichungen am einfachſten, wenn man die Coordinaten auf den Aſymptoten nimmt. Die Gleichungen für die Hyperbel Alg. 389; 412; ſind ein Beyſpiel davon. Und für gegenwärtige Hyperbel würde die Gleichung mehr zuſammengeſetzt werden, wenn man eine andere Abſciſſenlinie für ſie nähme.

117. Anm. Für $x = \infty$ iſt (115) $z = \frac{a^3}{\infty^2}$ ein Unendlich kleines der zweyten Ordnung (11) und daher bleibt für dieſen Fall xxz noch der endlichen Gröſſe a^3 gleich, obgleich von den drey Factoren dieſes Productes zweene unendlich ſind (12).

118. Anm. Wenn y nicht auf eine ſo einfache Art, wie in den gebrauchten Exempeln durch x gegeben iſt, ſo kann man zuweilen nicht ſogleich überſehen, ob Producte in denen ſich beyde Coordinaten befinden, endlich oder unendlich ſind, weil, wenn die eine unendlich wird, die andere ein Unendlich groſſes oder kleines von verſchiedener Ordnung werden kann (11), da denn die Sache nach (12) zu beurtheilen wäre. Dieſes macht alſo Schwürigkeit die Werthe von AT und AK für die unendliche Abſciſſe zu finden, weil darinnen dergleichen Producte vorkommen können. Wer die Ordinate durch die Abſciſſe nach dem Newtoniſchen Parallelogramm (Alg. 632.) ſuchen will, kann ſich hier allemahl helfen. Denn wenn die Abſciſſe unendlich werden ſoll, ſo muß er die Ordinate durch eine fallende Reihe ſuchen (Alg. 665. V) deren erſtes Glied alsdenn den Werth von y für das unendliche x giebt. So fände man im Exempel, Alg. 665.

$$y = x - \tfrac{1}{3} a - \frac{aa}{3x} \ldots$$ wo für die unendliche Abſciſſe, $y = x$ ein Unendliches von eben der Ordnung iſt.

119. Anm.

119. Anm. Aber das Newtoniſche Parallelogramm lehret auch ſowohl dieſe Aſymptoten, als auch krumme Linien, denen ſich eine gegebene krumme Linie ohne Ende nähert, (aſymptotos curvilineas) unmittelbar finden, wovon mich aber hier die Abhandlung zu weit führen würde, zumahl da ich überhaupt von den krummen Linien nicht umſtändlich handeln kann. S. Cramer anal. des lignes courbes ch. VIII.

Von den höhern Differentialen.

120. Aufg. Der krummen Linie KLM 10 F. Abſciſſenlinie, iſt in lauter gleiche Theile NO = OP u. ſ. w. von einer willkührlichen Gröſſe = e getheilt. Ihnen ſind Kk; Ll; parallel, alſo Lk; Ml; die Unterſchiede der Ordinaten; Man ſoll eine krumme Linie $\varkappa\lambda\mu$ vorzeichnen, deren Ordinaten ſich für eben die Abſciſſen, wie jener Unterſchiede verhalten, oder wo $O\lambda : P\mu = Lk : Ml$.

Aufl. Man nehme eine willkührliche Länge = a an, und $O\lambda = \frac{a.\,Lk}{e}$; $P\mu = \frac{a.\,Ml}{e}$ u. ſ. w. Weil nähmlich die Ordinaten der Linie KLM für jede Abſciſſe gegeben ſind, ſo findet man auf dieſe Art der Linie $\varkappa\lambda\mu$ Ordinaten für eben die Abſciſſen.

121. Zuſ. Die Reihe der Ordinaten der Linien KLM 10 F. ſtellt die Hauptreihe y Alg. 724. und die Reihe der Ordinaten $\varkappa\lambda\mu$, die Reihe Δ 1; vor.

vor. Nennt man KN = y; OL = y1; PM = y2, ſo iſt Oλ wie y1 — y = 1 Δ 1; Pμ wie y2 — y1 = 2 Δ 1.

122. Zuſ. Wenn LO ſich KN unendlich nähert, oder NO unendlich abnimmt, ſo muß LK verſchwinden: Alſo muß LK einen ſolchen Ausdruck haben, der verſchwindet, wenn e unendlich abnimmt. Alſo muß Lk = P. e ſeyn, wo P eine ſolche Function von x; y; u. e; iſt, die, wenn e bis auf nichts abnimmt, für jede Abſciſſe entweder endlich iſt, oder auch verſchwindet, oder wenn ſie unendlich wird, gleichwohl mit e ein verſchwindendes Product giebt, wie nach (12) möglich iſt.

123. Zuſ. So iſt $\frac{Lk}{e} = P$ und wenn P für ein verſchwindendes e ſich in p verwandelt, da denn $\frac{Lk}{e} = \frac{dy}{dx}$ wird, ſo iſt $\frac{dy}{dx} = p$ welches ordentlich für unbeſtimmte Werthe von y endlich ſeyn wird, aber = o oder unendlich werden kann, nachdem für eine gewiſſe Abſciſſe, der krummen Linie KLM Tangente, der Abſciſſenlinie oder den Ordinaten parallel wird (87).

124. Anm. Den letzten Fall in 121. zu erläutern, dient die krumme Linie Alg. 474. Wenn ihre erſte Ordinate $y = a + \sqrt[3]{a.(a-x)^2}$ heißt, ſo iſt die zweyte, welche von der erſten um die Weite e abſteht, $= a + \sqrt[3]{a.(a-x-e)^2}$. Beyder Unterſchied, hier

hier Lk, zu finden, mache man aus der letztern Cubikwurzel nach (58) eine unendliche Reihe. Man betrachte ſie nähmlich als

$(a.(a-x)^2 - 2a.(a-x)e + a e^2)^{\frac{1}{3}}$ oder als

$\sqrt[3]{\left(a.(a-x)^2.(1 - \frac{2e}{a-x} + \frac{e^2}{(a-x)^2}\right)}$

$= \sqrt[3]{a.(a-x)^2}.\sqrt[3]{\left(1 - \frac{2e}{a-x} + \frac{e^2}{(a-x)^2}\right)}$

wo man für die zweyte Cubikwurzel; in 56; $m = \frac{1}{3}$;

$\alpha = -\frac{2}{a-x}$ $\beta = \frac{1}{(a-x)^2}$; $z = e$; ſetzt.

Dieſes giebt ſelbige $= 1 - \frac{2e}{3.(a-x)} \ldots$ ſo daß die folgenden Glieder alle höhere Potenzen von e enthalten. Wenn man hier nun jedes Glied mit $\sqrt[3]{a.(a-x)^2}$ multiplicirt, ſo kömmt $\sqrt[3]{a.(a-x-e)^2} = \sqrt[3]{a.(a-x)^2} - \frac{2}{3}.\sqrt[3]{\frac{a}{a-x}}.e + \alpha e^2 + \beta e^3 \ldots$ u. ſ. w. wo die griechiſchen Buchſtaben der Coefficienten der höhern Potenzen von e bedeuten, die hier zu berechnen nicht nöthig iſt. Folglich iſt $Lk = e.\left(-\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{a}{a-x}} + \alpha e + \beta e^2 \ldots\right)$ Wo der letzte Factor $= P$ (121) iſt. Wenn man nun hier $\frac{Lk}{e} = P$ ſetzt, ſo wird p oder $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{a-x}{a}}$ dieſes nun wird

für

für $\varkappa = a$ unendlich, wie aus der dort angegebenen Figur der krummen Linie, und hier 87 folgt; demohngeachtet aber wird dy unendlich klein: denn wenn x ſich dem a unendlich nähert, alſo $a - x$ ein Unendlichkleines der erſten Ordnung wird, ſo wird $\frac{a}{a-x}$ ein Unendlichgroßes der erſten Ordnung, aber die Cubikwurzel daraus ein Unendlichgroßes der Ordnung $\frac{1}{3}$; die alſo mit dx einen unendlich kleinen der erſten Ordnung multiplicirt, ein unendlich kleines der Ordnung $\frac{2}{3}$ giebt. (12) Von dieſer Ordnung der Unendlichkleinen iſt alſo dy und daher iſt dx als ein Unendlichkleines der erſten Ordnung in ihm unendlich vielmahl enthalten. Die Wahrheit, welche durch dieſe Ausdrückungen angezeigt wird, iſt folgende: Weil für die Abſciſſe $x = a$; die Tangente der Axe ſenkrecht iſt, ſo wachſen die Ordinaten um dieſen Berührungspunct herum viel ſchneller als die Abſciſſen abnehmen.

125. Zuſ. In 120 kömmt die Beſchaffenheit der Linie $\varkappa\lambda\mu$ auf die Gröſſe von e an. Denn wenn man z. E. die Abſciſſenlinie in Theile jeden ſo groß als OH eintheilte, ſo wäre der beyden nächſten Ordinaten Unterſchied $OL - HI = Li$; und die Linie, deren Ordinaten ſich wie jener Unterſchiede verhalten ſollten, hätte für die Abſciſſe AO, die Ordinate $\frac{a.\, Li}{OH}$ wo $\frac{Li}{OH}$ mit $\frac{Lk}{e}$ nicht allemahl und nothwendig einerley ſeyn wird.

126. Zuſ. Um alſo eine krumme Linie $\varkappa\lambda\mu$ zu finden, da jede Ordinate $O\lambda$; nur durch die Abſciſſe AO; und nicht zugleich durch e beſtimmt wird,

wird, ſetze man der Linie $\varkappa\lambda\mu$ Ordinate $z = ap$ (123). Hier nähmlich iſt p durch x und y gegeben, und wenn alſo auch eine Gleichung für die krumme Linie KLM ſelbſt gegeben iſt, ſo hat man drey Gleichungen, die für die Linie KLM, die zwiſchen p; x; y; und die nur angenommene $z = ap$. Aus dieſen dreyen kann man y und p wegſchaffen, (Alg. 202.) und bekömmt alſo eine Gleichung zwiſchen z und x für $\varkappa\lambda\mu$.

127. Erkl. KLM ſoll die Hauptlinie, und $\varkappa\lambda\mu$ (125) ihre erſte Differentiallinie heiſſen.

128. Zuſ. Wenn zu einer Abſciſſe der Hauptlinie mehr als eine Ordinate gehört, ſo hat $\frac{dy}{dx}$ für eine Abſciſſe mehr als einen Werth, nachdem nähmlich dy den Unterſchied zwiſchen den beyden nächſten Ordinaten in einer oder in der andern Reihe der Ordinaten (Alg. 328) bedeutet. Folglich gehöret zu dieſer Abſciſſe mehr als ein z der Differentiallinie.

129. Ex. Für den Kreis 11 F. ſey $CT = x$; $TM = y$; der Halbmeſſer $CA = 1$ alſo $yy = 1 - xx$, und $ydy = - xdx$ alſo wenn $a = 1$ geſetzt wird; $z = \frac{-x}{\surd(1-xx)}$. Wegen des doppelten Zeichens, das die Wurzelgröſſe haben kann; gehören jeder Abſciſſe zwey entgegengeſetzte ſonſt gleiche z zu und entgegengeſetzten, ſonſt glei-

chen

chen Abſciſſen, gehören gleiche z zu; und es iſt für

$x = 0; \; + \frac{1}{2} \; ; + 1$

$z = \mp 0; \; \mp 1 : \sqrt{3}; \; \mp \infty$

Wenn CT; Ct, entgegengeſetzte ſonſt gleiche Abſciſſen ſind, ſo iſt $\frac{-CT}{TM} = TR$ einem verneinten z; und $\frac{-CT}{Tm} = Tr$ einem bejahten z weil TN eine verneinte Ordinate iſt; ferner $\frac{-Ct}{tN}$ bejaht, weil Ct was Verneintes iſt, alſo = tq und $\frac{-Ct}{tn}$ verneint, alſo = tr; folglich gehören zu den Quadranten KMA; AmL; LnB; BNK die Schenkel CQ; RC; Cq; rC und FAE; fBe ſind Aſymptoten der krummen Linie. Es iſt nähmlich klar, daß für ein wachſendes bejahtes x; die Verhältniß dy: dx entweder die Verhältniß der Differentiale der abnehmenden bejahten Ordinate TM und der zunehmenden Abſciſſe CT; oder der abnehmenden verneinten Ordinate Tm und der zunehmenden Abſciſſe CT iſt; Im erſten Falle iſt $\frac{dy}{dx}$ verneint, im zweyten bejaht. Für ein wachſendes verneintes x; da dx verneint iſt, iſt dy: dx; die Verhältniß der Differentiale entweder einer abnehmenden bejahten Ordinate tN;

oder

oder einer abnehmenden verneinten tn zu dem Differentiale der wachſenden verneinten Abſciſſe, und alſo iſt $\frac{dv}{dx}$ im erſten Falle bejaht, im zweyten verneint; welches zeigt, wenn z, das ſich wie $\frac{dy}{dx}$ verhält, bejaht oder verneint wird.

130. Zuſ. Wie in 122 wird erwieſen, daß $\mu\xi = Q.e$ und Q eine Function von x, z, e, wie dorten P von x, v, e iſt.

131. Zuſ. Alſo iſt $P\mu - O\lambda$ oder $\frac{a.(Ml-Lk)}{e}$ (120) $= Q.e$. Hier wird Q. e und folglich $\frac{a.(Ml-Lk)}{e}$ kleiner als jede angebliche Gröſſe, oder es verſchwindet, wenn e unendlich abnimmt. Das heißt, wenn e unendlich abnimmt, ſo verſchwindet der Unterſchied zwiſchen den Unterſchieden der Ordinaten, der zweyte Unterſchied der Ordinaten (Alg. 724.) in Vergleichung mit dem Unterſchiede der Abſciſſen.

132. Erkl. Dieſen verſchwindenden Unterſchied nennt man das zweyte Differential oder das Differentiodifferential von y.

133. Zuſ. $Q = \frac{\mu\xi}{e} = \frac{a.(ML-Lk)}{ee}$ wie man nun dx für ein verſchwindendes e und dy für das

zugehörige Lk ſchreibt, ſo wird für ein verſchwindendes e der Unterſchied Lk − ML oder das Differentiodifferential $= ddy$ können genennt werden, und wenn für dieſen Fall Q ſich in q verwandelt, ſo iſt $q = \frac{addv}{dx^2}$ wo man ddy als eine Gröſſe, die in Vergleichung mit dx (131) und folglich mit dy (123) unendlich klein iſt, anſehen kann.

134. Zuſ. Für ein verſchwindendes e wird $\frac{\mu\varrho}{e} = \frac{dz}{dx}$ alſo $dz = q\,dx = \frac{addy}{dx}$ (132). Aber $\frac{dy}{dx} = \frac{z}{a}$ (126) alſo $d\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{a} = \frac{ddy}{dx}$ eben wie man es gefunden hätte, wenn man dy als eine veränderliche, dx als eine unveränderliche Gröſſe angeſehen, und $\frac{dy}{dx}$ nach 26; 22; differentiirt hätte.

135. Zuſ. Einen Ausdruck der Differentiale enthält, von neuem zu differentiiren, darf man nur mit den Differentialen auch wie vorhin mit den endlichen Gröſſen verfahren.

136. Zuſ. Wäre KLM die erſte Differentiallinie einer krummen Linie, deren Ordinaten y hieſſen,

hieſſen, alſo KN = z = $\frac{a\,dy}{dx}$ ſo wäre für $\varkappa\lambda\mu$ als ihre Differentiallinie die Ordinate $O\lambda = \frac{a\,dz}{dx}$ $= \frac{a^2 . \, ddy}{dx^2}$.

137. Zuſ. Wäre $KN = \frac{a^2\,ddy}{dx^3}$ ſo wäre $O\lambda$ $= \frac{a . \, dKN}{dx} = \frac{a^3 . \, dddy}{dx^3}$, wenn man das Differential von ddy oder das dritte Differential von y durch dddy anzeigt, welches in eben dem Verſtande geſchehen kann, in welchem man das von dy durch ddy anzeigte.

138. Zuſ. Ueberhaupt erhellet, daß man ſo die Differentiale ohne Ende fortſetzen kann; wie man auch allemahl KLM als die erſte (136) zweyte (137) dritte u. ſ. w. Differentiallinie einer Hauptlinie anſehen kann, da denn $\varkappa\lambda\mu$ dieſer Hauptlinie zweyte, dritte, vierte u. ſ. Differentiallinie wird. Nimmt man auf den Abſciſſen dieſer Linien, e von endlicher Gröſſe, ſo ſtellen die Ordinaten die endlichen Unterſchiede $\Delta\,1$; $\Delta\,2$; $\Delta\,3$; u. ſ. w. (Alg. 724.) der Reihe y vor; welche ſich in dy; $d^2\,y$; $d^3\,y$; u. ſ. w. verwandeln, wenn e verſchwindet, oder wenn es ſich in dx verwandelt.

139. Willk. Satz. Das zweyte, dritte, vierte, ... nte, Differential oder die höhern Differentiale, von y bezeichne man durch $d^2 y$, $d^3 y$; $d^4 y$... $d^n y$ wo man dieſes Zeichen von dy^n oder des Differentials von y Potenz n unterſcheiden muß.

So iſt der nten Differentiallinie Ordinate $\frac{a^n d^n y}{dx^n}$.

140. Zuſ. Eine Gleichung, die zweyte, dritte u. ſ. f. Differentiale, oder Differentiale von einem gewiſſen Grade enthält, wird von neuen differentiirt, wenn man bey dieſen Differentialen eben die Regeln beobachtet die bey endlichen Gröſſen gelten. Und wie z als die Ordinate der erſten Differentiallinie ordentlich endlich iſt, (136) ſo iſt, wenn man dieſe Linie als eine Hauptlinie betrachtet, die Ordinate ihrer Differentiallinie endlich, und ſo ſind überhaupt die Ordinaten jeder Differentiallinie ordentlich endlich, oder $\frac{d^n y}{dx^n}$ iſt endlich. Ich ſage ordentlich, weil für gewiſſe Abſciſſen dieſe Ordinaten verſchwinden oder unendlich werden können wie in (129).

141. Anm. Wenn man dieſe Begriffe auf die Fluxionen bringen will, ſo verhält ſich ddy wie die Geſchwindigkeit, mit der ſich vy verändert (39 VIII.) und dx unveränderlich annehmen, heißt vx unveränderlich annehmen, und ſo ſtellt jedes höhere Differential die Geſchwindigkeit vor, mit der ſich die Geſchwindigkeit verändert, welche durch das nächſtvorhergehende vorgeſtellt wurde.

142. Zuſ. Ob gleich bisher der leichtern Rechnung wegen, e (120) oder dx unveränderlich iſt angenommen worden, ſo wäre doch dieſes nicht nothwendig. Man ſetze $\frac{dy}{dx} = p$ und nehme wie in (126) $z = ap$ nur daß man auch dx veränderlich oder Ll nicht gleich groß mit Kk annehme; So iſt noch $\mu\varrho$ oder $dz = adp$ aber nun $dp = \frac{dxddy - dyddx}{dx^2}$; Es verhält ſich nähmlich hier noch dp oder dz, wie das Differential des Quotienten $\frac{dy}{dx}$ in dem aber nun auch dx veränderlich iſt. Setzt man $ddx = 0$ (22) ſo bekömmt man für dz den Ausdruck (134).

143. Anm. Die höhern Differentiale bekommen aber ordentlich keine beſtimmten Werthe, wenn man nicht ein erſtes Differential, oder eine Gröſſe, die durch erſte Differentiale gegeben iſt, unveränderlich ſetzt; oder ihr Werth wird anders und anders, nachdem man eine andere ſolche Gröſſe unveränderlich ſetzt. Z. E. Wenn $dy = pdx$ alſo $ddy = dpdx + pddx$ ſo wird $ddy = dpdx$ wenn dx unveränderlich iſt: Setzt man aber $dx^2 + dy^2$ unveränderlich, alſo $dxddx = -dyddy$ (22) oder $ddx = -\frac{dyddy}{dx}$ ſo wird $ddy = dpdx - \frac{pdyddy}{dx}$ und $(dx + pdy).\, ddy = dpdx^2$ alſo

$ddy = dp\,dx.\ \frac{dx}{dx + p\,dy}$ welches mit dem vorigen Werthe, da dx unveränderlich war, nicht einerley ſeyn kann, weil gewiß nicht $\frac{dx}{dx + p\,dy} = 1$ iſt. Allgemeinere und ausführlichere Betrachtungen hierüber findet man beym Euler Inſt. Calc. Diff. P. I. §. 251. ſeqq.

Ausdrückung eines unbeſtimmten Gliedes einer Reihe (Alg. 725.) durch die höhern Differentiale.

144 Wenn $x^m = \omega$ und dx beſtändig iſt, ſo iſt $mx^{m-1}dx = d\omega$ alſo $mx^{m-1} = \frac{d\omega}{dx}$

Ferner $m.(m-1)x^{m-2} = \frac{dd\omega}{dx^2}$

$$m.(m-1).(m-2)x^{m-3} = \frac{d^3\omega}{dx^3}$$

und überhaupt

$$m.(m-1).(m-2)\ldots(m-n+1).x^{m-n} = \frac{d^n\omega}{dx^n}$$

Was in die Potenzen von x hier multiplicirt wird, will ich Coefficienten des erſten, zweyten, dritten, nten Differentials nennen.

145. Vergleichung dieſer Coefficienten mit den Binominalcoefficienten (Alg. 141) der erſte, zwey-

zweyte, dritte . . . nte Binominalcoefficient ſollen A, B, C, . . . N heiſſen.

Es ſind alſo die Coefficienten der Differentiale
des erſten $= A$
des zweyten $= 1.2.B$
des dritten $= 1.2.3.C$
des nten $= 1.2.3. \ldots n.N$

Dieſe Uebereinſtimmung hat Leibniz bemerkt Miſcell. Berol. (1710) P. III. art. 1. pag. 160.

146. Wenn $(x+c)^m = \omega + e$; ſo iſt $\omega + e = x^m + Ax^{m-1}c + Bx^{m-2}c^2 + Cx^{m-3}c^3 \ldots + Nx^{m-n}c^n \ldots$ aber aus 144 und 145 iſt

$$Ax^{m-1} = \frac{d\omega}{dx};\ Bx^{m-2} = \frac{d^2\omega}{1.2dx^2};$$

$$Cx^{m-3} = \frac{d^3\omega}{1.2.3dx^3} \ldots Nx^{m-n} = \frac{d^n\omega}{1.2.3.n.dx^n}$$

Daher $\omega + e = \omega + \frac{cd\omega}{dx} + \frac{c^2d^2\omega}{1.2.dx^2} + \frac{c^3d^3\omega}{1.2.3.dx^3} + \frac{c^nd^n\omega}{1.2.3.\ldots n.dx^n} \ldots$

So läßt ſich alſo $\omega + e$ durch höhere Differentiale ausdrucken dergeſtalt daß wenn ω der Werth iſt der einem gewiſſen Werthe von x zugehört, man $\omega + e$ findet das zu $x + c$ gehört.

147 Wenn m eine ganze bejahte Zahl iſt, ſo giebt es m Differentiale, und die Reihe für $\omega + e$ hat

hat m+1 Glieder: Auſerdem gehn die Glieder ohne Ende fort. Völlig wie beym Ausdrucke dieſer Reihe durch den binomiſchen Satz. (47)

148 Exempel. Wenn $m=4$ ſo iſt
$\frac{d\omega}{dx}=4x^3$; $\frac{dd\omega}{dx^2}=12x^2$, $\frac{d^3\omega}{dx^3}=24x$;
$\frac{d^4\omega}{dx^4}=24$; alſo

$$\omega+e=\omega+4x^3c+6x^2c^2+4xc^3+c^4$$

wie der binomiſche Satz gab.

149 Wenn $u=a.x^m$, $u+g=a.(x+c)^m$ ſo iſt $u=a.\omega$; $du=a.d\omega$; $ddu=a.dd\omega$ u. ſ. w. Ferner $u+g=a.(\omega+e)$; Um alſo $u+g$ zu finden, darf man nur der Reihe für $\omega+e$ jedes Glied mit a multipliciren, ſo gibt ſie

$$u+g=u+\frac{cdu}{dx}+\frac{c^2d^2u}{1.2.dx^2}+\frac{c^3d^3u}{1.2.3.dx^2}\ldots$$

$$+\frac{c^nd^nu}{1.2.3\ldots n.dx^n}\ldots$$

150. Wenn $z=ax^m+bx^r$, ſo heiſſe man den erſten Theil u, den zweyten v; alſo $dz=du+dv$, $ddz=d^2u+d^2v$, $d^3z=d^3u+d^3v$ u. ſ. w. Wenn ſich nun x in $x+c$ verwandelt, ſo verwandelt ſich

$$u \text{ in } u+\frac{cdu}{dx}+\frac{c^2d^2u}{1.2.dx^2}\ldots$$

v in

$$v \text{ in } v + \frac{c\,dv}{dv} + \frac{c^2 d^2 v}{1.2.dx^2} \ldots$$

alſo u + v oder z

$$z \text{ in } u+v+\frac{c}{dx}.(du+dv)+\frac{c^2}{1.2.dx^2}(d^2u+d^2v)\ldots$$

Das iſt in

$$z+\frac{c\,dz}{dx}+\frac{c^2 d^2 z}{1.2.dx^2}\ldots$$

Es iſt klar, daß eben dieß gelte, wenn z aus dren, vier oder mehr ſolchen veränderlichen Theilen beſtünde.

151. Wenn y eine Function von x iſt, und man das y aus x berechnen will, ſo läßt ſich allemahl annehmen, es ſey eine Reyhe

$y = ax^{m} + bx^{m+\delta} + cx^{m+2\delta} \ldots$ gegeben, die eine endliche oder unendliche Menge von Gliedern hat. Iſt y eine alg braiſche Function von x ſo lehrt das Parallelogramm ſolche Reihen finden. Iſt es eine tranſcendentiſche, ſo weiß man vielleicht bisher noch nicht wie die Reihe gefunden wird, es iſt aber doch begreiflich, daß wenn ſich keine ſolche Reihe finden lieſſe, der Werth von y der jeden x zugehörte, nicht könnte berechnet werden. Auf andre Art, etwa durch Verzeichnung lieſſe es ſich beſtimmen, wie z. E. wenn y der Bogen wäre der dem Sinus x zugehörte, aber eine Berechnung findet nicht ſtatt, wenn nicht y durch eine ſolche Reihe, oder durch

irrationale Ausdrückungen z. E. $\sqrt{(a^2+x^2)}$ u. d. g. die ſich denn allemahl in Reihen verwandeln laſſen gegeben iſt. Alſo kan man allemahl eine ſolche Reihe für y annehmen, und wenn alſo x ſich in x+c verwandelt, ſo verwandelt ſich nach 150; y in

$$y+\frac{cdy}{dx}+\frac{c^2d^2y}{1.2.dx^2}+\frac{c^3d^3y}{1.2.3.dx^3}\ldots+\frac{c^nd^ny}{1.2.3\ldots dx^n}.$$

Exempel $y=4x^3+7x+5$, gibt $\frac{dy}{dx}=$

$12x^2 * +7$; $\frac{d^2y}{dx}=24x$; $\frac{d^3y}{dx}=24$; Wenn alſo x um c wächſt ſo verwandelt ſich y in

$$y+12.cx^2+7c+12c^2x+4c^3$$

Wenn z. E. c=10; ſo giebt dieſes

$$y+120x^2+1200x+4070.$$

Man ſetze x=0 ſo iſt y=5; und verwandelt ſich für x=0+10 in 4075 wie gehörig.

Von den Größten und Kleinſten.

152. Erkl. Wenn eine Function von x ſo beſchaffen iſt, daß ſie bis auf einen gewiſſen Werth zunimmt und von dar wieder abnimmt, indem x beſtändig zunimmt oder abnimmt, ſo heißt dieſer ihr Werth ein Größtes; Nimmt ſie aber bis auf einen ſolchen Werth ab, und von dar wieder zu, ſo heißt ſie ein Kleinſtes. (maximum vel minimum.

So wird der Ellipſe Ordinate PM Alg. II. Taf.

Taf. 12 Fig. ein Gröſtes, wenn ſie zur Ordinate durch den Mittelpunct CD wird. Aber wenn $x^2 - 10x + 60 = y$ ſo iſt y für $x = 5$ ein kleinſtes; Es wird als denn $= +35$ und jeder andere Werth von x gibt ein gröſſeres y; z. E. $x=6$ oder 4 gibt eines wie das andere $y=36$.

153. Zuſ. Wenn man bejahte und verneinte Gröſten oder Kleinſten unterſcheiden will, ſo wird ein gröſtes Verneintes (maximum negatiuum,) ſeyn, vor dem kleinere Verneinte vorhergehen und nachfolgen, wie das mittlere unter den dreyen $-10; -11; -9$; und ſo wird ein Kleinſtes Verneintes, das ſeyn, vor dem gröſſere Verneinte vorhergehen und nachfolgen, wie das mittelſte unter den dreyen $-8; -7; -9$. Heiſt aber kleiner, das, was von dem andern abgezogenen was bejahtes läſt, daſ alſo ein gröſſer verneintes kleiner heiſt, ſo braucht man nicht zu ſagen, ob ein Gröſtes oder ein kleinſtes an ſich ſelbſt bejaht oder verneint ſeyn ſoll, ſondern das Verneinte, das vorhin das gröſte Verneinte hieſſe, iſt nun überhaupt ein Kleinſtes, wie -11; im erſten Exempel, und das Verneinte, das vorhin ein verneintes kleinſtes hieſſe, iſt nun überhaupt ein gröſtes; wie -7 im zweyten Exempel. Ich werde in der Folge, wenn ich nicht das Gegentheil erinnere, dieſe Wörter in der letztern Bedeutung brauchen.

154. Zuſ. Eigentlich iſt hier nur die Rede von

ſolchen Functionen von x, da nur ein Werth zu einem Werthe von x gehört. (functiones vniformes) Denn ſonſt kann für einerley x, ein Werth der Function ein größtes oder kleinſtes ſeyn, und der andere nicht. Bey der Ellipſe (152) wäre ſo für einerley Abſciſſe die Ordinate CD ein größtes, und die Ordinate Cd ein kleinſtes. (153) Eben ſo gehören Alg. I. T. 8 Fig. zu jeder Abſciſſe zwo Ordinaten, z. E. ſΦ; ſφ; und da iſt für den Punct A, eine in der Reihe, wo ſΦ den Anfang macht; die kleinſte = 0; und eine in der Reihe, wo ſφ den Anfang macht, die größte AB.

155. Aufg. Wenn y eine einförmige Function von x iſt, die Umſtände zu finden, unter denen ſie ein Größtes oder Kleinſtes wird.

Aufl. I. Wenn man erſtlich x + α; darnach x − α ſtatt x ſetzt, ſo muß die Function beydemahl kleiner als das y werden, das ein Größtes iſt, und gröſſer als dasjenige, das ein Kleinſtes iſt, die erſte Vorausſetzung aber giebt (148).

$$\Gamma)\ y + \frac{\alpha\, dy}{dx} + \frac{\alpha^2\, d^2y}{2\,dx^2} + \frac{\alpha^3\, d^3y}{6\,dx^3} \ldots$$

und die andere

$$\Delta)\ y - \frac{\alpha\, dy}{dx} + \frac{\alpha^2\, d^2y}{2\,dx^2} - \frac{\alpha^3\, d^3y}{6\,dx^3}$$

Da denn y, gröſſer als jeder dieſer Werthe ſeyn muß, wenn es ein Größtes iſt, und kleiner, wenn es ein Kleinſtes iſt.

II)

II) Wofern nun die Quotienten $\frac{dy}{dx}$ u. ſ. w. alle endlich ſind (140) ſo kann man allemahl α ſo klein annehmen, daß die Glieder jeder dieſer Reihe, die nach dem zweyten folgen, zuſammen weniger als das erſte betragen, weil die höhern Potenzen eines ſehr kleinen Bruches, ſehr ſchnell abnehmen. Weil nun der Werth von $\frac{dy}{dx}$ für Γ und für Δ einerley iſt, ſo wird in dieſem Falle, nachdem $\frac{dy}{dx}$ bejaht oder verneint iſt, Γ gröſſer oder kleiner, und Δ kleiner oder gröſſer als das y ſeyn, das der Abſciſſe x zugehört. Dieſe beyden Werthe fallen, jeder auf eine andere Seite des genannten y, ſo nahe als man will, weil man α ſo klein annehmen kann als man will; die geringſte Veränderung der Abſciſſe x, giebt alſo auf einer Seite was gröſſers als das genannte y, auf der andern was kleiners; folglich iſt dieſes y kein gröſtes oder kleinſtes.

III. Wenn aber $\frac{dy}{dx} = 0$ und $\frac{ddy}{dx^2}$ endlich iſt, und wiederum α ſo klein angenommen wird, daß die Glieder der Reihen, die nach dem dritten folgen, zuſammen weniger als das dritte betragen; ſo werden Γ und Δ zugleich gröſſer oder zugleich kleiner als y ſeyn, nachdem ddy bejaht oder verneint iſt.

IIII.

IIII. Um alſo zu unterſuchen, ob die Function ein Gröſtes oder ein Kleinſtes werde, ſetze man $dy : dx = o$. Geht dieſes an, und man findet aus dieſer Vorausſetzung einen, oder etliche Werthe von x, ſo beurtheilt man nach III. ob ſie Größten oder Kleinſten zugehören.

V. Wofern aber $ddy : dx^2 = o$ ſo kann man aus III. noch nichts ſchlieſſen. Um die Art, wie man hier verfahren muß, deutlicher zu zeigen, ſey

$$\frac{ddy}{dx^2} = p; \frac{d^3y}{dx^3} = q; \frac{d^4y}{dx^4} = r \text{ u. ſ. w.}$$

Der Werth von y, der herauskömmt, wenn f ſtatt x geſetzt wird, ſey F; ſo iſt das, was herauskömmt, wenn $f + \alpha$ ſtatt x geſetzt wird;

$$\Gamma = F + \tfrac{1}{2}\alpha\alpha p + \tfrac{1}{6}\alpha^3 q + \tfrac{1}{24}\alpha^4 r \ldots$$

und das, was herauskömmt, wenn $f - \alpha$ ſtatt x geſetzt wird;

$$\Delta = F + \tfrac{1}{2}\alpha\alpha p - \tfrac{1}{6}\alpha^3 q + \tfrac{1}{24}\alpha^4 r \ldots$$

VI. Wofern nun hier $p = o$; aber q endlich iſt, ſo iſt Γ gröſſer oder kleiner, und Δ kleiner oder gröſſer als F, nachdem q bejaht oder verneint iſt; weil man allemahl α ſo klein annehmen kann, daß die folgenden Glieder der Reihen zuſammen weniger als das erſte betragen; Alſo iſt F kein Größtes oder Kleinſtes.

VII. Iſt aber $q = o$ und r endlich, ſo ſind Γ und Δ zugleich gröſſer oder kleiner als F, oder F iſt ein Kleinſtes oder Gröſtes, nachdem r bejaht oder verneint iſt.

VIII.

VIII. Ueberhaupt ſey $\frac{d^{2n}y}{dx^{2n}} = \varkappa$; $\frac{d^{2n+1}y}{dx^{2n+1}} = \lambda$; ſo ſind zwey allgemeine nächſtfolgende Glieder von

$$\Gamma \ldots + \frac{1}{1.2\ldots\ldots 2n}\cdot\alpha^{2n}\varkappa + \frac{1}{1.2..(2n+1)}\alpha^{2n+1}\lambda..$$

und von

$$\Delta \ldots \frac{+1}{.1.2\ldots\ldots 2n}\cdot\alpha^{2n}\varkappa - \frac{1}{1.2\ldots(2n+1)}\cdot\alpha^{2n+1}\cdot\lambda$$

Sind alſo alle vorhergehenden Glieder dieſer Reihen $=0$; und $\varkappa$ iſt endlich, ſo ſind Γ; Δ; beyde zugleich gröſſer oder kleiner als F, und F iſt ein kleinſtes oder gröſtes, nachdem $\varkappa$ bejaht oder verneint iſt. Iſt aber auch $\varkappa = 0$ und λ endlich, ſo iſt F weder ein gröſtes noch ein kleinſtes.

VIII. Es ſey $\frac{dy}{dx} = (x-f)^2 P$ wo P eine Function von x iſt, die $x-f$ nicht zum Factor hat. So iſt $\frac{dy}{dx} = 0$ für $x=f$; $\frac{ddy}{dx^2} = 2.(x-f).P + (x-f)^2\cdot\frac{dP}{dx}$ und dieſer Quotient wird $=0$ für $x=f$. Aber $q = 2.P + 4.(x-f).\frac{dP}{dx} + (x-f)^2\frac{ddP}{dx}$ wird $=2P$ für $x=f$. Alſo iſt hier F weder ein gröſtes noch ein kleinſtes.

ſtes. (VI) Für $\frac{dy}{dx} = (x - f)^3$. P wird man auf eben die Art finden, daß p und q für $x = f$ verſchwinden, aber r endlich wird, alſo F ein größtes oder kleinſtes iſt. (VII.) Und ſo erhellt überhaupt, daß F nur alsdenn ein größtes oder ein kleinſtes iſt, wenn $\frac{dy}{dx} = (x - f)^m$ P ſo daß m ungerade iſt. Iſt aber m gerade, ſo iſt F weder ein größtes noch ein kleinſtes.

VIII. Die größten oder kleinſten leichter zu finden, dienen oft auch folgende Betrachtungen: Wenn y ein Größtes oder Kleinſtes wird, ſo wird ay, und ay^n wofern a eine bejahte Größe, und n eine bejahte ungerade Zahl iſt, auch ein Größtes oder ein Kleinſtes, aber umgekehrt $b - ay^n$ imgleichen $\frac{a}{y^n} = b$ ein Kleinſtes oder ein Größtes. Wenn n gerade iſt, läß ſich dieſes nicht anbringen, denn da kann y einen verneinten Werth haben, und alſo ein kleinſtes ſeyn, (153) und ſeine gerade Potenzen, die bejaht ſind, können doch Größte werden; Und gegentheils, wenn der verneinte Werth von y ein Größtes iſt, ſo werden deſſelben gerade Potenzen, Kleinſte ſeyn. Das Gegentheil hievon erfolgt, wenn n eine gerade verneinte Zahl iſt. Eben das gilt, wenn n ein Bruch iſt, deſſen Nenner eine ungerade

Zahl

Zahl iſt. Iſt der Zähler ungerade, wie $\frac{1}{3}$; $\frac{3}{6}$; u. ſ. w. ſo hat man es als eine ungerade Zahl anzuſehen, aber als eine gerade, wenn der Zähler gerade iſt, wie $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{5}$; u. ſ. w. Iſt der Nenner gerade, ſo werden z. E. $y^{\frac{1}{2}}$; $y^{\frac{3}{4}}$; u. d. g. unmöglich, wenn y verneint iſt, aber Größte oder Kleinſte, wenn y bejaht und ein Größtes oder Kleinſtes iſt, und unter dieſer Bedingung umgekehrt $y^{-\frac{1}{2}}$; $y^{-\frac{3}{4}}$ kleinſte oder größte. Jede dieſer Irrationalgrößen aber, hat zweene entgegengeſetzte ſonſt gleiche Werthe, daher von den Verneinten das Entgegengeſetzte deſſen gilt, was von den Bejahten iſt geſagt worden.

156. Ex. Die Umſtände zu finden, unter denen $(x - a)^m$ ein größtes oder kleinſtes wird.

Weil $\frac{dy}{dx} = m\,(x - a)^{m-1}$ für $x = a$ verſchwindet, und einen Factor, wie 155; VIII betrachtet worden iſt hat, ſo giebt es hier kein Größtes oder Kleinſtes, wofern nicht $m - 1$ ungerade, oder m gerade iſt. Alle Differentiale von y enthalten nähmlich den Factor $x - a$, bis auf $\frac{d^m y}{dx^m} = m.(m - 1) \ldots . 1$ welches bejaht iſt, und alſo für ein gerades m anzeigt, daß der Werth den $x = a$ für y giebt, ein Kleinſtes iſt. Dieſer Werth iſt nähmlich $= 0$; und

Bayerische Staatsbibliothek München

jeder andere Werth, von $(x-a)^m$ iſt für ein gerades m bejaht, und folglich gröſſer; Für ein ungerades m aber giebt es verneinte Werthe von x — a wenn $x < a$ die alſo kleiner als o ſind. Iſt $m = \frac{\mu}{\nu}$ ſo daß μ gerade und ν ungerade iſt, ſo giebt $x = a$ ein Kleinſtes. Iſt aber μ wie ν ungerade, ſo giebt es weder ein Kleinſtes noch ein Gröſtes.

157. Ex. Wenn eine Linie a in zwey Stücken x und a — x getheilet iſt, zu finden, wenn das Rechteck unter dieſen Stücken ein Gröſtes oder ein Kleinſtes wird.

Alſo iſt $x.(a-x)$ oder $ax - xx = y$ und $a - 2x = \frac{dy}{dx}$ und $-2 = p$; daher das Rechteck für $\frac{1}{2}a = x$ (155. IIII.) ein Gröſtes (155. III.). So daß das gröſte Rechteck das ſich aus zwey Stücken einer gegebenen Linie machen läßt, das Quadrat ihrer Hälfte iſt. Man könnte dieſes ohne gegenwärtigen Kunſtgriffe ſchon aus den Eigenſchaften des Kreiſes ſehen. Denn wenn a ſeinen Durchmeſſer und x eine Abſciſſe auf demſelben bedeutet, ſo wird $ax - xx$ am gröſten, wenn es zum Quadrate des Halbmeſſers wird.

158. Ex. Unter allen rechtwinklichten Parallelepipedis, die einem gegebenen Würfel gleich ſind, und eine gegebene Seite haben, das zu finden, das die kleinſte Fläche hat.

Der

Der Würfel ſey $=a^3$ und die gegebene Seite $=b$; Die zweyte $=x$, ſo iſt die dritte $\frac{a^3}{bx}$; alſo die halbe Fläche des Parallelepipedi $bx + \frac{a^3}{x} + \frac{a^3}{b} = y$ und $b - \frac{a^3}{x^2} = \frac{dy}{dx}$ und $+ \frac{2a^3}{x^3} = p$; daher man ſieht, daß die Fläche für $b = \frac{a^3}{xx}$ oder $x = \surd(a^3 : b)$ ein Kleinſtes wird. Alſo ſind die beyden andern Seiten x und $\frac{a^3}{bx}$ jede $= \surd(a^3 : b)$

159. Zuſ. Wenn keine Seite gegeben iſt, und überhaupt das Parallelepipedum geſucht wird, das unter allen, die einem gegebenen Würfel gleich ſind die kleinſte Fläche hat, ſo ſey deſſelben eine Seite u; alſo iſt jede der beyden andern $\frac{a\surd a}{\surd u}$ (158), und die halbe Fläche $y = 2a\surd au + \frac{a^3}{u}$ alſo $\frac{dy}{du} = a\surd\frac{a}{u} - \frac{a^3}{u^2} = 0$ woraus $u = a$ folgt; daß alſo der Würfel ſelbſt die kleinſte Fläche hat.

160. Er. Unter allen Linien OM 1. F. die ſich aus einem gegebenen Puncte O an eine krumme Linie ziehen laſſen, die kürzeſte oder längſte zu finden.

Man ziehe durch O eine Abſciſſenlinie der krummen Linie, (welches vermöge Alg. 422. XI. allemahl angeht) und nenne $AP = x$, $PM = z$; $AO = c$ ſo iſt OM^2 oder hier $y = PM^2 + PO^2 = zz + (c-x)^2$ und wenn $dz = mdx$ geſetzt wird, $\frac{dy}{dx} = 2z.m - 2.(c-x) = 0$ alſo $c-x = zm = \frac{zdz}{dx}$; und die geſuchte OM iſt die Normallinie

(92). Weil $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{2zddz}{dx^2} + 2m^2 + 2$ ſo kann ſolches verneint werden, wenn ddz ſo beſchaffen iſt, und daher kann OM ſowohl eine kürzeſte als eine längſte Linie ſeyn. Wäre z. E. O ein Durchmeſſer eines Kreiſes, ſo wäre die längſte Linie, das Stücke des Durchmeſſers von O an, in welchem ſich der Mittelpunct befindet, und das andere die kürzeſte, beyde auf den Kreis ſenkrecht.

161. Anm. Wenn y bis auf eine gewiſſe Gränze wächſt, und von da wieder abnimmt, oder umgekehrt, ſo wird $\frac{dy}{dx}$ aus einer bejahten Gröſſe, eine verneinte, oder umgekehrt. (23) Zwiſchen dieſen beyden Veränderungen nun wird es entweder $= 0$ oder unendlich (Geom. 12. S. 14 Z.) Dieſes iſt der gemeine Beweis der Regel (155. IIII.) den man auch aus Betrachtung der Tangenten herzuleiten pflegt, denn wo einer krummen Linie Ordinate y ein Gröſtes oder ein Kleinſtes wird, da wird die Tangente entweder der Axe parallel, wie bey der Ellipſe, wenn die Ordinate zur hal-

ben

den kleinen Axe wird (Alg. 365.) oder auf die Axe ſenkrecht wie die Ordinate BD (Alg. 474.) In jenem Falle wird die Subtangente $\frac{ydx}{dy}$ (77) unendlich, alſo $\frac{dy}{dx}$ $= 0$ (Trig. 4. Erkl. 4. Zuſ.) in dieſem wird ſie $= 0$ alſo $\frac{dy}{dx}$ unendlich. Dieſe ſeltenen Fälle aber, da $\frac{dy}{dx}$ unendlich wird, werden hier beyſeite geſetzt, und man beurtheilt ſie leicht, wo ſie vorkommen Ich habe deßwegen nur geſagt, daß $\frac{dy}{dx}$ nicht endlich ſeyn ſoll. (155. II.)

162. Ex. Für die krumme Linie (Alg. 474.) iſt $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{a}{a-x}}$ und $\frac{ddy}{dx^2} = -\frac{2}{9}\sqrt[3]{\frac{a}{(a-x^4)}}$ da kann man nun $\frac{dy}{dx}$ nicht $= 0$ ſetzen, und läßt ſich alſo die Regel (155. IIII.) nicht anbringen. Aber $\frac{dy}{dx} = \infty$ gibt $a = x$ für die kleinſte Ordinate BD.

Betrachtung gewiſſer paraboliſcher Linien, welche zur Erläuterung der Lehre von den Gleichungen dienen.

163. Lehrſ. Wenn m eine ganze beſahte Zahl bedeutet, ſo hat die krumme Linie, welcher die Gleichung $x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} \ldots + tx + u = y$ zugehört, zweene unendliche

Schenkel, beyde auf einer Seite der Axe, oder einen auf der einen, den andern auf der andern, nachdem m gerade oder ungerade iſt. Sie kann ferner die Axe nicht mehr als m mahl ſchneiden, und bey jedem Durchſchnitte wird y verneint oder bejaht, wenn es zuvor bejaht oder verneint war.

Bew. I. Es ſey 12 F. AP = +x; PM = +y; Wenu x unendlich wächſt, ſo wird $y = x^m$ (10) Dieſes iſt für $x = +\infty$ allemahl bejaht, m mag gerade oder ungerade ſeyn: Aber für $x = -\infty$ iſt es bejaht oder verneint, nachdem m gerade oder ungerade iſt. Alſo befindet ſich allemahl ein unendlicher Schenkel für bejahte Abſciſſen über der Axe, der unendliche Schenkel für verneinte Abſciſſen aber iſt über oder unter der Axe, nachdem m gerade oder ungerade iſt. Bey jedem Durchſchnitte wie in E geht die krumme Linie durch die Axe, und alſo bekömmt y einen Werth, der ſeinem vorigen Werthe entgegengeſetzt iſt.

II. Es können zweene Durchſchnitte in einen zuſammengehen, wie wenn die Abſciſſenlinie, ſich ſelbſt parallel herunter bis in H rückte, und daſelbſt die krumme Linie berührte: Da ſind die Werthe von y auf beyden Seiten des Berührungspunctes einander nicht entgegengeſetzt.

III. Wenn die drey Durchſchnitte C; D; E; in einen zuſammengingen, oder wenn ſich der Bogen CHME in eineu Beugungspunct (point

int d'inflexion; *Cramer*; An. des Courb. §. 263.) verwandelte, ſo würden die Ordinaten auf beyden Seiten dieſes dreyfachen Durchſchnitts-punctes einander entgegengeſetzt ſeyn, welches aber wiederum nicht ſtatt finden würde, wenn vier Durchſchnittspuncte CDEF in einen Schlangenpunct (point de Serpentement, Cramer §. 164. Maupertuis; Mem. de l'Ac. des Sc. 1729. p. 277.) zuſammengingen. Und ſo erhellt, daß die Ordinaten in das Entgegengeſetzte übergehen oder nicht, nachdem die Zahl der Durchſchnittspuncte, die in einen Punct der Axe zuſammengehen, ungerade oder gerade iſt.

IIII. Es giebt ſoviel Durchſchnitte, ſoviel mögliche Wurzeln die Gleichung $y=0$ hat, welche ich Hauptgleichung nennen will, und die Abſciſſen für die Durchſchnitte, AB; AC; AD; u.ſ.w. ſind die möglichen Wurzeln dieſer Gleichung.

164. Zuſ. Für eine andere krumme Linie 13 Fig. ſey auch $A\pi = x$; $\pi\mu = z = \frac{dy}{dx} = mx^{m-1} + (m-1).px^{m-1} \ldots + t$, ſo iſt dieſes die Differentiallinie jener Hauptlinie (127.) und man kann dergleichen Differentiallinien weiter finden, bis man auf die n—1te kömmt, welches eine gerade Linie ſeyn, und $m.(m-1).(m-2)\ldots x$ zur Ordinate haben wird. Jede Differentiallinie

nie kann in Abſicht auf ihre nächſtfolgende, als eine Hauptlinie betrachtet werden.

165. Zuſ. Die Abſciſſen AR; AG; AL; AV; 12 Fig. denen gröſste oder kleinſte Ordinaten RS; GH; LN; VW; zugehören, ſind diejenigen, wo z oder $\frac{dy}{dx} = 0$ (153. IIII.) oder wo die Differentiallinie 13 F. ihre Axe ſchneidet (164). Alſo geben die Wurzeln der Gleichung $\frac{dy}{dx} = 0$, die Abſciſſen, welche in der 11 F. gröſsten oder kleinſten Ordinaten zugehören.

166. Zuſ. Wenn die Axe in m unterſchiedenen Puncten von der krummen Linie geſchnitten wird, und F der letzte Durchſchnitt zur Rechten iſt, ſo iſt die krumme Linie, rechter Hand des Punctes F beſtändig über der Ax (163. I.) alſo iſt ſie linker Hand dieſes Punctes, unter der Axe, oder ihre Ordinaten zwiſchen F und dem nächſtvorhergehenden Durchſchnitte E ſind verneint, und VW iſt ein verneintes gröſstes in der erſten Bedeutung 153, aber ein kleinſtes in der letzten. Hier wird es bequemer ſeyn die erſte Bedeutung zu brauchen. Eben ſo folgt 163. daſs zwiſchen E und D eine bejahte gröſte Ordinate LN, zwiſchen D und C eine verneinte gröſste iſt, und ſo ferner die Zeichen der gröſsten Ordinaten zwiſchen jedem Paare Durchſchnitte nnd zwiſchen dem nächſtvorhergehenden Paare Durchſchnitte, wenn

wenn beyde Paare einen mit einander gemein haben, entgegengeſetzt ſind. Und dieſe größten Ordinaten ſind alle Größte in der erſten Bedeutung (153) weil die Ordinaten von jedem Durchſchnitte bis zu dem nächſtvorhergehenden, anfangs von o an wachſen, und nach dieſem wieder bis auf o ebnehmen müſſen.

167. Zuſ. Wenn für eine Abſciſſe, wo $z = o$ die Ordinate kein Größtes, ſondern ein Kleinſtes in der erſten Bedeutung 153 wird, ſo verlieren ſich zweene Durchſchnitte, und die Hauptgleichung $y = o$ enthält zwo unmögliche Wurzeln. Wenn man für der krummen Linie 12 F. Axe KQ annähme, ſo wird ſie zu einer Gleichung vom fünften Grade gehören, die nur eine mögliche Wurzel KY; und vier unmögliche Wurzeln hat, deren zwo durch die kleinſte Ordinate IH; und zwo durch die kleinſte Ordinate XW angezeigt werden. Denn wenn die Ordinate ein Kleinſtes wird, ſo muß ſie zuvor abgenommen haben, und nach dieſem wieder wachſen. Nun kann ſie entweder die äuſerſte unter den größten oder kleinſten Ordinaten ſeyn, wie XW wäre, oder nur von den Mittlern, wie IH; In dem letzten Falle, haben die Ordinate vor ihr nicht von einem unendlichen Werthe, ſondern von einem endlichen größten ON abgenommen, und wachſen nach ihr wieder bis auf eine endliche größte TS zu; alſo fällt jede kleinſte Ordinate zwiſchen zwo größte,

die mit ihr einerley Zeichen haben, und die beyden Durchſchnitte C; D; verlieren ſich, welche ſtatt gefunden hätten, wenn man für der krummen Linie Axe AP angenommen hatte, da ſie zu einer Gleichung gehört hätte, deren fünf Wurzeln alle möglich ſind, und wo die größte Ordinate GH zwiſchen zwo größte die mit ihr entgegengeſetzte Zeichen gehabt hätten, RS; LN; gefallen wären. Iſt die äuſerſte größte oder kleinſte Ordinate zur rechten Hand nicht ein verneintes größtes wie VW ſondern ein bejahtes kleinſtes wie XW, ſo verlieren ſich die beyden Durchſchnitte E und F. Die krumme Linie muß nähmlich rechter Hand des Punctes X beſtändig über der Axe bleiben, und iſt linker Hand auch ſchon darüber geweſen, damit ihre Ordinate bis auf die kleinſte XW abnahm.

Weun m ungerade iſt, ſo muß die krumme Linie zur Rechten des Durchſchnittes, der wie B 12 F. zum äuſſerſten nach der linken Hand liegt, über der Axe ſeyn, weil ſie zur linken dieſes Durchſchnittes beſtändig unter der Axe bleibt. Daher muß die größte Ordinate RS zwiſchen dieſem Durchſchnitte und dem nächſtvorhergehenden C bejaht ſeyn. Iſt aber m gerade, ſo befindet ſich die krumme Linie linker Hand des Durchſchnittes, der wie R 13 F. am weiteſten zur Linken liegt, beſtändig über der Axe, und alſo iſt die größte Ordinate zwiſchen ihm und dem nächſtvorher-

her-

hergehenden verneint. Wenn alſo der Hauptgleichung äuſerſte Wurzeln AE, AF, und AC, AB, möglich ſeyn ſollen, ſo muß die größte bejahte Wurzel der Differentialgleichung $\frac{dy}{dx}=0$, oder die kleinſte verneinte, wenn dieſe Gleichung keine bejahten Wurzeln hat, (das iſt, die Wurzel dieſer Gleichung, welche unter den größten oder kleinſten Ordinaten der 12 F. die giebt, welche am weiteſten nach der rechten Hand liegt,) in y geſetzt ein größtes verneintes geben. Die größte verneinte Wurzel der Differentialgleichung aber, oder die kleinſte bejahte, wenn ſie keine verneinten hat, muß in y geſetzt ein größtes Bejahtes oder Verneintes geben, nachdem m gerade oder ungerade iſt.

Umgekehrt gilt dieſes nicht. Wenn man für die Axe der krummen Linie 12 F. eine Parallele mit AP in der Weite XZ annimmt, ſo iſt die äuſerſte größte Ordinate ZW ſowohl verneint als vorhin VW; und doch hat die Hauptgleichung alsdenn vier unmögliche Wurzeln.

168. Zuſ. Wenn die Hauptgleichung m unterſchiedene mögliche Wurzeln hat, oder die Axe von der krummen Linie in m unterſchiedenen Puncten geſchnitten wird, und wenn die Differentialgleichung n bejahte Wurzeln hat, ſo ſind die Ordinaten y welche dieſen Wurzeln der Differentialgleichung in der Hauptlinie zugehören,

lau-

lauter größte, und jede zwo nächſte ſind einander entgegengeſetzt; Heißt man alſo die äuſerſte zur rechten, wie VW 11 F. die n te und die vorhergehenden LN; GH, . . . die

n - 1 te; n - 2te; u. ſ. w. ſo iſt die

n te; n - 2 te; n - 4te; . . . . n - 2k te verneint

n - 1 te, n - 3te; n - 5te; n - 2k - 1 te; bejaht.

Will man alſo wiſſen, wie die erſte beſchaffen iſt, die der Abſciſſe AG zugehört, ſo iſt ſie verneint oder beiaht, nachdem n ungerade oder gerade iſt; denn ihre Zahl 1; iſt im erſten Falle = n - 2k und im zweyten = n - 2k - - 1.

169. Zuſ. In der Vorausſetzung (168) fallen nicht weniger als n Durchſchnitte rechter Hand des Punctes A 12 F. oder die Gleichung y = 0 hat nicht weniger als n bejahte Wurzeln. Denn zwiſchen jede zwo nächſte größte Ordinaten fällt ein Durchſchnitt, weil ſie einander entgegengeſetzt ſind (166): Zwiſchen n größte Ordinaten, fallen alſo n - 1 Durchſchnitte; und weil die n te verneint iſt (168) ſo fällt zu ihrer rechten Hand noch einer.

170. Zuſ. Wenn n ungerade iſt, ſo iſt die erſte größte Ordinate GH verneint (168). Iſt nun in der Gleichung (163) das letzte Glied u bejaht, ſo iſt die Ordinate für x = 0 oder die Ordinate durch A, bejaht, und folglich ſchneidet die krumme Linie die Axe zwiſchen A und G; und dieſes nur einmahl, denn geſchähe es mehr als ein-

einmahl, ſo würde die krumme Linie an dem nächſten Durchſchnitte über die Axe, an dem nächſtfolgenden wieder darunter kommen, und müßte alſo die Axe noch einmahl ſchneiden um bey A darüber zu ſeyn: Alſo gäbe es zum wenigſten drey Durchſchnitte; oder, wie auf eben die Art erhellt, fünf, ſieben, u. ſ. w. Zwiſchen jedem Paar Durchſchnitte aber fällt eine größte Ordinate, daher wäre GH nicht die nächſte größte Ordinate bey A.

Iſt u verneint, ſo befindet ſich die krumme Linie bey A unter der Axe, und wenn ſie alſo die Axe zwiſchen G und A ſchneiden ſollte, ſo müßte ſolches entweder zweymahl, viermahl, ſechsmahl u. ſ. w. geſchehen; welches wiederum größte Ordinaten zwiſchen A und GH gäbe; alſo ſchneidet ſie die Axe zwiſchen A und G gar nicht.

Solchergeſtalt giebt es, wenn n ungerade iſt; $n+1$; oder n; bejahte Wurzeln der Hauptgleichung, nachdem u bejaht oder verneint iſt.

171. Zuſ. Wenn n gerade iſt, ſo iſt die erſte größte Ordinate bejaht, (168) und es wird wie vorhin erwieſen, daß zwiſchen ihr und dem Anfange der Abſciſſen, kein Durchſchnitt oder nur einer fällt, das iſt, daß die Gleichung n oder $n+1$ bejahte Wurzeln hat, nachdem u in ihr bejaht oder verneint iſt.

Von den gleichen Wurzeln.

172. Lehrſ. Wenn die Hauptgleichung $y = 0$; r gleiche Wurzeln enthält, ſo enthält die Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = 0$ von dieſen Wurzeln $r - 1$;

Bew. Wenn in der erſten Gleichung $x = e$, und noch einmahl $x = e$; u. ſ. f. n mahl $x = e$; ſo kommen in derſelben n Wurzelgleichungen jede $x - e = 0$ als Factoren vor, oder es iſt $y = (x - e)^r . P$ wo P das übrige bedeutet, was in die genannten n Wurzelgleichungen multiplicirt wird, um das Product zu erhalten, den Factor $x - e$ aber nicht enthält. Folglich iſt $\frac{dy}{dx} = r.(x-e)^{r-1}P.$

$$+ (x-e)^r . \frac{dP}{dx} = (x-e)^{r-1} \left(r.P + \frac{(x-e).dP}{dx}\right)$$

Die Differentialgleichung enthält alſo ein Product aus $r - 1$ Wurzelzeichnungen, deren jede $x - e = 0$ iſt, oder $n - 1$ Wurzeln jede $x = e$. Dieſer Beweis gilt, wie offenbahr iſt, e mag möglich oder unmöglich ſeyn.

Ex. $x^5 * - 8x^3 + 24x^2 - 28x + 16 = y = (x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 8x + 4) . (x + 4) = (x^2 - 2x + 2)^2 . (x + 4) = (x - 1 + \sqrt{-1})^2 . (x - 1 - \sqrt{-1})^2 . (x + 4)$. Hier kann alſo einmahl $e = 1 - \sqrt{-1}$ und $P = (x - 1 - \sqrt{-1})^2 . (x + 4)$ zweytens $e = 1 + \sqrt{-1}$

und

und $P = (x - 1 + \sqrt{-1})^2 . (x + 4)$ beyde-mahl $r = 2$ ſeyn; oder die Gleichung $y = 0$ hat alſo zwo gleiche Wurzeln jede $= 1 - \sqrt{-1}$ und zwo gleiche, jede $= 1 + \sqrt{-1}$. Folglich muß die Gleichung $\frac{dy}{dx} = 0$ ſo wohl $1 + \sqrt{-1}$ als $1 - \sqrt{-1}$ zur Wurzel haben. Es iſt aber $\frac{dy}{dx} = 5.\left(x^4 * - \frac{24}{5} x^2 + \frac{48}{5} x - \frac{28}{5}\right)$ wo der letzte Factor $= 0$ wird, wenn man ſtatt x die erwähnten Werthe ſetzt. Dieſes leicht zu prüfen, darf man nur bemerken, daß $(1 \pm \sqrt{-1})^2 = \pm 2\sqrt{-1}$; und $(1 \pm \sqrt{-1})^3 = \pm 2\sqrt{-1} - 2$ und $(1 \pm \sqrt{-1})^4 = -4$; und $(1 \pm \sqrt{-1})^5 = -4 \mp 4\sqrt{-1}$ Wenn man den erwähnten letzten Factor von $\frac{dy}{dx}$ mit $x^2 - 2x + 2$ als der quadratiſchen Gleichung, deren Wurzeln $1 \pm \sqrt{-1}$ ſind, dividirt, ſo kömmt $x^2 + 2x - \frac{14}{5}$ zum Quotienten, welches $= 0$ geſetzt zwo mögliche Wurzeln hat.

173. Zuſ. Wenn in der Vorausſetzung (168) ſonſt nichts geändert wird, als daß unter den n bejahten Wurzeln, r gleiche ſind, ſo gehen bey der Abſciſſe, die jeder dieſer r Wurzeln gleich iſt, $r - 1$ Größte in einem Punct zuſammen (166) und die Bogen der krummen Linie auf beyden Seiten dieſes Punctes liegen auf einer Seite der

Axe

Axe oder auf verſchiedenen, nachdem r gerade oder ungerade iſt. (163. III.) Uebrigens bleiben die Sätze 169; 170; 171; noch wahr.

Von den unmöglichen Wurzeln.

174. Lehrſ. Jede beſtimte rationale Gleichung, hat entweder keine unmöglichen Wurzeln, oder unmögliche Wurzeln in gerader Menge. Bekannter maaſſen wird o als eine gerade Zahl angeſehn.

Bew. I. In 163; ſey m gerade ferner u eine bejahte Gröſſe; ſo iſt für x = o die krumme Linie über der Axe. Weil ſie nun für ein bejahtes unendliches x, auch über der Axe iſt, ſo ſchneidet ſie rechter Hand des Anfangs der Abſciſſen, die Axe entweder gar nicht, oder zweymahl, oder viermahl u ſ. w. Sie muß nähmlich zu jedem Durchſchnitte da ſie unter die Axe kömmt, noch einen machen, da ſie wieder herauf kömmt. Die beſtimmte Gleichung alſo die heraus kömmt wenn y = o geſetzt wird, hat keine bejahte Wurzel oder deren eine gerade Zahl.

Nun iſt die krumme Linie auch für das unendliche verneinte x über der Axe; ſchneidet alſo wiederum die Axe linker Hand des Anfangs der Abſciſſen, gar nicht, oder ſie macht eine gerade Menge Durchſchnitte. Alſo giebt es auch nur eine gerade Menge möglicher verneinter Wurzeln.

Folg.

Folglich machen die Mengen beyderley Wurzeln auch eine gerade Summe aus. Und weil die Menge aller Wurzeln ebenfalls gerade iſt, ſo muß die Menge der unmöglichen gerade ſeyn.

II. m gerade u verneint alſo die krumme Linie für x = o unter der Axe. Nach eben der Art zu ſchlieſſen giebt es eine ungerade Menge bejahter, und auch eine ungerade Menge verneinter Wurzeln. Beyder Mengen Summe iſt gerade, alſo auch die Menge der unmöglichen.

III. m ungerade u bejaht giebt eine gerade Menge bejahter Wurzeln, eine ungerade verneinter; beyder Mengen Summe iſt ungerade, und läßt von der ungeraden Menge aller Wurzeln abgezogen eine gerade Menge unmöglicher übrig.

IIII. m ungerade u verneint giebt eine ungerade Menge bejahter Wurzeln und eine gerade verneinter, alſo wieder eine gerade Menge unmöglicher.

Man ſ. hievon Hr. Eulers Alg. 272. IIII. angef. Schrift.

175. Lehrſ. Die Hauptgleichung hat ſoviel Paare unmöglicher Wurzeln, I) ſo viel Paare unmöglicher Wurzeln die Differentialgleichung hat; II) ſo viel den möglichen Wurzeln der Differentialgleichung zugehörige y; kleinſte werden.

Bew. I. Geſetzt, die Differentialgleichung

habe α mögliche Wurzeln, und folglich m — 1 — α unmögliche (164). Wenn nun ihre möglichen Wurzeln, lauter größte y geben, ſo ſind zugleich jede zwey nächſte ſolche y einander entgegengeſetzt. Wären ſie einander nicht entgegengeſetzt, ſondern lägen wie z. E. XW; ON 12 F. auf einer Seite der Axe KQ; ſo wird die Axe zwiſchen ihnen von der krummen Linie entweder geſchnitten oder nicht. Geſchicht das erſte, ſo muß die krumme Linie die Axe zwiſchen O und X entweder zweymahl, oder viermahl, oder ſechsmahl u. ſ. w. ſchneiden, um von N auf die andere Seite der Axe, und denn wieder nach W auf die erſte zu kommen; zwiſchen jeden Paare Durchſchnitte aber fällt ein Größtes (166) alſo wären die genannten y nicht die nächſten Größten. Die krumme Linie ſchneidet alſo zwiſchen ihnen die Axe nicht, und weil ON; XW; entweder Größte oder Kleinſte ſind, ſo müſſen die Ordinaten von ON bis WX entweder abnehmen oder zunehmen, ohne o zu werden, und XW muß ein kleinſtes oder größtes ſeyn, nachdem ON ein größtes oder kleinſtes iſt.

Wenn alſo die Wurzeln der Differentialgleichung lauter Größte geben, ſo fällt zwiſchen jedes Paar der nächſten Größten ein Durchſchnitt, und nur einer; und es giebt dieſerwegen α — 1 Durchſchnitte;

Wenn die äuſerſte Ordinate für eine Wurzel der Differentialgleichung, zur rechten oder zur linken Hand, ein Größtes wie VW oder RS iſt, ſo müſſen die Ordinaten rechter Hand der VW und linker Hand der RS; abnehmen; und weil kein größtes oder kleinſtes mehr folgt, ſo nehmen ſie bis auf o ab, und alſo gibt es rechter Hand von VW und linker Hand von RS, noch einen Durchſchnitt F; und B und von jeder Art nur einen, denn gäbe es mehr, ſo fiele zwiſchen jedes Paar ein Größtes y, (167) und VW; RS, wären nicht die äuſerſten.

Alſo kann die Hauptgleichung nicht mehr als $\alpha - 1 + 2 = \alpha + 1$ mögliche Wurzeln haben, wenn die Differentialgleichung deren α hat, und behält alsdenn $m - \alpha - 1$ unmögliche, ſoviel als die Differentialgleichung hatte. Daß $m - \alpha - 1$ eine gerade Zahl iſt, und ſich alſo dieſe Wurzeln mit Paaren zählen laſſen, iſt ſchon bekannt. (174.)

II. Giebt eine mögliche Wurzel der Differentialgleichung ein kleinſtes y, ſo verlieren ſich dieſer wegen zweene Durchſchnitte und nicht mehr (167) und es giebt in der Hauptgleichung ein Paar unmöglicher Wurzeln; alſo ſoviel Paare, ſo vielmahl ſolches geſchicht.

176. Zuſ. Man wird die Frage, wieviel unmögliche Wurzeln in der Hauptgleichung ſind, entſcheiden, wenn man die Wurzeln der Differen-

tialgleichung ſucht, und die möglichen darunter in die Hauptgleichung ſetzt, und ſieht, ob ſie größte oder kleinſte geben, welches man erfährt, wenn man nebſt jedem y das eine ſolche Wurzel gibt, auch das y ſucht, daß ein etwas gröſſeres oder kleineres x als dieſe Wurzel, giebt, um zu ſehen, ob es gröſſer oder kleiner iſt als das, welches der Wurzel zugehört. Dieſe Arbeit aber kann man ſich durch folgende Betrachtung erleichtern: y iſt ein bejahtes größtes oder kleinſtes, nachdem ddy verneint oder bejaht iſt, (155. III;) und ein verneintes größtes oder kleinſtes; (das iſt, ein kleinſtes oder größtes in der Bedeutung 155. III; oder in der zweyten 153) nachdem ddy bejaht oder verneint iſt, oder y iſt überhaupt in gegenwärtiger Bedeutung ein größtes oder kleinſtes, nachdem $\frac{ddy}{dx^2}$ mit ihm verſchiedene oder einerley Zeichen hat; d. i. nachdem $\frac{yddy}{dx^2}$ verneint oder bejaht iſt.

177. Zuſ. Jede der Gleichungen $p=0$; $q=0$; $r=0$; u. ſ. w. wo p; q; r; die Bedeutungen 155 V; nicht die (164) haben; kann nach (163) in Abſicht auf die nächſthöhere als eine Hauptgleichung betrachtet werden, und hat alſo ſoviel Paare unmöglicher Wurzeln als dieſe nächſthöhere hat. Da hat nun p gegen r eben ſo ein Verhalten wie vorhin y gegen q; Wenn man alſo eine Wur-

Wurzel der Gleichung $p=o$ in $\frac{dy}{dx}$ und in q ſetzt, ſo zeigt ſie ein paar unmögliche Wurzeln in $\frac{dy}{dx}=o$; und folglich (175. I.) ein $y=o$ an, wofern ſie $\frac{dy}{dx}q$ bejaht macht. Eben ſo, wenn man eine Wurzel der Gleichung $q=o$ in p und r ſetzt, und ſie pr bejaht macht, ſo zeigt ſie ein paar unmögliche in $q=o$; und folglich in $p=o$, und in $\frac{dy}{dx}=o$; und in $y=o$ an. Und eine Wurzel von $r=o$ zeigt ein paar unmögliche in $q=o=p=\frac{dy}{dx}=y$ an, wenn ſie q. s bejaht macht, u. ſ. w. Aber das Paar unmögliche Wurzeln, das z. E. dieſes bejahte q. s anzeigte, könnte vielleicht mit einem Paare einerley ſeyn, das durch ein bejahtes p. r angezeigt würde. Alſo darf man nicht in der Hauptgleichung $y=o$ ſo viel Paare unmöglicher Wurzeln annehmen, ſoviel ſich ſolcher bejahter Producte machen laſſen, aber das iſt richtig, daß es nicht mehr Paare unmöglicher Wurzeln in $y=o$ giebt, als ſich mit den Wurzeln der Gleichung $\frac{dy}{dx}=o$ bejahten Producte y. p; und mit denen der Gleichung $p=o$

bejahten Producte $\frac{dy}{dx}$. q und ſo mit den Wurzeln jeder Differentialgleichung, bejahte Producte aus dem vor ihr nächſtvorhergehenden Differentiale in das nach ihr nächſtfolgende machen laſſen. Die bejahten Producte y. p nähmlich zeigen der Gleichung y = o unmögliche Wurzeln der zweyten Art (175. II. und 176) an; aber die übrigen bejahten Producte der Gleichung y = o unmögliche Wurzeln der erſten Art (175. I.)

178. Zuſ. Wenn eine gewiſſe Wurzel der Gleichung $\frac{dy}{dy} = o$ macht, daß p = o wird, ſo nehmen um dieſe Wurzel herum die Ordinaten y beſtändig zu oder ab. (155; VI.) Alſo fällt das y das der Wurzel von $\frac{dy}{dx} = o$ die p = o macht, zugehört, nicht zwiſchen zween Durchſchnitten, und dieſer Umſtand zeigt zwo unmögliche Wurzeln in der Hauptgleichung an, ſo ſind zwo Wurzeln der Gleichung $\frac{dy}{dx} = o$ unmöglich, wenn eine Wurzel der Gleichung p = o in q geſetzt, q = o giebt, u. ſ. w. Wenn nähmlich einerley Werth von x; zugleich zwo nach einander folgende Differentialgleichungen auf o bringt, ſo zeigt ſolches ein paar unmögliche Wurzeln in der Glei-

Gleichung, die vor beyden nächſtvorhergeht, und folglich in der Hauptgleichung an.

179. Zuſ. Wenn einerley Werth von x zugleich $\frac{dy}{dx}$ und p und q auf o bringet, ſo zeigt dieſes gewiß ein paar unmögliche Wurzeln der Hauptgleichung an (178). Das y aber, das dieſem x zugehört, iſt doch ein Größtes in gegenwärtiger Bedeutung, wenn r das ihm entgegengeſetzte Zeichen hat. (155; VII. und 176.) alſo hat es in dieſem Falle auf jeder Seite einen Durchſchnitt oder eine mögliche Wurzel. Dieſe beyden Wurzeln werden unmöglich, wenn y ein Kleinſtes wird, oder r mit ihm einerley Zeichen bekömmt. In gegenwärtigen Falle giebt es alſo ein oder zwey Paare unmöglicher Wurzeln, nachdem yr verneint, oder bejaht iſt.

180. Zuſ. Brächte einerley x; zugleich $\frac{dy}{dx}$ und p und q und r auf o; ſo gäbe es zwo unmögliche Wurzeln wegen p=o; und wenn yr verneint wäre, würde ſolches zwo mögliche anzeigen; die wegen y. r=p wegfallen, daß es daher vier unmögliche giebt.

181. Zuſ. Ueberhaupt erhellt nach dieſer Art zu ſchlieſſen und aus 155 VIII. folgendes: Wenn einerley Werth von x; zugleich $\frac{dy}{dx}$ u. ſ. w. die

erſten 2n Differentialgleichungen auf o bringt, ſo giebt es in der Hauptgleichung 2n unmögliche Wurzeln. Bringt aber einerley Werth von x, die erſten 2n+1 Differentialgleichungen auf o; ſo giebt es 2n oder 2n+2 unmögliche Wurzeln in der Hauptgleichung, nachdem das Product aus dem dieſem x zugehörigen y in das 2n+2te Differential verneint oder bejaht iſt.

Wegen (177) gilt eben dieſes von 2n oder 2n+1 nach einanderfolgenden Differentialgleichungen, wenn es ſchon nicht die erſten ſind; da man denn ſtatt y das Differential nehmen muß, das vor den 2n+1 nach einander folgenden zunächſt vorhergeht.

182. Zuſ. Wenn man die Axe AP mit einer parallelen Bewegung herunter führt, ſo rücken Durchſchnitte wie CD immer näher zuſammen, gehen endlich in einen, wenn die Axe die krumme Linie in H berührte, und werden nachgehends unmöglich, wenn ſie in die Lage KQ kömmt. Daher ſagt man, daß die Wurzeln einer Gleichung durch eine beſtändige Näherung, erſt gleich, darnach unmöglich werden. Dieſes erklärt aber nur die eine Art (175. II.) welche auf das letzte Glied einer Gleichung ankömmt, durch deſſen Veränderung ſolche unmögliche Wurzeln in mögliche und umgekehrt könnten verwandelt werden. Z. E. die Gleichung $x^5 + px^4 + qx^3 + rx^2 + ſx + Ka = y$ würde der krummen Linie auf die Axe KQ bezogen zuge-

gehören, und hätte 4 unmögliche Wurzeln; Aber die $x^5 + px^4 + qx^3 + rx^2 + ſx + Ka - KA = y$ gehörte eben der krummen Linie auf AP bezogen zu, und hätte lauter mögliche Wurzeln. Wenn aber Wurzeln der Differentialgleichungen unmöglich ſind, ſo kömmt die Unmöglichkeit der Wurzeln der Hauptgleichung auf ihre Coefficienten an.

183. Anm. Die Regeln 176. 181. nebſt noch einigen andern, finden ſich in des Herrn Abbé de Gua Recherche du nombre des racines reelles ou imaginaires &c. Mem. de l'Acad. des Sc. 1741.

184. Ex. Geſetzt, man hat eine Gleichung von 48 Graden; deren Differentialgleichung alſo vom 47 iſt; Dieſe Differentialgleichung hat 24 unmögliche Wurzeln, 6 mögliche bejahte, und 17 mögliche verneinte; unter den bejahten findet ſich eine, welche ein Kleinſtes giebt, und unter den verneinten finden ſich deren drey. Alſo giebt es in der Hauptgleichung 24 unmögliche Wurzeln, wegen der 24 unmöglichen ihrer Differentialgleichung (175. I.) und vier Paare wegen der vier kleinſten, (175. II.) folglich 32 unmögliche Wurzeln. Nun geben fünf bejahte Wurzeln der Differentialgleichung Größte. Von dieſen Größten müſſen eine oder zwo mit dem Kleinſten auf eine Seite fallen, nachdem das Kleinſte ein äuſſerſtes iſt oder nicht (167) die übrigen geben vier bejahte Wurzeln, wie man ſich leicht überzeugen kann,

wenn man ſich die Figur entwerfen will. Alſo hat die Gleichung gewiß vier bejahte Wurzeln. Wären die 17 Ordinaten, die verneinten Wurzeln der Differentialgleichung zugehören, lauter Größte, ſo geben ſie 16 Durchſchnitte zwiſchen jedem Paare, und einen linker Hand der äuſſerſten, alſo 17 verneinte Wurzeln, von denen aber wegen der drey kleinſten, 3 . 2 = 6 abgehen, daß alſo 11 verneinte übrig bleiben. Nun ſind 48 − 32 = 16 mögliche Wurzeln, von denen man weiß, daß 4 bejaht, 11 verneint ſind. Eine kann noch bejaht oder verneint ſeyn, nachdem die krumme Linie zwiſchen dem größten, das dem Anfange der Abſciſſen rechter oder linker Hand zunächſt liegt, rechter oder linker Hand geſchnitten wird. Wird aber die Axe zunächſt rechter des Anfangs der Abſciſſen geſchnitten, ſo iſt y verneint für x = 0; Und wird ſie linker Hand geſchnitten, ſo iſt y bejaht für x = 0. Alſo iſt die 16 Wurzel bejaht oder verneint, nachdem der Werth von y für x = 0, d. i. das letzte Glied der Gleichung verneint oder bejaht iſt. Herr Gua hat dieſen letzten Umſtand aus dem Zeichen des letzten Gliedes als ein Product aus den Wurzeln betrachtet herleiten wollen, aber dabey an die unmöglichen Wurzeln nicht gedacht, die in dieſes Product auch kommen.

Anwen-

Anwendung auf die cubiſchen Gleichungen.

185. Ex. Wenn $x^3 * + qx + r = y$ ſo iſt $3x^2 + q = \frac{dy}{dx}$ welches $= 0$ wird, wenn $x = \pm \sqrt{-\frac{1}{3}q}$ Iſt alſo q in der cubiſchen Gleichung bejaht, ſo hat die Differentialgleichung, und folglich die Hauptgleichung zwo unmögliche Wurzeln. (175. I.) Man nehme alſo $x^3 * - px + r = y$ wo p für ſich was bejahtes iſt, und das Glied px wegen des vorgeſetzten Zeichens verneint wird; So iſt $3x^2 - p = \frac{dy}{dx}$ deren Wurzeln $x = \pm \sqrt{\frac{1}{3} p}$, ſind. Sollen nun alle Wurzeln der cubiſchen Gleichung möglich ſeyn, oder die krumme Linie, die ihr zugehört, die Axe dreymahl ſchneiden, ſo muß die Ordinate, die zu $x = + \sqrt{\frac{1}{3} p}$ gehört, ein verneintes, und die zu $x = - \sqrt{\frac{1}{3} p}$ gehört, ein bejahtes Größtes ſeyn. (167) Folglich muß $\frac{1}{3} p \sqrt{\frac{1}{3} p} - p \sqrt{\frac{1}{3} p} + r$ oder $- \frac{2}{3} p \sqrt{\frac{1}{3} p} + r$ verneint ſeyn. Dieſes erfolgt von ſich ſelbſt, wenn r verneint iſt. Iſt aber r bejaht, ſo ſetzt es zum voraus, daß $\frac{4}{9} p^2 . \frac{1}{3} p > r^2$ oder $\frac{1}{27} p^3 > \frac{1}{4} r^2$. Eben ſo ſoll $- \frac{1}{3} p \sqrt{\frac{1}{3} p} + p \sqrt{\frac{1}{3} p} + r$ oder $\frac{2}{3} p \sqrt{\frac{1}{3} p} + r$, bejaht ſeyn. Das iſt es nun allemahl, wenn r bejaht iſt: Iſt aber r verneint, ſo folgt daraus wiederum, daß der erſte bejahte

Theil gröſſer als der andere verneinte, oder $\frac{1}{27}p^3 > \frac{1}{4}r^2$ iſt. Dieſe Vergleichung zwiſchen p und r beſtimmt ſich alſo aus der erſten Vorausſetzung, wenn r bejaht, aus der zweyten wenn es verneint iſt. Folglich enthält jede cubiſche Gleichung, deren zweytes Glied fehlt, unmögliche Wurzeln wie 175. I. wenn der Coefficient des dritten Gliedes bejaht iſt, und wie 175. II wenn $\frac{1}{27}p^3 < \frac{1}{4}r$ welche Regeln bekannt ſind. (S. Alg. 699. 700.) Wenn $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}r^2$ ſo wird eine von beyden Ordinaten, die zu $x = \pm \sqrt{\frac{1}{3}p}$ gehören, $= 0$ oder die krumme Linie berühret da die Axe und es gehen zweene Durchſchnitte in einen zuſammen, oder die Gleichung hat zwo gleiche Wurzeln. Wenn man ſich die Figuren entwerfen will, ſo wird man gleich ſehen, daß dieſe Berührung rechter oder linker Hand des Anfangs der Abſciſſen fallen muß, nachdem die krumme Linie beym Anfange der Abſciſſen über oder unter der Axe iſt. Alſo ſind die gleichen Wurzeln der Gleichung beyde bejaht oder verneint, nachdem ihr letztes Glied bejaht oder verneint iſt.

In $x^3 * - 27x + 54 = 0$, iſt $p = 27$; $r = +54 = 2p$ alſo $\frac{1}{4}r^2 = p^2 = \frac{1}{27}.27^3 = \frac{1}{27}p^3$. Die gleichen Wurzeln ſind beyde $+3$, bejahte wie das letzte Glied. Die dritte muß wegen des fehlenden zweyten Gliedes $= -2.3 = -6$ ſeyn.

Wenn

Wenn alle drey Wurzeln möglich ſind, ſo iſt $\frac{r}{p\sqrt{p}}$ kleiner als $\frac{2}{3\sqrt{3}}$ oder als $\frac{2}{3}$. tang 30°

In Hr. Lamberts Zuſätzen zu den logarithmiſchen und trigonometriſchen Tabellen dient die 29. Tafel ſolche Gleichungen aufzulöſen. Sein 89. §. giebt die Theorie davon.

Erweis einer Regel, die Zahl der bejahten und verneinten Wurzeln in einer Gleichung aus den Zeichen der Coefficienten zu finden.

186. Erkl. Wenn in einer Gleichung zweene nach einander folgende Coefficienten einerley Zeichen, beyde + oder beyde — haben, ſo heißt dieſes eine Folge der Zeichen (ſucceſſio) wenn ſie aber beyde verſchiedene Zeichen, einer + der andere — haben, ſo heißt ſolches eine Abwechſlung (permutatio).

187. Lehrſ. Eine quadratiſche Gleichung, deren Wurzeln alle möglich ſind, hat ſoviel bejahte Wurzeln, ſoviel in ihr Abwechslungen von Zeichen ſind, und ſoviel verneinte, ſoviel ſie Folgen von Zeichen hat.

Bew. Wenn p; q; allemahl bejahte Gröſſen bedeuten, ſo ſind folgende vier Formen von quadratiſchen Gleichungen möglich:

I) $x^2 + px + q$; II) $x^2 - px + q$; III) $x^2 + px - q$; IIII) $x^2 - px - q$; I. hat lauter Folgen, weil das erſte Glied allemahl + hat; II hat zwo Abwechslungen + — und — + III hat eine Folge + + und eine Abwechſelung, + —; IIII eine Abwechslung und eine Folge + — und — —. Die Wurzeln ſind von I; $-\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}$ beyde verneint, weil der Irrationaltheil als kleiner als der Rationaltheil iſt, und ſind auch in der Gleichung zwo Folgen; von II; $+\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}$, beyde bejaht wie in der Gleichung zwo Abwechslungen ſind; von III; $-\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}pp + q)}$ eine bejaht, die andere verneint, und eben ſo von IIII; $+\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}pp + q)}$, wie in dieſen beyden Gleichungen eine Folge und eine Abwechslung iſt.

188. Lehrſ. Eine Reihe der Zeichen + und — wie man will unter einander vermengt, doch ſo, daß ſie ſich mit + anfängt, hat Abwechslungen in gerader Zahl, wenn ſie ſich mit +; und in ungerader, wenn ſie ſich mit — endigt.

Bew. Man ſetze eine ſolche Reihe Zeichen werde durch ein neues vermehrt, aber ſo, daß ihr erſtes Glied +, und das letzte wie es zuvor war, + oder — bleibe. Ich behaupte, die Abwechslungen werden alsdenn entweder gar nicht, oder um ein Paar vermehrt werden. Denn wenn

man

man das Zeichen irgendwo mitten in die Reihe ſetzt, ſo bringt man es entweder zwiſchen zwey ähnliche (+ zwiſchen zwey +; oder — zwiſchen zwey —) und denn kömmt keine neue Abwechslung zu den vorigen; Bringt man es zwiſchen zwey ihm unähnliche, ſo entſtehen zwo neue Abwechslungen, zwiſchen ein ähnliches und ein unähnliches, ſo wird die Abwechslung; die vorhin zwiſchen dieſen beyden war aufgehoben, ſtatt ihrer aber kömmt eine andere Abwechslung, und noch eine Folge. Setzt man das neue Zeichen vor das erſte oder nach dem letzten, ſo muß es ihm ähnlich ſeyn, und giebt alſo eine neue Folge, keine Abwechslung. In allen dieſen Fällen werden die Abwechslungen entweder nicht, oder um ein Paar vermehrt. Iſt alſo der Satz von einer Reihe wahr, ſie mag ſo wenig Zeichen haben als ſie will, ſo iſt er auch von jeder andern wahr, die mehr Zeichen enthält. Die kürzeſte Reihe, die ſich mit + endigt, iſt + — + und hat eine gerade Zahl von Abwechslungen, alſo haben alle Reihen, die ſich mit + endigen, eine gerade Zahl.

Die kürzeſte Reihe, die ſich mit — endigt, iſt + — und hat nur eine Abwechslung, alſo haben alle Reihen, die ſich mit — endigen, eine ungerade Zahl von Abwechslungen, denn jedes neue Zeichen, das hinzukömmt vermehrt die vorige Zahl der Abwechslungen entweder nicht, oder um ein Paar.

189. Lehrſ. Geſetzt, die Gleichung $\frac{dy}{dx} = 0$ (167) habe lauter mögliche Wurzeln; und darunter ſoviel bejahte, als ſie Abwechslungen hat: Die Gleichung $y = 0$ habe auch lauter mögliche Wurzeln; So behaupte ich, die Gleichung $y = 0$ werde auch ſoviel bejahte Wurzeln haben als ſie Abwechslungen hat.

Bew. In $\frac{dy}{dx} = 0$ ſind ſoviel Folgen und Abwechslungen als im $x^m + px^{m-1} \ldots + tx$ weil $\frac{dy}{dx}$ nur aus dieſem Theile der Hauptgleichung wird, wenn man jedes Glied nach den Regeln des Differentiirens ändert, welches aber die Zeichen nicht ändert.

Dieſe Zahl der Abwechslungen, und zugleich der bejahten Wurzeln in der Differentialgleichung ſey $= n$; und gerade, ſo iſt das letzte Zeichen in der Differentialgleichung + (188) alſo können die beyden letzten Glieder der Hauptgleichung $+ tx + u$ oder $+ tx - u$ heiſſen. Im erſten Falle iſt die Anzahl der Durchſchnitte für bejahte Abſciſſen, oder der bejahten Wurzeln $= n$; im zweyten $n + 1$ (171). Im erſten Falle aber ſind in der Hauptgleichung n Abwechslungen, wie in der Differentialgleichung im zweyten $n + 1$; alſo

beyde.

beydemahl ſoviel bejahte Wurzeln als Abwechslungen.

Nun ſey n ungerade. So iſt der Differentialgleichung letztes Zeichen — (188) alſo ſind der Hauptgleichung beyde letzten Glieder $- tx + u$ oder $- tx - u$. Im erſten Falle ſind $n + 1$ im zweyten n bejahte Wurzeln (170). Jedesmahl ſo viel als Abwechslungen.

190. Lehrſ. In jeder Gleichung, die lauter mögliche Wurzeln hat, giebt es ſoviel bejahte, ſoviel es Abwechslungen giebt.

Bew. Der cubiſchen Gleichung, die lauter mögliche Wurzeln hat, Differentialgleichung iſt eine quadratiſche, die lauter mögliche Wurzeln hat. (175. I.) Von dieſer nun iſt der Satz erwieſen, (187) und folgt alſo von ihr auf die cubiſche (189). Eine biquadratiſche, die lauter mögliche Wurzeln enthält, hat zur Differentialgleichung eine cubiſche die auch lauter mögliche Würzeln enthält, (175. I.) Von der cubiſchen iſt der Satz nun jetzo erwieſen, alſo folgt er für die biquadratiſche (189). Und ſo von der biquadratiſchen auf die vom fünften Grade, deren Differentialgleichung ſie iſt, und ſo ohne Ende fort von jeder Gleichung auf die nächſthöhere, von der ſie als eine Differentialgleichung angeſehen werden kann.

Daß dieſe Schlüſſe wegfallen, wenn nicht alle Wurzeln möglich ſind, wird aus ihren Gründen, 166. u. f. erhellen. In der That kann man auch

unmögliche Wurzeln weder als bejaht noch als verneint anſehen, daß es alſo natürlich iſt, wenn ſie ſich nicht nach einer ſolchen Regel beurtheilen laſſen.

191. Zuſ. Eine Gleichung vom Grade m hat m + 1 Glieder, und m Folgen und Abwechslungen zuſammen; hat ſie alſo n Abwechslungen und bejahte Wurzeln, ſo giebt es in ihr m — n Folgen und verneinte Wurzeln. Wenn n = 0, ſo erhellt, daß eine Gleichung, die lauter Folgen hat, deren Glieder alſo bejahte Zeichen haben müſſen, keine andern als verneinte Wurzeln haben kann.

192. Zuſ. Wenn man das Zeichen des zweyten, vierten, ſechſten u. ſ. w. der geraden Glieder einer Gleichung ändert, ſo verwandelt man dadurch die Abwechslungen in Folgen, und die Folgen in Abwechslungen, alſo die verneinten Wurzeln in bejahte, und die bejahten in verneinte.

Ex. $x^3 - 3x^2 - 10x + 24$ hat zwo Abwechslungen und eine Folge, zwo bejahte Wurzeln 2; 4; und eine verneinte — 3; $x^3 + 3x^2 - 10x - 24$ hat zwo Folgen und eine Abwechslung, zwo verneinte Wurzeln — 2; — 4; und eine bejahte + 3.

193. Anm. Die krummen Linien (163) ſind von verſchiedenen Mathematikverſtändigern zur Erläuterung der Lehre von den Gleichungen gebraucht worden. Der ſeel. Hauſen machte mir ſie bekannt, als er mich den Gebrauch der Reihen (Alg. 304.) lehrte, denn man ſieht leicht, daß die Hauptlinie eine dortige Hauptreihe,

und die Differentiallinien, Differenzenreihen für verſchwindende e vorſtellen. Man kann auch durch Betrachtung dieſer krummen Linien vieles, das dieſe Reihen, und darauf beruhende Eigenſchaften der Gleichungen betrifft leicht zeigen, das ich in einer 1739. zu Leipzig gehaltenen Disputation Theoria radicum in aequationibus aus der bloſſen arithmetiſchen Betrachtung der Reihen mühſamer hergeleitet habe. Einige Zeit nach Hauſens Tode kam ich bey Unterſuchung dieſer krummen Linien auf den Beweis des Satzes (190). Hauſen hat mir nie etwas geſagt, daraus ich hätte urtheilen können, daß er dieſe Folge aus den krummen Linien gekannt hätte. Meine Entdeckung war mir deſto angenehmer, weil dieſer Satz faſt von keinem Algebraiſten bis dahin war allgemein erwieſen worden. Man hatte ſich begnügt ſeine Richtigkeit durch Exempel zu zeigen. Reynault hat ihn deßwegen, wie ich in der Vorrede zur Algebra erinnert habe, aus ſeiner Analyſe demontreé weggelaſſen. Der verſtorbene M. Friedr. Wilh. Stübner hat in einer ſehr weitläuftigen Diſputation einen Beweis dieſes Satzes gegeben, welchen durchzugehen aber meine Geduld nie zugereicht hat; Er gründet ſich auf die Beſchaffenheit der Coefficienten und ihren Urſprung aus den Wurzelgleichungen. Der Herr G. R. v. Segner hat noch in Jena einen andern Beweis bekannt gemacht, der aber wenn man alles bey ihn aus einander ſetzen will, ebenfalls in groſſe Weitläuftigkeiten zu führen ſcheinet. Meiner hat mit keinem jener beyden etwas gemein. Ich habe ihn 1745. drucken laſſen, und dem ſeel. Pr. Heinſius, der damahls ſein mathematiſches Lehramt in Leipzig antrat, zugeeignet. In den Memoires de l'Acad. des Sciences 1741; von denen ich erſt den holländiſchen Nachdruck von 1747. bekommen, finden ſich 106 u. f. S. zweene Beweiſe dieſes Satzes von Herrn Abt Gua. Herr Gua hat ſowohl in dieſer Abhandlung 96 S. als auch in einer andern die ich vorhin angeführt habe (daſ.

582. S.) verſchiedenes, das zur Geſchichte der Algebra gehört, beygebracht. Dieſen Satz hat man insgemein dem Engelländer Thomas Harriot zugeſchrieben, und er iſt daher auch unter dem Nahmen Harriots Lehrſatz bekannt. Herr Gua aber eignet ihn dem Deſcartes zu.

Von den Gränzen der Wurzeln.

194. Lehrſ. Weil die Hauptlinie mit allen ihren Differentiallinien (163; 164) alle rechter Hand über die Axe kommen (163) ſo giebt es ein x, das zugleich y; und $\frac{dx}{dy}$ und $\frac{ddy}{dx^2}$, und $\frac{d^3y}{dx^3}$ u. ſ. w. die Hauptformel und alle Differentialformeln, bejaht macht. Ich ſage, wenn man ein ſolches x gefunden hat, ſo werden alle dieſe Formeln auch von jedem gröſſern bejahten, wenn es bejaht war, und von jedem kleinern verneinten, wenn es verneint war, bejaht werden.

Bew. Die letzte oder (m-1)te Differentiallinie iſt eine gerade Linie, deren Gleichung.

$m.(m-1)\ldots 2x+(m-1).(m-2)\ldots p$, wenn nun in dieſer einmahl eine Ordinate für ein gewiſſes x bejaht iſt, ſo ſind alle Ordinaten für gröſſere bejahte oder kleinere verneinte x, kurz, alle Ordinaten zur rechten der angenommenen bejaht, weil die gerade Linie ihre Axe nur einmahl ſchnei-

ſchneidet. Nun ſtellen dieſe Ordinaten die Differentiallinien der Ordinaten der letzten Differentiallinie ohne eine vor: Dieſe (m-2) te Differentiallinie, hatte für das angenommene x eine bejahte Ordinate, und die Differentialien ihrer Ordinaten, die Ordinaten der geraden Linie, ſind rechter Hand dieſer Ordinate alle bejaht, folglich wachſen bejahte Ordinaten dieſer (m-2)ten Differentiallinie rechter Hand ohne Ende fort. Aber ihre Ordinaten ſind Differentiale der Ordinaten der (m-3) ten Differentiallinie, die für das angenommene x eine bejahte Ordinate, und die Differentiale ihre Ordinaten rechten Hand dieſer angenommenen, als die Ordinaten der (m 2) ten, alle bejaht, folglich auch lauter wachſende bejahte Ordinaten nach der rechten Hand hat. Und ſo folgt, daß wenn eine Linie, von dem angenommen x an, rechter Hand bejahte wachſende Ordinaten hat, und dieſem x in der nächſtvorhergehenden Linie auch eine bejahte Ordinate zugehört, daß in der nächſtvorhergehenden Linie, bejahte Ordinaten rechter Hand der angenommenen wachſen, weil ihre Differentiale, die Ordinaten der nächſtfolgenden Linie bejaht ſind. Dieſe Schlüſſe gehen alſo durch alle Linien bis zur Hauptlinie fort, und rechter Hand des bejahten y das dem angenommenen x zugehört, müſſen bejahte Ordinaten ohne Ende fort wachſen.

195. Lehrſ. Weil die m-1 te Differentiallinie eine gerade Linie iſt, und die Exponenten

von x in den Differentiallinien abwechſelnd gerade und ungerade werden, ſo folgt, daß die m-1te, m-3te, m-5te, u. ſ. w. Differentiallinien, von ungeraden Graden, und eben ſo die m-2te, m-4te, m-6te, u. ſ. w. von geraden ſind. Jene alſo kommen zur linken Hand gewiß unter die Axe, und dieſe über die Axe, (163) daher iſt ein x möglich, dem in der m-1ten, m-3ten, m-5ten, m-2n+1ten Differentiallinie verneinte, in der m-2ten, m-4ten, m-6ten, m-2nten bejahte Ordinaten zugehören, in der Hauptlinie aber eine bejahte oder verneinte Ordinate zugehört, nachdem m gerade oder ungerade iſt. Ich ſage, wenn einmahl ein ſolches x iſt gefunden worden; ſo ſind alle Ordinaten linker Hand der ihm zugehörigen, in der m-1ten, m-3ten, m-5ten, u. ſ. w. Differentiallinie verneint, nachdem m gerade oder ungerade iſt.

Beweis. Wenn einmahl eine Ordinate der geraden Linie verneint iſt, ſo ſind alle ihre Ordinaten linker Hand der angenommenen, wachſende verneinte. Sie ſtellen die Differentialien der Ordinaten der m-2ten Differentiallinie vor: aus dem aber, was von den Differentiallinien allgemein geſagt worden. (120.) erhellt, daß angenommen wird, daß die Ordinate jeder Differentiallinie, die Differenz vorſtellt, die herauskömmt, wenn man der Linie, welcher die gegebene Differentiallinie

linie zugehört, ihre Ordinate zur linken von der nächſten zur rechten abzieht. Wenn alſo die Ordinaten einer Differentiallinie verneint ſind, ſo bedeutet dieſes, daß der Linie, der ſie als Differentiallinie zugehört, ihre Ordinaten linker Hand von denen rechter Hand abgezogen, was verneintes geben.

Gehört alſo zu einerley Abſciſſe in der m - 1 ten Differentiallinie eine verneinte, und in der m 2ten eine bejahte Ordinate, und ſind die Ordinaten der m - 1 ten linker Hand derſelben alle verneint, ſo giebt linker Hand der Ordinate, die dem angenommenen x in der m - 2 ten Differentiallinie zugehört, jede linke Ordinate von der nächſten abgezogen was verneintes, d. i. ſie iſt eine gröſſere bejahte, und die bejahten Ordinaten wachſen linker Hand ohne Ende.

Weil nun eben dieſem x in der m - 3 ten Differentiallinie eine verneinte Ordinate zugehört, und der m - 2 ten Ordinaten, dieſer m - 3 ten Differentiale vorſtellen, ſo giebt linker Hand der angenommenen verneinten Ordinate, jede linke Ordinate von der nächſten rechten abgezogen was bejahtes, d. i. ſie iſt ein gröſſeres verneintes, und die verneinten Ordinaten wachſen linker Hand ohne Ende fort.

Jede m - 2n + 1 te Differentiallinie verhält ſich gegen die ihr nächſte m - 2n te wie die m - 1 te gegen die m - 2te; Und jede m - 2n te gegen die m 2n - 1

te, wie die m-2te gegen die m-3te. Alſo geht dieſer Beweis durch alle Differentiallinien eben ſo fort.

Wenn m gerade iſt, ſo iſt die erſte Differentiallinie von einem ungeraden Grade; und hat vermöge des Beweiſes von dem angenommenen x an, linker Hand lauter wachſende verneinte Ordinaten; dieſem x aber gehört in der Hauplinie eine bejahte Ordinate zu, und ſie hat wegen der verneinten Ordinaten ihrer Differentiallinie, wie im Beweiſe iſt dargethan worden, lincker Hand lauter wachſende bejahte Ordinaten.

Wenn m ungerade iſt, ſo iſt die erſte Differentiallinie von einem geraden Grade, und hat linker Hand des angenommenen x lauter wachſende bejahte Ordinaten, Differentiale der Ordinaten der Hauptlinie, die für das angenommene x eine verneinte Ordinate, und folglich linker Hand derſelben lauter wachſende verneinte hat.

196. Aufg. I. Eine bejahte oder verneinte Zahl zu finden, die gröſſer als die gröſte bejahte Wurzel einer Gleichung, oder kleiner als die kleinſte verneinte iſt, wenn die Gleichung keine bejahten Wurzeln hat.

II. Eine verneinte oder bejahte Zahl zu finden, die gröſſer als die gröſte verneinte Wurzel, oder kleiner als die kleinſte bejahte iſt, wenn die Gleichung keine verneinten Wurzeln hat.

Aufl.

Aufl. Man ſetze die Gleichung = y, und mache alle Differentialformeln an der Zahl m − 1. Man ſuche ein x das y und alle Differentialien bejaht macht. Dieſes thut der Foderung I genug (194). Man ſuche ein x das die m−1te Differentialformel verneint, die m−2te bejaht, und ſo alle abwechſelnd verneint und bejaht macht, da denn y bejaht oder verneint werden wird, nachdem m gerade oder ungerade iſt. Dieſes thut der Foderung II genug (195).

197. Ex. Bey nachſtehender Gleichung habe ich, die Rechnung zu verkürzen, in den Differentialformeln, wo ſich mit einer Zahl durchgängig dividiren lieſſe, dividirt.

$$x^5 - 2x^4 - 10x^3 + 30x^2 + 63x - 120 = y$$

$$5x^4 - 8x^3 - 30x^2 + 60x + 63 = \frac{dy}{dx}$$

$$5x^3 - 6x^2 - 15x + 15 = \frac{ddy}{4 . dx^2}$$

$$5x^2 - 4x - 5 = \frac{d^3y}{3 . 4 . dx^3}$$

$$5x - 2 = \frac{d^4y}{2 . 3 . 4 . dx^3}$$

Setzt man hier + 2 ſtatt x ſo werden die Werthe aller Formeln, von unten hinauf: + 8; 7; 1; 79; 46; alſo iſt 2 gröſſer als die größte bejahte Wurzel. Eben ſo giebt x = − 3 von unten hinauf

$-15 - 2 = -17$

$+45+12-5=+52$
$-135-54+45+15=-129$
$+405+216-270-180+63=+234$
$-243-162+270+270-189-120=-74$
Alſo iſt — 3 die Zahl, die der Foderung II genug thut, und die Gränzen der Wurzeln ſind — 3 und + 2.

198. Zuſ. Will man alſo wiſſen, ob dieſe Gleichung ganze Zahlen zu Wurzeln hat, ſo darf man aus allen Diviſoren von 120, nur — 2; — 1; und + 1 verſuchen, (Alg. 294.) auch ſieht man, was für Zahlen man für die erſten Näherungen annehmen kann, wenn man die Irrationalwurzeln durch Näherung ſuchen will. (Alg. 317.)

199. Anm. In der Gleichung (197) gehören zu
$x=-3;\ -2;\ -1;\ 0;\ +1;\ +2$
$y=-74;\ -110;\ -146;\ -120;\ -38\ +46;$
woraus ſich ſchlieſſen läßt, daß ſie nur eine mögliche Wurzel zwiſchen + 1 und + 2 hat.

200. Anm. Newton trägt dieſe Regel (196) ohne Beweis vor. Ar. vn. art. de limitib. aequat. p. 195. Statt des zweyten Theils, verwandelt er die verneinten Wurzeln in bejahte durch Veränderung der Zeichen. (192) Es hat mir aber natürlicher geſchienen, zu zeigen, wie man ſich ohne eine ſolche Verwandelung zu helfen hat.

Der

Der Rechnungen des Unendlichen

zweyter Theil.

Die Integralrechnung.

201. **E**rkl. Das Integral oder die Summe einer Differentialgröſſe, heißt die Gröſſe, aus deren Differentiirung die Differentialgröſſe entſtanden iſt. Und aus einer gegebenen Differentialgröſſe, die finden, durch deren Differentiation ſie entſtanden iſt, heißt ſie integriren oder ſummiren. In der Fluxionenrechnung, die flieſſende Gröſſe aus der Fluxion finden (ex fluxione inuenire fluentem).

202. Willk. Satz. Man bezeichnet die Summe mit dem Buchſtaben ſ vor das Differential geſetzt.

203. Zuſ. So iſt

I) Wenn $dx + dy = o$; $\int (dx + dy) = x + y = a$ (23)

II) $\int (ydx + xdy) = xy$ (24)

III) $\int \left(\frac{ydx - xdy}{yy}\right) = \frac{x}{y}$ (26)

IIII) $\int n x^{n-1}\, dx = x^n$ (30)

V) $\int b x^{m-1}\, dx = \int b.\frac{1}{m}.\, m x^{m-1}\, dx =$

$b.\frac{1}{m}.\int m x^{m-1}\, dx = b.\frac{1}{m}.\, x^m$

204. Zuſ. Weil jede veränderliche Gröſſe eben das Differential behält, wenn eine beſtändige zu ihr addirt oder von ihr abgezogen wird; ſo ſind von dieſen Integralen, die drey II; III; IIII eigentlich

$xy + Conſt; \frac{x}{y} + Conſt; x^n + Conſt;$ Wo

Conſt. eine unveränderliche bejahte oder verneinte Gröſſe bedeutet, die aus den Umſtänden der Aufgabe muß beſtimmt werden.

Von der Quadratur der krummen Linien.

205. Aufg. Das Differential der Fläche einer krummen Linie CPM 1 Fig. zu finden.

Aufl. Die Abſciſſe wachſe um das endliche Stücke PQ und die Ordinate werde QN. So wächſt die Fläche um das Stück PMNQ. Man ziehe NB mit der Axe parallel, bis ſie der verlängerten Ordinate in B begegnet. So iſt das Stück, um welches die Fläche gewachſen iſt = PMSQ + MNS der letzte Theil iſt gröſſer als das geradelinichte Dreyeck MNS; und kleiner als das

Rechteck MBNS. Man heiſſe alſo die Fläche Z und ihr endliches Wachsthum ΔZ; ſo iſt

$$\Delta Z < PM.PQ + NS.PQ$$

$$\Delta Z > PM.PQ + \tfrac{1}{2} NS.PQ$$ oder

$$\frac{\Delta Z}{PM.PQ} < 1 + \frac{NS}{PM} \text{ und } > 1 + \frac{NS}{2.PM}$$

Weil aber die Ordinate NQ der MP ſo nahe rücken kann als man will, ſo können $\frac{NS}{PM}$ und $\frac{NS}{2PM}$ unendlich abnehmen. Wolte man annehmen $\frac{\Delta Z}{PQ.PM} = 1 + R$ ſo daß R eine angebliche Gröſſe bedeutete, und der Quotient $\frac{\Delta Z}{PQ.PM}$ der Einheit nicht näher als um dieſe Gröſſe kommen könnte, ſo wäre $1 + R < 1 + \frac{NS}{PM}$ oder $R < \frac{NS}{PM}$ aber $\frac{NS}{PM}$ kann unendlich abnehmen, und alſo kann R keine Gröſſe bedeuten, die ſich allemahl angeben lieſſe.

Der Quotient $\frac{\Delta Z}{PQ.PM}$ kann alſo durch unendliche Näherung der Ordinaten, der Einheit unendlich nahe kommen, daß man ihn alſo, wenn es verſtattet iſt, die Ordinaten ſo nahe als man will anzunehmen, der Einheit gleich ſetzen muß. In die-

dieſem Falle, wenn ſich die Ordinaten einander unendlich nähern, verwandelt ſich PQ in dx und ΔZ in dZ; alſo iſt $\frac{dZ}{ydx} = 1$ oder $dZ = ydx$.

206. Anm. Wenn man MPpm für das Differential der Fläche, und Mm für eine gerade Linie annimmt, ſo iſt $MPpm = ydx + \frac{1}{2}dxdy$ welches letztere in Vergleichung des erſten verſchwindet. So trägt man den Beweis insgemein vor, und ſtellt ſich die Fläche krummer Linien in lauter ſolche kleine Theilchen wie MmPp getheilt vor. Die ganze Fläche finden, heißt alsdenn alle dieſe Theilchen zuſammen addiren, daher man ſich hier das Integriren, welches dieſes verrichtet, als ein wirkliches Summiren vorſtellt.

207. Aufg. **Eine krumme Linie zu quadriren, oder ihre Fläche durch x und y auszudrücken.**

Aufl. Weil die Fläche jeder krummen Linie zu ihrem Differentiale $dZ = ydx$ hat, (205) ſo drücke man aus der Natur der krummen Linie, y durch x, oder dx durch y und dy aus, und ſuche die Gröſſe, aus deren Differentiation dieſes ydx entſtanden ſeyn kann, oder man integrire. (201) Dieſe Gröſſe wird Z ſeyn. Z muß nähmlich eine ſolche Function von x und y, ſeyn, deren Differential für jede Abſciſſe und die ihr zugehörige Ordinate ydx iſt, und folglich findet man Z wenn man dieſe Function findet.

208. Aufg. Die Parabel CMP zu quadriren, wo CP = x; der Parameter = b; die Gleichung $bx = yy$.

Aufl. Hier iſt $dZ = ydx = b^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx$. Wenn man alſo in der fünften Formel (203) ſtatt des dortigen b; m − 1; hier $b^{\frac{1}{2}}$; $\frac{1}{2}$; ſetzt, ſo wird $m = \frac{3}{2}$ und $Z = \int y\,dx = b^{\frac{1}{2}}.\ \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} x \sqrt{bx} +$ Conſt. Um dieſe Conſt, die für alle x einerley bleiben ſoll, zu beſtimmen, ſetze man $x = 0$; aber da wird auch $Z = 0$, und $0 = 0 +$ Conſt, folglich Conſt $= 0$. und $Z = \frac{2}{3} b \sqrt{bx} = \frac{2}{3} xy$, oder die Fläche der Parabel iſt $\frac{2}{3}$ des Rechtecks unter ihren Coordinaten CP. PM.

209. Anm. Die Quadratur der Parabel und überhaupt die erſte Quadratur einer krummen Linie hat Archimedes entdeckt, und in einem beſondern Buche abgehandelt.

210. Aufg. Alle krumme Linien zu quadriren, die unter der Gleichung $y = \sqrt[m]{(x + a)}$ enthalten ſind.

Aufl. Hier iſt $dZ = (x + a)^{\frac{1}{m}} dx$. Man ſetze $x + a = u$ alſo $dx = du$ ſo iſt $dZ = u^{\frac{1}{m}} du$ folglich (203. V.)

$$Z = \frac{m}{1+m} \cdot u^{\frac{1+m}{m}} + \text{Conſt} = \frac{m}{1+m} (x+a)^{\frac{1+m}{m}} + \text{Conſt}.$$

Soll nun $Z = 0$ für $x = 0$ ſeyn, ſo iſt

$$0 = \frac{m}{1+m} \cdot a^{\frac{1+m}{m}} + \text{Conſt}.$$ Alſo

$$\text{Conſt} = - \frac{m}{1+m} \cdot a^{\frac{1+m}{m}}$$ und

$$Z = \frac{m}{1+m} \left((x+a)^{\frac{1+m}{m}} - a^{\frac{1+m}{m}} \right)$$

211. Aufg. Die Hyperbel, der die Gleichungen $y = \frac{a^3}{x^2}$ zugehört, wo AP 14 §. $= x$; hat zwo Aſymptoten AF für $x = 0$; AE für $x = \infty$; und zieht ſich, weil $+$ und $-$ x einerley y, und allemahl ein bejahtes, geben, mit zwo gleichen und ähnlichen Hälften BCD, bcd; an beyden Seiten der Aſymptot AF, aber an einer der Aſymptote eAE hin. Man verlangt ihre Quadratur.

Aufl.

Aufl. $dZ = a^3 . x^{-2} dx$. Nun ſind b, $m-1$, (203. V) hier a^3; -2; alſo $m = -1$; und $Z = a^3 . \frac{1}{-1} x^{-1} + C = \frac{-a^3}{x} + C$. Setzt man in dieſem Ausdrucke $x = 0$ ſo wird er unendlich, welches zeigt daß er nicht den Raum AFBMP bedeuten kann. Denn dieſen Raum müßte man von AF oder $x = 0$ an rechnen; und wenn er alſo für $x = 0$ auch $= 0$ ſeyn ſollte, ſo müßte die Conſt eine unendliche Gröſſe ſeyn, um mit dem unendlichen Werthe von $\frac{a^3}{x}$ für $x = 0$ auch 0 zu geben, und dabey kann man ſich nichts vorſtellen.

Aber das Differential $ydx = PM . Pp$ kann ſo gut ein Differential des Raumes DMPE als des Raumes AFBMP ſeyn, und das Integral alſo auch jenen Raum bedeuten. Dieſes findet nun hier ſtatt, und wird durch das verneinte Zeichen vor $\frac{-a^3}{x}$ angedeutet. Wie nähmlich ein bejahter Werth von Z den Raum zwiſchen dem Anfange der Abſciſſen und der Ordinate andeutet, ſo deutet ein verneinter den Raum an, der an eben der Ordinate, aber nicht auf der Seite liegt, auf welcher ſich der Anfang der Abſciſſen befindet.

Dieſes erhellt auch daraus, daß $\frac{a^3}{x}$ abnimmt,

wenn x zunimmt; Alſo kann es gewiß nicht den Raum, von AF an gerechnet, bedeuten, denn der nimmt gewiß mit der Abſciſſe zu. Aber der Raum DEPM nimmt ab, indem die Abſciſſe wächſt. Wenn alſo DEPM $= - \frac{a^3}{x}$ + Conſt, ſo ſey DEPM $= 0$ für $x = \infty$ Dieſes giebt $0 = 0 +$ Conſt oder Conſt $= 0$ und DEPM $= - \frac{a^3}{x}$

Setzte man $Z = 0$ für $x = b$, ſo würde Conſt $= \frac{a^3}{b}$ u. $Z = \frac{a^3 . (x-b)}{bx}$ = GCMP wenn AG=b

212. Zuſ. So iſt überhaupt für alle Hyperbeln für die $y = \frac{a^{m+1}}{x^m}$; $dZ = a^{m+1} x^{-m} dx$ und $Z = \frac{-a^{m+1}}{(m-1)x^{m-1}}$ wo Z allemahl einen Raum wie EDMP bedeutet, Wallis, (Ar. inf. ſchol. prop. 101 fol. 407 et Prop. 104. fol. 409.) hat dieſe verneinten Räume mehr als unendlich (plusquam infinita genannt; aber Varignon (Mem. de l'Ac. des ſc. 1706. p. 15;) die Begriffe derſelben gehörig aus einander geſetzt. Man ſ. auch Leibnizens Gedanken davon Act. Er. Lipſ. 1711. p. 167. ſequ.

Von

Von den Logarithmiſchen Differentialen.

213. Erkl. I. Eine krumme Linie, deren Abſciſſe die Logarithme der Ordinate vorſtellte, lieſſe ſich folgendergeſtalt verzeichnen. Durch A, den Anfang der Abſciſſen, 15 Fig. richte man ein Perpendikel AB = 1 auf. Man nehme ferner die Abſciſſe AP = AB = 1; und gebe ihr eine willkührliche Ordinate PC = c; ſoll nun die Abſciſſe AR = x der Ordinate RE = y zugehören, ſo muß man die Verhältniß AB : PC ſo oft nehmen, um die Verhältniß AB : RE zu bekommen, ſo oft AP in AR enthalten iſt (Ar. VI. E. 18). Iſt $\frac{AR}{AP}$ keine ganze Zahl, ſo heißt dieſes daß man ein Stück der Verhältniß AB : PC etliche mahl nehmen muß. Z. E. wenn AR = $\frac{7}{2}$ AP; ſo wäre AB : RE = $\frac{7}{2}$ (AB : PC) (Ar. VI. 27.)

II. Alſo iſt $\frac{RE}{AB}$ ſo groß als des Quotientens $\frac{PC}{AB}$ Potenz deren Exponent $\frac{AR}{AB}$ iſt, das iſt, weil man AB = 1 ſetzt $y = c^x$ (Ar. VI. 15). Die krumme Linie nun der dieſe Ordinaten zugehören heißt die logarithmiſche.

III. Wenn alſo einer andern Abſciſſe $x+m$; eine Ordinate $y+n$ zugehört ſo iſt

$$\frac{y+n}{y} = \frac{c^{x+m}}{c^x} = c^m$$

IIII. Sollen alſo ein Paar andre Ordinaten z, und $z+p$ ſich verhalten wie y und $y+n$ oder ſoll $\frac{z+p}{z} = \frac{y+n}{y}$ ſeyn, ſo iſt auch $\frac{z+p}{z} = c^m$; die Ordinate $z+p$ muß alſo einer Abſciſſe zugehören die um m gröſſer iſt als die Abſciſſe der die Ordinate z zugehört, oder wenn ein Paar Ordinaten ſich ſo verhalten ſoll wie ein andres Paar, ſo ſind die Ordinaten des erſten Paares um ein eben ſo groſſes Stück der Abſciſſenlinie von einander entfernt als die Ordinaten des zweyten Paars: Und umgekehrt, wenn zwiſchen ein Paar Ordinaten eben ſo ein groſſes Stück der Abſciſſenlinie fällt als zwiſchen das andre Paar, ſo haben beyde Paar einerley Verhältniß denn es iſt alsdenn der Quotient des einen, wie des andern c^m.

So iſt $PC : QD = QD : RE$ wenn $PQ = QR$.

V. So ſtellt dieſe Linie nach Nr. VI. 19. ein logarithmiſches Syſtem vor wo $PC = c$ die Zahl iſt die 1 zum Logarithmen hat.

VI. Wäre 16 F. $AB = 1 = AP$; $PC = c$; $PG = f$; ſo gehörte zu der Abſciſſe x; in BC der ei-

einen logarithmiſchen Linie c^x in BG der andern f^x als Ordinate. Beyde logarithmiſche Linien hätten nur den Punct B gemein, und ſtellten zwey Syſteme vor, da 1 als Logarithme in dem einen der Zahl c im andern der Zahl f zugehörte.

VII. Wie die Ordinaten rechter Hand von A unendlich wachſen ſo nehmen ſie linker Hand unendlich ab. Jede Ordinate linker Hand iſt c^{-x}, ein eigentlicher Bruch, weil $c > 1$; Alſo iſt die Abſciſſenlinie der logarithmiſchen Aſymptote.

214. Zuſ. Das m (213) bedeute ein Stückchen auf das man durch fortgeſetzte Theilung der Einheit AB, z. E. durch Halbirungen kömmt, ſo daß $1 = r.\, m$, wo r; eine ganze Zahl iſt. Wenn man ferner von A aus, eine Abſciſſe $= m$ nimmt, ſo gehöre ihr die Ordinate $1 + q$ zu. So iſt die Verhältniß $1 : c = r. (1 : (1+q))$ oder $c = (1+q)^r$ Die Verhältniß $1 : c$ beſteht nähmlich aus ſo viel gleichen Verhältniſſen jede $= 1 : 1+q$ ſo viel Theile deren jeder $= m$ auf AP gehn. Solchergeſtalt iſt $c^m = (1+q)^{rm} = 1+q$.

Es iſt willkührlich wie viel Theile man auf AP machen will, wie klein m ſeyn ſoll; Wenn man ſich aber dieſerwegen entſchloſſen hat, und c auch von gegebener Gröſſe angenommen iſt, ſo iſt nicht willkührlich wie groß $1+q$ ſeyn ſoll; denn $1+q$ muß ſo groß ſeyn, daß die Verhält-

niß 1: $1+q$ herauskömmt wenn man die Verhältniß 1: c in r Theile theilt. Umgekehrt, werden bey einem gegebenen c, r u. m durch q beſtimmt, wenn man dieſes nach Gefallen annimmt, denn die Verhältniß $1 : 1+q$ muß r mahl genommen, die Verhältniß 1 : c geben. Wobey noch $1+q$ ſo müßte angenommen werden, daß r eine ganze Zahl würde.

215. Zuſ. Der Unterſchied von einem Paare Ordinaten iſt aus (213)

$$n = c^{x+m} - c^x = c^x (c^m - 1) = c^x q \ (214) = yq.$$

Alſo iſt $= \frac{y.m}{n} = \frac{m}{q}$ eine Grösſe die für alle y einerley iſt (214)

216. Zuſ. Wenn r unendlich wächſt ſo nehmen m, n, bis auf nichts ab und $\frac{y.m}{n}$ verwandelt ſich in $\frac{ydx}{dy}$, in die Subtangente. Dieſe Subtangente iſt alſo $= \frac{m}{q}$ unveränderlich (215) daß ſie zugleich eine endliche Grösſe, daß $\frac{m}{q}$ weder $= 0$ noch unendlich iſt, erhellt daraus, weil eine Linie deren Subtangente $= 0$ wäre, eine gerade Linie ſenkrecht auf die Abſciſſenlinie ſeyn müßte, ſo wie eine Linie deren Subtangente

te unendlich wäre, mit der Abſciſſenlinie parallel ſeyn müßte. (161) Bey der logarithmiſchen Linie findet gewiß keines von beyden ſtatt.

217. Zuſ. Daher iſt $\frac{ydx}{dy} = a$ die Gleichung für die logarithmiſche Linie, wo a eine unveränderliche endliche Gröſſe bedeutet.

218. Zuſ. Folglich $\frac{dx}{a} = \frac{dy}{y}$; daher $\frac{x}{a} = \int\frac{dy}{y}$ oder $\frac{x}{a}$ muß eine ſolche Function von y ſeyn, deren Differential in y ausgedruckt $\frac{dy}{y}$ iſt.

219. I Wollte man hier $\frac{dy}{y}$ nach 203. V. integriren ſo käme $\frac{y^{o}}{o}$ + Conſt; $= \frac{1}{o}$ + Conſt welches offenbahr ungereimt iſt, weil das Integral weder unveränderlich, noch unendlich ſeyn kann.

II. In dieſem einzigen Falle, kann die Formel 203; V; nicht angebracht werden. Sie gründet ſich nähmlich darauf daß $mx^{m-1}dx$ das Differential von x^m iſt. Soll alſo $m-1=-1$ ſeyn, oder wollte man ſuchen wovon $\frac{dx}{x}$ das Differential wäre, ſo wäre $m=o$, und von x^{o} das

Differential $= 0 . \frac{dx}{x}$; dieſes iſt richtig, weil es allemahl $= 0$ iſt, wie das Differential von 1 ſeyn muß. Daraus folgt aber daß $\frac{dx}{x}$ auf die gewöhnliche Art zu differentiiren nur ſo entſtehen könnte, wenn man $\frac{x^0}{0}$ differentiirt hätte. Denn da erhielte man $\frac{0 . x^{0-1} dx}{0}$ oder $x^{-1} dx$ wenn man mit 0 ſo verführe wie mit einer wirklichen Gröſſe die im Zähler und Nenner einerley wäre.

III. Die Folge hieraus iſt alſo daß man $\frac{dy}{y}$ nicht als das Differential einer Potenz von y betrachten kann, deren Exponent unveränderlich wäre, und daß alſo das Integral von $\frac{dy}{y}$ keine Potenz, weder mit einem ganzen, noch gebrochnen Exponenten von y ſeyn kann.

IIII. Weil nun $y = c^x$ (213) alſo $x l c = l y$ (Ar. VI. 21) oder $x = l y$ weil $l c = 1$ (213) ſo iſt $\frac{ly}{a} = \int \frac{dy}{y}$ (hier I) oder $x = ly = a . \int \frac{dy}{y}$. Das iſt; in dem logarithmiſchen Syſtem, welches die gegenwärtige Linie vorſtellt, iſt $\frac{a dy}{y}$ das Diffe-

rential des Logarithmus von y. Weiß man alſo wie groß a iſt, das iſt; wie ſich dieſer Linie Subtangente zu AB verhält, und hat man ein Mittel $\frac{dy}{y}$ zu integriren, ſo giebt dieſes Integral mit a multiplicirt, den Logarithmen von y in dieſem Syſtem.

220. Aufg. Den Logarithmen einer Zahl, die zwiſchen 1 und 2 fällt, durch eine unendliche Reihe zu finden.

Aufl. Man ſetze $y = 1 + u$ alſo $dy = du$ und $dx = a. \frac{du}{1+u}$.

$= a. (du - udu + u^2 du - u^3 du \ldots)$ (Alg. 13.) alſo $x = a. (u - \frac{1}{2} u^2 + \frac{1}{3} u^3 - \frac{1}{4} u^4 + \frac{1}{5} u^5 \ldots)$ wo das Geſetze des Fortganges überzeugend in dir Augen fällt. Weil $l\,1 = 0$; ſo iſt $x = 0$ für $u = 0$ und alſo dieſe Summe ohne Addirung einiger beſtändigen Gröſſe vollſtändig. Wenn die Reihe ſich nähern ſoll, ſo muß $u < 1$ folglich $1 + u < 2$ ſeyn.

221. Aufg. Umgekehrt die Zahl u durch den Logarithmen, vermittelſt einer unendlichen Reihe auszudrücken.

Aufl. Weil $dx + udx = adu$, ſo iſt $\frac{dx}{a} = du - \frac{udx}{a}$. Man verfahre mit dieſer Gleichung nach Alg. 694.

$$du = \frac{dx}{a} + \frac{xdx}{a^2} + \frac{x^2dx}{2a^3} + \frac{x^3\,dx}{3.\,2.\,a^4} + \frac{x^4\,dx}{4.\,3.\,2.\,a^5}$$

$$\frac{-udx}{a} = \frac{--xdx}{a^2} \quad \frac{--x^2\,dx}{2a^3} \quad \frac{-x^3\,dx}{3.\,2.\,a^4} \quad \frac{-x^4\,dx}{4.\,3.\,2.\,a^5}$$

$$u = \frac{x}{a} + \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3.2.a^3} + \frac{x^4}{4.3.2.a^4} + \frac{x^5}{5.4.3.2.a^5}$$

Nähmlich aus $du = \frac{dx}{a}$ findet man das erſte Glied von $u = \frac{x}{a}$. Dieſes in $\frac{udx}{a}$ gebraucht, giebt dieſer Reihe erſtes Glied $\frac{-xdx}{a^2}$ welches mit dem entgegengeſetzten bejahten Zeichen der Reihe du zweytes Glied giebt, daraus die Integration der Reihe u zweytes Glied $\frac{+x^2}{2a^2}$ findet. Dieſes zweyte Glied von u giebt der Reihe $\frac{-udx}{a}$ zweytes Glied $\frac{-x^2 dx}{2a^3}$ und eben das bejaht wird der Reihe du drittes Glied, und integrirt das dritte Glied der Reihe u u. ſ. w. Es erhellt, daß alle Glieder der Reihe u bejaht werden, wenn das erſte bejaht iſt, weil jedes bejahte Glied der Reihe u, in $\frac{-udx}{a}$ ein verneintes und folglich in du ein bejahtes giebt. Ferner wenn irgend ein Glied der Reihe u; $= \frac{x^n}{n.(n-1)\ldots 2a^n}$ iſt, ſo giebt dieſes in $\frac{-udx}{a}$ das Glied $\frac{-x^n dx}{n.(n-1)\ldots 2a^{n+1}}$ und eben das Glied bejaht in der Reihe du; und durch die Integration das folgende Glied der Reihe u;

+x

$\frac{+x^{n+1}}{(n+1).n\ldots 2a^{n+1}}$ woraus die Allgemeinheit des Geſetzes, nach dem die Glieder fortgehen, erhellt. Endlich iſt x = l (1 + u) und alſo = 0; wenn u = 0; alſo die Summe vollſtändig, ohne eine beſtändige Gröſſe zu addiren.

222. Zuſ. Aus dem bisherigen ſiht man ſo viel, daß bey einer gegebenen logarithmiſchen Linie, wo nähmlich c gegeben iſt, (213) die Subtangente immer einerley Gröſſe behält. Wie groß aber dieſes a iſt, das zeigt ſich bis hieher noch nicht. Man kann es bisher nur als eine unveränderliche noch nicht als eine bekannte Gröſſe anſehn. Durch folgende Aufgabe nähert man ſich ſeiner Kenntniß:

Man ſuche die Ordinate, deren Abſciſſe der Subtangente gleich iſt.

Aufl. In 221; x = a geſetzt findet man

$u = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4.} + \frac{1}{2.3.4.5.}$ wo man nur das erſte Glied 1; mit 2; das zweyte $\frac{1}{2}$ mit 3; das dritte $\frac{1}{2.3}$ mit 4; und ſo jedes Glied mit der Zahl welche anzeiget das wievielte das nächſtfolgende iſt, dividiren darf, um dieſes nächſtfolgende zu finden. So iſt alſo u und folglich 1 + u, eine gegebene Zahl, die nicht nur für alle Stellen einer gegebenen logarithmiſchen

Linie, ſondern für alle logarithmiſche Linien einerley bleibt, weil ſie durch die Grösſe von c gar nicht beſtimt wird, und nur durch dieſe Grösſe unterſcheidet ſich eine logarithmiſche Linie von der andern (213; VI) Dieſe Zahl iſt

2, 718 281 828 459 045 235 360 28

Eul. Introd. iu Analyſ. inf. L. 1. §. 122. Man nennt ſie der Kürze wegen e; Sie iſt bey den Logarithmen ſo etwas wie P beym Kreiſe (Geom. 44. S.)

Jſt alſo eine logarithmiſche Linie BCE 15. F. gegeben; ſo ziehe man in der Weite e eine Linie mit der Aſymptote AR parallel; dieſe Parallele ſchneide die logarithmiſche Linie in D; ſo iſt DQ die geſuchte Ordinate, und AQ = a.

223. Aufg. Eine Reihe für die Logarithme zu finden, die ſich ſchneller nähert als die in (220)

Aufl. Jch heiſſe der Kürze wegen die in (220) für $\int \frac{du}{1+u}$ gefundene Reihe S. Weil nun $l(1+u) = a.S$ ſo erhält man $l(1-u)$ wenn man in dieſer Reihe $-u$ ſtatt $+u$ ſchreibt, nur das bemerkt, daß alsdenn nur die Potenzen von u entgegengeſetzte Zeichen bekommen, deren Exponenten ungerade ſind.

Eben das findet man unmittelbar wenn man $y = 1 - u$ ſetzt, alſo $dx = \frac{-adu}{1-u} = -adu.$

(1+u

$(1+u+u^2+u^3\ldots)$ integrirt. Man hat alſo

$$l(1-u)=a.(-u-\tfrac{1}{2}u^2-\tfrac{1}{3}u^3-\tfrac{1}{4}u^4-\tfrac{1}{5}u^5\ldots)$$

$$l(1+u)=a.(+u-\tfrac{1}{2}u^2+\tfrac{1}{3}u^3-\tfrac{1}{4}u^4+\tfrac{1}{5}u^5\ldots)$$

folglich (Ar. VI. 20.)

$$l\,\frac{1+u}{1-u}=a.\ 2u.\ (1+\tfrac{1}{3}u^2+\tfrac{1}{5}u^4+\tfrac{1}{7}u^6\ldots)$$

welche Reihe, weil die Glieder allemahl um zweene Grade ſteigen ſich ſchneller nähert.

224. Zuſ. N ſey eine willkührliche ganze Zahl; und man ſetze $\frac{1+u}{1-u}=N$ ſo iſt $u=\frac{N-1}{N+1}$, allemahl ein eigentlicher Bruch, nur deſto gröſſer je gröſſer N iſt. Für $N=1001$ würde $u=\frac{1000}{1002}$. Alſo nähert ſich die Reihe in 223; allemahl was auch N iſt, nur langſamer für ein groſſes N; und ſo kann man, wenn a bekannt iſt, den Logarithmen jeder ganzen Zahl unmittelbar finden. Dieß zeigt in der Kürze die Möglichkeit jeder ganzen Zahl Logarithmen zu finden; in der Ausübung wird man die Logarithmen kleiner Zahlen lieber durch Reihen die ſich ſchneller näher berechnen, und aus dieſen Logarithmen nachgehends durch Addiren u. ſ. w. die Logarithmen gröſſerer Zahlen finden.

Exempel. Man ſuche, wie groß a ſeyn muß, damit $l\,10=1$ wird. So iſt $\frac{1+u}{1-u}=10$ oder

1+u

$1 + u = 10 - 10\,u$ oder $u = \frac{9}{11}$ und

$$1 = a.\,2.\left(\tfrac{9}{11} + \frac{9^3}{3.\,11^3} + \frac{9^5}{5.\,11^5} \cdots\right)$$

wo man die Reihe rechter Hand, wenn man die Potenzen von $\frac{9}{11}$ weit genug fortſetzet, ſo genau als man will finden kann, deren Doppeltes alsdenn $\frac{1}{a}$ oder 1 mit der Reihe Doppelten dividirt a geben wird.

225. Erkl. Wenn man $a = 1$ ſetzt, ſo heiſſen die Logarithmen, die ſolchergeſtalt herauskommen, die natürlichen.

226. Aufg. Die natürlichen Logarithmen der erſten 10 Zahlen vermittelſt der Reihe 223. zu finden.

Aufl. Man ſetze

$$u = \tfrac{1}{5};\ \tfrac{1}{7};\ \tfrac{1}{9}:\ \tfrac{1}{99}$$

So iſt $\frac{1+u}{1-u} = \frac{3}{2};\ \frac{4}{3};\ \frac{5}{4};\ \frac{50}{49}$

So findet man die Logarithmen von $\frac{3}{2}$; $\frac{4}{3}$; $\frac{5}{4}$; $\frac{50}{49}$ ſehr leicht, weil man für u kleine Brüche hat. Nun $l\frac{3}{2} + l\frac{4}{3} = l2$; $l\frac{3}{2} + l2 = l3$; $2l2 = l4$; $l\frac{5}{4} + l4 = l5$; $l2 + l3 = l6$; $2l5 + l2 = l50$; $l50 - l\frac{50}{49} = l49$; $\frac{1}{2}l49 = l7$; $3l2 = l8$; $2l3 = l9$; $l2 + l5 = l10$. Die Logarithmen ſelbſt ſtehen beym Euler Introd. in Analyſ. in-

infinitor. P. I. §. 123. Ich will nur zum Exempel den l 10 herſetzen. Er iſt

2, 30258509299404568401799l4

Dieſes Verfahren zeigt, wie man die Reihe 223 brauchen kann, Logarithmen von ganzen Zahlen zu finden.

227. Lehrſ. Wenn in den beyden logarithmiſchen Linien 213; VI; zur Ordinate y; in der erſten x; in der zweyten v als Abſciſſe gehört, und die beyden Subtangenten, a; b; ſind, ſo iſt x: v = a: b oder: die Logarithmen von einer Zahl, in beyden Syſtemen, verhalten ſich wie die Subtangenten.

Bew. Die Ordinate e; gehört in der erſten der Abſciſſe a; in der zweyten der Abſciſſe b zu (222). Alſo iſt $c^a = e$ in der erſten und $f^b = e$ in der zweyten. (210;) oder $c = e^{1:a}$; $f = e^{1:b}$; Alſo $y = c^x = e^{x:a}$ als Ordinate der erſten, und $= f^v = e^{v:b}$ als Ordinate der zweyten; daher $\frac{x}{a} = \frac{v}{b}$ oder $x : v = a : b$

228. Zuſ. Wenn a = 1; ſo iſt x der natürliche, und v ein künſtlicher Logarithme einer und derſelben Zahl. Jene heiſſe ly; dieſer Ly; alſo iſt Ly = b. ly.

229. Anm. Man thut dieſes insgemein ſo dar: $L(1 + u) = b. S(223) = b. l(1 + u)$. Da ſich aber

aber S nur für $1 + u \prec 2$ nährte, ſo habe ich hier dem Zweifel ausweichen wollen, den man ſich wegen der Anwendung auf $y \succ 2$ machen könte.

230. Aufg. Zu finden wie groß b ſeyn muß daß $L\ 10 = 1$.

Aufl. Weil $L\ 10 = b\ l\ 10$ (228) ſo iſt

$1 = b . l\ 10$ und $b = \frac{1}{l\ 10}$ wo man $l\ 10$ gefunden

hat (226). Man hat berechnet daß $\frac{1}{l\ 10}$

0, 434 294 480 903 251 827 651 128 9 (Eul. Intr. in An inf. L. I. §. 124).

231. Zuſ. Für das briggiſche Syſtem, wo $L\ 10 = 1$; berechnet man jeden künſtlichdn Logarithmen, wenn man den natürlichen, eben der Zahl, mit 0, 434 . . . (230) multiplicirt. So würden ſich die briggiſchen Logarithmen, viel leichter finden laſſen, als man ſie wirklich gefunden hat (Ar. VI. 29).

232. Zuſ. Die Zahl, deren natürlicher Logarithme = 1 iſt das e (222). Iſt alſo in der 15 F. $AP = AB = 1$; und $PC = e$; ſo ſtellt die logarithmiſche Linie die natürlichen Logn rithmen vor; und ihre Subtangente iſt $= AB$.

233. Aufg. BCD 14 Fig. iſt eine gleichſeitige Hyperbel (Alg. 417.) zwiſchen ihren Aſymptoten

AF, AE; der erſten Aſymptote ſind GC; PM; parallel, man ſetzt den Raum GCMP.

Aufl. I. Was in Alg. 411; CQ, QM, waren ſind hier AP, PM; und beyde dortigen Axen gleich. Alſo wird aus a. Orte hier $AP.\ PM = \frac{a^2}{8}$.

Iſt nun Pp ein Differential von AP oder GP (22) ſo iſt $PM.\ Pp = PMmp$ das Element der Fläche GCMP; das wird alſo $\frac{a^2}{8} \cdot \frac{dAP}{AP}$ oder es verhält ſich wie das Differential des Logarithmen von AP (218) Weil man nun ſolchergeſtalt AP als eine Zahl anſehen muß ſo nehme man für ſie AG zur Einheit an, ſo daß das Integral von $\frac{dAP}{AP}$ der natürliche Logarithmen von $\frac{AP}{AG}$ iſt, welcher für $AP = AG$ ſich in $\log 1 = 0$ verwandelt. So iſt alſo die Fläche

$$GCMP = \frac{a^2}{8} \cdot \log \frac{AP}{AG}$$

II. Hier kann AG willkührlich angenommen werden, nur nicht = 0; denn da würde die Fläche unendlich, und das zeigt daß der Raum zwiſchen der Aſymptote FA, dem ihr zuhörigen unendlichen Schenkel von der Gegend B an, bis M, und den geraden Linien AP, PM, unendlich iſt,

iſt, anders als der ebenfalls unendliche lange Raum einer andern Hyperbel (211).

III. Man ſetze AC halbire den Aſymptotenwinkel; alſo ſey es zugleich die halbe Axe; ſo iſt $AG = \frac{AC}{\sqrt{2}} = \frac{a}{2\sqrt{2}}$; Setzt man alſo hier dieſes $= 1$ ſo iſt die Axe der Hyperbel $a = 2\sqrt{2}$.

IIII. So wird in (1) die Fläche $GCMP = \log(1+u)$ wenn $GP = u$; und läßt ſich durch die Reihe 220 finden.

V. Die natürlichen Logarithmen, heiſſen auch hyperboliſche weil ſie mit der Quadratur der Hyperbel zuſammen hängen. Nicolaus Mercator Logarithmotechniae Pr. VI. hat dieſe Quadratur der Hyperbel durch eine unendliche Reihe die vermittelſt der Diviſion gefunden wird zuerſt bekannt gemacht. Newton iſt auf eben dergleichen Erfindungen für ſich gerathen.

VI. Man ſetze auf AE durch P ein Perpendikel $z = \frac{GCMP}{AO}$. Nimmt man die bejahten z von AE hinunterwärts ſo iſt $z = 0$ wenn P auf G fällt, und wenn P zwiſchen G und A fällt, alſo GP verneint wird, ſo fallen auch verneinte Z über AE hinauswärts. Dieſe z verhalten ſich alſo wie die Logarithmen von AP, und der geometriſche Ort in dem ſich ihre Endpuncte befinden, iſt

eine logarithmiſche Linie, deren Abſciſſen eigentlich dieſen z gleich auf der Aſymptote FA genommen werden müſſen, die Ordinaten = AP ſind. Alſo iſt FA zugleich dieſer logarithmiſchen Linie Aſymptote. Weil ſich Z wie die Fläche GCMP verhält, ſo ſagt man dieſe logarithmiſche Linie ſey die Quadratrix in Hyperbel, oder man könne durch ſie die Hyperbel quadriren. Dieſen Zuſammenhang der logarithmiſchen Linie mit der Hyperbel betrachtet umſtändlich, Hauſen Sect. Con. Prop. 50.

S. auch unten 317.

VII. Hyperboliſche Logarithmen von 1 bis 1000 findet man in Hr. Lamberts Zuſätzen zu den logarithmiſchen und trigonometriſchen Tabellen (Berlin 1770) 13 u. f. Taf.

234. Anm. Ich habe hier nur das Nothwendigſte von den Logarithmen beybringen können, und alles auf den Begriff der in der Arithmetik davon gegeben worden, bringen müſſen. Vollſtändigere Ausführungen hievon ſ. beym Euler Introd. in Anal. inf. L. I. c. VI. VII. und Mem. de l'Ac. R. des Sc. et des belles lettres de Pruſſe 1749. p. 139. wo Herr Euler zeigt, daß jeder Zahl auſer dem einzigen möglichen natürlichen Logarithmen, den ich hier betrachtet habe, unzählich viel unmögliche zugehören. Die Abſciſſe der logarithmiſchen Linie, welche dieſer Zahl als Ordinate angeſehen zugehört, iſt nur der mögliche Logarithme. Dieſe Betrachtung dient zu Entſcheidung einer Streitigkeit zwiſchen Leibnizen, der behauptet hatte, daß der verneinten Gröſſen Logarithmen unmöglich wären, und Joh. Bernoulli, der das Gegentheil darzuthun geſucht hatte;

Sie

Sie entkräftet Bernoullis Einwendungen, und beſtätiget die Richtigkeit von Leibnizens Satze.

Von der Exponentialrechnung.

235. **Erkl.** Eine Exponentialgröſſe heißt, deren Exponent eine veränderliche Gröſſe iſt z. E. a^x. Die Wurzel mag veränderlich oder unveränderlich ſeyn.

236. **Aufg.** Eine Exponentialgröſſe zu differentiiren.

Aufl. Es ſey $z^x = y$ ſo iſt $x l z = l y$ (Ar. VI. 21.) alſo $d x . l z + x d l z = d l y$ oder $lz. dx.$

$$+\frac{x d z}{z} = \frac{d y}{y} \text{ (218).}$$

237. Aufg. Das Differential einer Exponentialgröſſe $x^x d x$ zu integriren.

Aufl. Man ſetze $x = 1 + y$ alſo das Differential $(1+y)^{1+y} dy$. Man ſetze ferner $(1+y)^{1+y} = 1 + v$ alſo $(1+y). l(1+y) = l(1+v)$ oder (220) $(1+y).(y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 ..) = v - \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{3}v^3 - \frac{1}{4}y^4 ...)$ Die Reihe linker Hand wird $y + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{6}y^3 ...$ Um nun v durch y auszudrücken verfahre man nach Alg. (694.)

$$\begin{array}{rcl} v & = & y + \tfrac{1}{2}y^2 - \tfrac{1}{6}y^3 \\ & & \quad\; + \tfrac{1}{2} \qquad + \tfrac{2}{3} \\ -\tfrac{1}{2}v^2 & = & -\tfrac{1}{2}y^2 - 1 \\ +\tfrac{1}{3}v^3 & = & \qquad\qquad + \tfrac{1}{3} \end{array}$$

$$v = y + y^2 + \tfrac{1}{2}y^3 \ldots$$
$$x^2 = y^2 + 2y^3$$
$$v^3 = \quad y \ldots$$

Man nimmt nähmlich y für das erſte Glied von v an; dieſes giebt $-\frac{1}{2}yy$ für das erſte Glied von $-\frac{1}{2}vv$ dieſes erſte Glied von $-\frac{1}{2}vv$ mit entgegengeſezten Zeichen zu $+\frac{1}{2}yy$ welches ſchon v gegenüberſtund, addirt, giebt $+yy$ für das zweyte Glied von v. Daraus findet ſich $-y^3$ für das zweite Glied von $-\frac{1}{2}vv$; imgleichen aus dem erſten Gliede von v; $+\frac{1}{3}y^3$ für das erſte Glied von $+\frac{1}{3}v^3$ dieſe beyden Gröſſen zuſammen machen $-\frac{2}{3}y^3$ welches mit entgegengeſetzten Zeichen zu $-\frac{1}{6}y^3$ das ſchon v gegenüberſteht, addirt, $+\frac{1}{2}y^3$ zum dritten Gliede von v giebt. Und ſo findet man $1+v = 1+y+y^2+\frac{1}{2}y^3+\frac{1}{3}y^4+\frac{1}{12}y^5 \ldots$ Dieſe Reihe nun, weil ſie $=(1+y)^{1+y}$ iſt, muß mit dy multiplicirt, und was herauskömt, integrirt werden, ſo findet man $\int(1+y)^{1+y}.\,dy = y+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{8}y^4+\frac{1}{15}y^5+\frac{1}{72}y^6 \ldots$ wo man ſtatt y; $x-1$ ſetzen müßte, wenn man das dieſer Reihe gleiche Integral $\int x^x\,dx$ unmittelbar durch x ausdrücken wollte. Es würde dieſes aber nicht bequem ſeyn, weil jedes Glied, das

eine

eine Potenz von y enthält, verſchiedene geben würde, wenn man $x - 1$ ſtatt y ſetzte, da man denn die Glieder, die einerley Potenzen von x enthalten, wieder zuſammen rechnen müßte.

238. Anm. Von der Exponentialrechnung hat Joh. Bernoulli zuerſt Regeln und Exempel bekannt gemacht, Act. Erud. Lipſ. 1697. Menſ. Mart. Op. T I. n. 36. Das Integral (237) hat er beſonders betrachtet, und beſondere Eigenſchaften daran bemerkt. Op. T. III. n. 148.

239. Aufg. Die Gröſſe e^x (232) durch eine Reihe, die nach x fortgeht, auszudrücken.

Aufl. Es ſey $x = l(1 + u)$ ſo iſt auch $x l e = l(1+u)$ (232) oder $l e^x = l(1 + u)$ oder $e^x = 1 + u = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 \ldots$ (221).

240. Zuſ. Man ſetze $a^y = e^x$ ſo iſt $y\, l\, a = x$

also $a^y = 1 + y\, l\, a + \frac{yy.(l\, a)^2}{2} + \frac{y^3.(l\, a)^3}{6} \ldots$

So läßt ſich jede Exponentialgröſſe vermittelſt der hyperboliſchen Logarithmen durch eine unendliche Reihe ausdrücken.

241. Aufg. e^{mx} zu differentiiren.

Aufl. Es ſey $e^{mx} = u$ ſo iſt $mx = l\, u$ (232) und $m\, dx = \frac{du}{u}$ alſo du oder $d\, e^{mx} = m e^{mx} dx$

242. Aufg. Das Differential $e^{mx}x^{\varepsilon}dx$ zu integriren, wenn ε eine ganze bejahte Zahl iſt.

Aufl. Man ſetze $\int e^{mx}x^{\varepsilon}dx = \frac{e^{mx}x^{\varepsilon}}{m} - p$ auf beyden Seiten differentiirt, kömmt nach (240)

$$e^{mx}x^{\varepsilon}dx = e^{mx}x^{\varepsilon}dx + \frac{\varepsilon}{m}x^{\varepsilon-1}e^{mx}\cdot dx - dp.$$

Alſo $dp = \frac{\varepsilon}{m}x^{\varepsilon-1}e^{mx}.dx$

Man ſetze die erſte Ergänzung

$p = \frac{\varepsilon x^{\varepsilon-1}e^{mx}}{m^2} - q$ ſo iſt $dp =$

$$\frac{\varepsilon x^{\varepsilon-1}e^{mx}dx}{m} + \frac{\varepsilon(\varepsilon-1).x^{\varepsilon-2}e^{mx}dx.}{m^2} - dq$$ oder

$dq = \frac{\varepsilon.(\varepsilon-1)x^{\varepsilon-2}e^{mx}dx}{m^2}$. So ſetze man die zweyte Ergänzung $q = \frac{\varepsilon.(\varepsilon-1).x^{\varepsilon-2}e^{mx}}{m^3} - r$

und

und es iſt $dq = \frac{\varepsilon.(\varepsilon-1).x^{\varepsilon-2}.e^{mx}dx}{m^2}$

$$+\frac{\varepsilon.(\varepsilon-1)(\varepsilon-2)x^{\varepsilon-3}.e^{mx}dx}{m^2} - dr \text{ oder } dr =$$

$$\frac{\varepsilon.(\varepsilon-)(\varepsilon-2)x^{\varepsilon-3}.e^{mx}dx}{m^3}$$

Ueberhaupt ſetze man unter den Ergänzungen p; q; r; u. ſ. w. ſey man auf eine dt gekommen, ſo daß

$$dt = \frac{\varepsilon.(\varepsilon-1)\ldots.(\varepsilon-n)x^{\varepsilon-n-1}.e^{mx}dx}{m^{n+1}}$$

ſo ſetze man die n + 1te Ergänzung

$$t = \frac{\varepsilon.(\varepsilon-1)\ldots(\varepsilon-n)x^{\varepsilon-n-1}.e^{mx}}{m^{n+2}} - u$$

da iſt $dt = \frac{\varepsilon.(\varepsilon-1)\ldots(\varepsilon-n)}{m^{n+1}} x^{\varepsilon-n\,1}\,e^{mx}\,dx$

$$+\frac{\varepsilon.(\varepsilon-1)\ldots.(\varepsilon-n-1)}{m^{n+2}}x^{\varepsilon-n-2}.e^{mx}dx - du$$

oder $du = \frac{\varepsilon.(\varepsilon-1)\ldots.(\varepsilon-n--1)}{m^{n+2}} x^{e-n-2}\, e^{m x} d_x$

wo man wieder für u einen ſolchen Ausdruck wie für t annehmen kan, iſt aber $n = \varepsilon$ ſo wird $t = 0$ und die Reihe bricht da ab: die nte Ergänzung überhaupt iſt $\frac{\varepsilon.(\varepsilon-1)\ldots.(\varepsilon-n+1)}{m^{n+1}} x^{\varepsilon-n\ mx}$

$-t$ ſie wird alſo die letzte für $n = \varepsilon$ und da iſt ſie $\frac{\varepsilon(\varepsilon-1)\ldots.1}{m^{\varepsilon+1}} x^{0} e^{mx}$. Folglich iſt, alle Ergänzungen zuſammengerechnet, das geſuchte Integral, $= e^{mx}.\left(\frac{x^{\varepsilon}}{m} - \frac{\varepsilon x^{\varepsilon-1}}{m^2.} - \frac{\varepsilon.(\varepsilon-1).x^{\varepsilon-2}}{m^3} \ldots - \frac{\varepsilon.(\varepsilon-1)\ldots.1}{m^{\varepsilon+1}}\right)$ wozu keine beſtändige Gröſſe addirt zu werden braucht, wenn es für $x = 0$ auch der Reihe letztes Glied ſeyn ſoll. Der Kunſtgriff bey dieſem Verfahren, welcher auch anderswo oft angebracht wird, kömmt darauf an: Wenn man das Differential einer Gröſſe wie z. E. dp in voriger Rechnung hat, ſo nimmt man für das Integral davon zweene Theile an; erſtlich eine Gröſſe, deren Differential zwey Stücken hat, von welchen eines dem vorgegebenen Differential wie dp, gleich

gleich iſt; ſo bleibt alſo beym Differentiiren das andere Stück übrig, welches einem neuen Differentiale, nähmlich dem Differentiale des andern Theils des angenommen Integrals muß gleich geſetzt werden. So nähme man an

$$p = \frac{\varepsilon x^{\varepsilon-1} e^{mx}}{mm} - q$$

wo beym Differentiiren das erſte Stück des Differentials des erſten Theils des angenommenen Werthes von p, dem vorhin gefundenen dp gleich iſt, und alſo für den Werth von dq das zweyte Stück übrig bleibt. Wenn man nun mit q auch ſo verfährt, u. ſ. w. ſo gibt ſich für das geſuchte Integral eine Reihe, die unter den gehörigen Umſtänden abbricht. Folgendes Exempel iſt von eben der Art.

243. Aufg. $x^{\varepsilon}(lx)^{n}dx$ zu integriren, wenn n eine ganze bejahte Zahl iſt.

Aufl. Man muß ſich erſtlich erinnern, daß

$$d(lx)^{n} = n.(lx)^{n-1}.\,dlx = n.\frac{(lx)^{n-1}.\,dx}{x}$$

Nun ſetze man das geſuchte Integral

$$= \frac{x^{\varepsilon+1}.(lx)^{n}}{\varepsilon+1} - p$$

So iſt auf beyden Sei-

ten

ten differentiirt

$$x^{\varepsilon}(lx)^{n}dx = x^{\varepsilon}(lx)^{n}dx + \frac{n.\,x^{\varepsilon}(lx)^{n-1}dx}{\varepsilon+1}$$

— dp. Man begreift, warum für des geſuchten Integrals erſten Theil eben die Gröſſe angenommen worden: damit ſich nähmlich der erſte Theil von ihrem Differentiale mit dem Differentiale, deſſen Integral man ſucht, aufhübe.

Nun hat man $dp = \frac{n.\,x^{\varepsilon}(lx)^{n-1}dx}{\varepsilon+1}$. Man ſetze

$p = \frac{nx^{\varepsilon+1}.\,(lx)^{n-1}}{(\varepsilon+1)^{2}} - q$ ſo wird $dp =$

$$\frac{n.x^{\varepsilon}.\,(lx)^{n-1}dx}{\varepsilon+1} + \frac{n.(n-1).x^{\varepsilon}.\,(lx)^{n-2}}{(\varepsilon+1)^{2}} - dq$$

von den drey Differentialen rechter Hand hebt ſich das erſte mit dp auf. Wegen des andern, das $= dq$ iſt, ſetze man

$q = \frac{n.(n-1)x^{\varepsilon+1}.\,(lx)^{n-2}}{(\varepsilon+1)^{3}} - r$ ſo iſt

dq=

$$dq = \frac{n.(n-).x^{\varepsilon}.(lx)^{n-2}\,dx}{(\varepsilon+)^2}$$

$$+\frac{n.(n-1).(n-2)x^{\varepsilon}.(lx)^{n-3}\,dx}{(\varepsilon-+1)^3} - dr$$

wo ſich wiederum das erſte der drey Differentiale linker Hand mit dp aufhebt. Ueberhaupt, wenn man für die Ergänzung t deren Zahl $\varkappa$ iſt, dergleichen p die erſte, q die zweyte iſt, folgende Gleichung annimmt.

$$t = \frac{n.(n-1)\ldots n-\varkappa+1}{(\varepsilon+1)^{\varkappa+1}}.\,x^{\varepsilon+1}.(lx)^{n-\varkappa} - u$$

ſo iſt

$$dt = \frac{n(n-1)\ldots(n-\varkappa+1)}{(\varepsilon+1)^{\varkappa}}.\,x^{\varepsilon}.(lx)^{n-\varkappa}\,dx$$

$$+\frac{n.(n-1)\ldots(n-\varkappa+1).(n-\varkappa)}{(\varepsilon+1)^{\varkappa+1}}.\,x^{\varepsilon}.(lx)^{n-\varkappa-1}dx - du$$

wo ſich von den drey Gliedern rechter Hand das erſte mit dt aufhebt und

$$du = \frac{n.(n-1)\ldots(n-\varkappa)}{(\varepsilon+1)^{\varkappa+1}}.\,x^{\varepsilon}.(lx)^{n-\varkappa-1}\,dx$$ wiederum

u =

$$u = \frac{n.(n-1).....(n-\varkappa.)}{(\varepsilon+1)^{\varkappa+2}} . x^{\varepsilon+1} . (lx)^{n-\varkappa-1} - w$$

giebt. Hieraus folgt, daß die Ergänzung u, deren Zahl $\varkappa+1$ iſt, $=0$ ſeyn wird, wenn $\varkappa=n$; da bricht alſo die Reihe ab, und wenn alſo die $(n+1)$ te Ergänzung $=0$ iſt, ſo iſt die nächſt-vorhergehende n te, die letzte. Sie wird alſo, wenn man in t, $\varkappa=n$ ſetzt,

$\frac{n.(n-1)....1}{(\varepsilon+1)^{n+1}} . x^{\varepsilon+1}$. Folglich iſt das geſuchte Integral, wenn man p; q, u. ſ. w. zuſammen rechnet

$$x^{\varepsilon+1} . \left(\frac{(lx)^n}{\varepsilon+1} - \frac{n.(lx)^{n-1}}{(\varepsilon+1)^2} - \frac{n.(n-1)}{(\varepsilon+1)^3 . (lx)^{n-2}} ... \right.$$
$$\left. ..... - \frac{n.(n-1).....1}{(\varepsilon+1)^{n+1}} \right) + \text{Conſt}$$

Dieſe Reihe wird nicht $=0$ wenn $x=0$ weil alsdenn lx unendlich wird, und daher kann das Integral nicht $=0$ für $x=0$ werden. Aber für $x=1$ wo $lx=0$ wird die Reihe $1. \frac{-n.(n-1)...1}{(\varepsilon+1)^{n+1}}$.

Geſetzt alſo, das geſuchte Integral ſolle $=m$ für $x=1$ werden, ſo hat man folgende Gleichung

$$m = -\frac{n.(n-1)....1}{(\varepsilon+1)^{n+1}} + \text{Conſt. oder}$$

Conſt

$\text{Const} = m + \frac{n.(n-1)\ldots 1}{(\varepsilon+1)^{n+1}}$. Oder es iſt vollſtändig

$$\int x^{\varepsilon} (lx)^{n} dx = x^{\varepsilon+1} \cdot \left\{ \frac{(lx)^{n}}{\varepsilon+1} \cdots - \frac{n.(n-1)\ldots 1}{(\varepsilon+1)^{n+1}} \right\}$$

$$+ \frac{n.(n-1)\ldots\ldots 1}{(\varepsilon+1)^{n+1}} + m.$$

244. Anm. Wenn x unendlich wird, ſo wird zwar lx auch unendlich, aber von einem niedrigern Grade, ſo daß man ſetzen muß l ∞ ſey eine unendliche Gröſſe, auf einer Potenz erhoben deren Exponent ein bejahter eigentlicher Bruch iſt; Dieſes erhellt daraus, weil die Zahlen in der geometriſchen Verhältniß, die Logarithmen aber in der arithmetiſchen wachſen, und bekanntermaſſen die Glieder in einer ſteigenden geometriſchen Reihe viel ſchneller zunehmen als in einer ſteigenden arithmetiſchen. So gehört in den gewöhnlichen Tafeln der kleine Logarithme 6 ſchon der groſſen Zahl 1000 000 zu. Eben ſo verhält es ſich mit dem verneinten Logarithmen einer unendlich kleinen Gröſſe. Es iſt nähmlich $l\frac{1}{\infty} = l1 - l\infty = -\left(\infty^{m:n}\right)$. So iſt unter den briggiſchen Logarithmen, der verneinte Logarithme, $0 - 6$, der $\frac{1}{1000000}$ zugehört, welcher bey weiten nicht ſo groß iſt, daß ſeine Gröſſe mit der Kleinigkeit der ihm zugehörigen Zahl in Vergleichung käme, oder daß man etwas dieſer Zahl nahe kommendes herausbringen würde, wenn man 1 durch den Logarithmen dividirte.

Ei-

Einige allgemeine Formeln zuſammengeſetzte Differentiale zu integriren.

245. Aufg. Wenn X eine Function von x iſt, $c\,dX.(a+X)^p$ zu integriren.

Aufl. Weil $a+X$ eine veränderliche Gröſſe, deren Differential dX, ſo iſt das Integral $= c.\frac{(a+X)^{p+1}}{p+1}$ (201. V.). Wer dieſes nicht ſo überſehen kann, kann ſich durch folgende Verwandelung (Transformatio differentialis, quae fit ſubſtituendo aliam incognitam) helfen: Er ſetze $a+X=z$ alſo $dX=dz$ und das Differential verwandelt ſich in $cz^p\,dz$ deſſen Integral $\frac{cz^{p+1}}{p+1}$ eben das vorige giebt, wenn man ſtatt z ſeinen Werth ſetzt. Ich nehme hier und in dem Folgenden überall an, daß die beſtändige Gröſſe, ſo wie es die beſondern Umſtände erfodern, gehörig addiret wird.

246. Ex. Wenn das vorgegebene Differential $\frac{-x\,dx}{\sqrt{(aa-xx)}}.(a+\sqrt{(aa-xx)})^2$ wäre, alſo $X=\sqrt{(aa-xx)}$ ſo muß man aus den Regeln des Differentiirens wiſſen, daß $\frac{-x\,dx}{\sqrt{(aa-xx)}} = dX$ alſo das Integral $= \frac{1}{3}(a+\sqrt{(aa-xx)})^3$

247. Anm. Es iſt ein Vortheil, wenn man verſchiedene endliche Formeln, die man nach Gefallen annimmt, beſonders Wurzelgröſſen, differentiirt, weil man in ſolchen Fällen wie gegenwärtig vorkommen, die Kenntniß ſolcher Differentiale mit Nutzen brauchen kann. Beym Differentiiren ſelbſt ſind ſolche Verwandelungen, da man eine Gröſſe ſtatt einer andern ſetzt, oft brauchbar. Wenn man z. E. nicht gleich überſehen könnte, wie das Differential von $\surd(aa-xx)$ ausſähe, ſo dürfte man dieſe Gröſſe nur $= y$ ſetzen, da $aa - xx = yy$

$-xdx = ydy$; und $\frac{-xdx}{\surd(aa-xx)} = dy$ wäre.

248. Aufg. Umſtände anzugeben, unter denen ſich $x^m . (a+bx^n)^p dx$ durch eine endliche Reihe integriren läßt.

Aufl. I. Wenn p eine ganze bejahte Zahl iſt, ſo giebt ſich die Potenz von $a+bx^n$ durch eine endliche Reihe; Jedes Glied dieſer Reihe mit $x^m dx$ multiplicirt giebt ein Differential das ſich nach 203 V; integriren läßt, und dieſe Integrale zuſammen gerechnet geben das Geſuchte. Da alſo dieſe Vorausſetzung, gar keine neuen Kunſtgriffe brauchte, ſo nehme man an, p ſey entweder ein Bruch (auch wohl ein uneigentlicher) oder eine verneinte ganze oder gebrochne Zahl.

II. Man ſetze $a+bx^n = z$, alſo $x = \left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$

$nbx^{n-1}dx = dz$. Drückt man nun alles durch z aus, ſo verwandelt ſich das vorgegebene Diffe-

rential in $\left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}-1} \cdot z^p \cdot \frac{dz}{nb}$

III. Iſt nun hier $\frac{m+1}{n}$ eine bejahte ganze Zahl zum wenigſten $=1$, ſo giebt ſich die Potenz von $\frac{z-a}{b}$ durch eine endliche Reihe und ſolchergeſtalt auch das Integral (wie in I). Will man dieſes Integral wieder durch x ausdrücken, ſo ſetzt man ſtatt z ſeinen Werth aus (II)

IIII. Hier mögen alſo m, n, p, was man will ſeyn, wenn nur die (III) angenommene Bedingung ſtatt findet. Dieſe Bedingung läßt ſich ſo ausdrucken $\frac{m+1}{n} = r+1$ wo r eine ganze bejahte Zahl, oder $=0$ ſeyn muß. Das giebt $m = rn + n - 1$; alſo muß ſich das vorgegebene Differential ſo ausdrücken laſſen:

$x^{rn} \cdot x^{n-1} \cdot (a+bx^n)^p \cdot dx$; wo r eine ganze bejahte Zahl oder $=0$ ſeyn muß.

V. Indeſſen hat man gegenwärtigen Kunſtgriff für $r=0$ nicht nöthig ſondern es wäre

in 245	X	dX	c
hier	bx^n	$nbx^{n-1}dx$	$\frac{1}{nb}$

alſo

alſo das Integral $\frac{(a+bx^n)^{p+1}}{nb.(p+1)}$; wie auch aus gegenwärtiger Methode gefunden wird, wenn man das Differential in (II) für dieſen Fall integrirt.

VI. Iſt nicht r=0 ſo wird in II.

$\frac{m+1}{n}-1=r$ und

$$(z-a)^r = z^r - r.az^{r-1} + r.\frac{(r-1)}{1.2}a^2z^{r-2} \ldots\ldots \pm a^r$$

Dieſe Reihe hat r+1 Glieder, und weil die deren Zahl gerade iſt das Zeichen — vor ſich haben, ſo hat das letzte Glied — oder + nachdem r ungerade oder gerade iſt.

VII. Dieſe Reihe nun multiplicire man mit $z^p.dz$ und integrire ſie. Das Integral iſt

$$\frac{z^{p+r+1}}{p+r+1} - \frac{r.az^{p+r}}{p+r} + \frac{r.(r-1)a^2z^{p+r-1}}{1.2.(p+r-1)} \ldots\ldots \pm \frac{a^r z^{p+1}}{p+1}$$

VIII. Wenn man die Reihe (VII) mit nb^{r+1} dividirt, ſo hat man das verlangte Integral.

VIIII. Man kann die Reihe (VII) auch ſo ausdrucken

$$z^{p+1}\left(\frac{z^r}{p+r+1}-\frac{r\,a\,z^{r-1}}{p+r}+\frac{r.(r-1)\,a^2.z^{r-2}}{p+r-1}\ \ldots\ldots \pm\frac{a^r}{p+1}\right)$$

Dieſer Ausdruck hat die Bequemlichkeit, daß nur der Factor z^{p+1} irrational ſeyn kann, der andere rational iſt.

X. Nun kann man auch z wegſchaffen, und ſtatt deſſelben überall $a+bx^n$ ſetzen.

XI. Noch iſt die Verbeſſerung des Integrals (204) übrig. Soll es für $x=0$ verſchwinden, und iſt n keine verneinte Zahl, ſo muß in (VIIII) $z=a$ geſetzt werden und es iſt

$$a^{p+1}.a^r.\left(\frac{1}{p+r+1}-\frac{r}{p+r}+\frac{r.(r-1)}{p+r-1}\ \ldots \pm\frac{1}{p+1}\right)$$

$+\text{Conſt}=0$ oder

$$\text{Conſt}=-a^{p+r+1}.\left(\frac{1}{p+r+1}-\ldots\ldots\pm\frac{1}{p+1}\right)$$

XII. Die Reihe VIIII; und der Werth der Conſt; XI; zuſammen mit nb^{r+1} dividirt (VIII) geben das geſuchte Integral.

XIII. Wenn p eine verneinte ganze Zahl nicht gröſſer als $-r-1$ iſt, ſo daß $p+r+1$ bejaht iſt, ſo bekömmt die Reihe (VI) mit z^p multiplicirt ein Glied darinnen $\frac{dz}{z}$ befindlich iſt, deſſen Integral iſt $\log z^z$. Alsdenn läßt ſich der Ausdruck (VIIII) nicht brauchen.

Exempel $\frac{x^3dx}{(1+x)^2}$ giebt $m=3$; $n=1$ $p=-2$; $r=3$; $a=1$; $b=1$ und die Reihe VI; nach VII mit $z^{-2}dz$ multiplicirt

$$zdz-3dz+\frac{3dz}{z}+\frac{dz}{z^2}$$

Davon iſt das Integral

$$\tfrac{1}{2}z^2-3z+3\log z-\frac{1}{z}+\text{Conſt}=0$$

Soll es für $x=0$ oder $z=1$ verſchwinden, ſo iſt $\frac{1}{2}-3-1+\text{Conſt}=0$ oder $\text{Conſt}=\frac{7}{2}$ alſo $1+x$ ſtatt z geſetzt und nach VIIII mit 2 dividirt, kömmt $\int\frac{x^3dx}{(1+x)^2}=$

$$\frac{(1+x)^2}{4}-\frac{3.(1+x)}{2}+\tfrac{3}{2}\log(1+x)-\frac{1}{2(1+x)}+\tfrac{7}{4}$$

249. Zuſ. Für $n=1$ findet allemahl 248; II ſtatt, wenn m eine ganze bejahte Zahl oder auch

$= 0$ iſt; alsdenn iſt $r = m$; und man hat das Integral von $x^m . (a+bx)^p dx$

250. Zuſ. Iſt in (249) ferner $p = +\frac{1}{2}$ oder $= -\frac{1}{2}$ ſo hat man die Integrale von

I) $x^m dx . \sqrt{(a+bx)}$

II) $\frac{x^m dx}{\sqrt{(a+bx)}}$

251. Zuſ. Wenn m in (249) gerade iſt ſo ſetze man es $= 2c$; und $x^2 = u$; alſo $dx = \frac{du}{2\sqrt{u}}$ ſo verwandelt ſich (249) in $\frac{1}{2} u^{c-\frac{1}{2}} . (a+bu)^p . du$ welches ſich alſo auch integriren läßt, c mag welche ganze bejahte Zahl man will ſeyn, oder auch $= 0$

252. Zuſ. Wenn $n = 2$ ſo folgt aus (249) das Integral von $x^{2r \pm 1} . (a+bx^2)^p dx$

253. Zuſ. Nachdem man in (252), $p = +\frac{1}{2}$ oder $= -\frac{1}{2}$ ſetzt, hat man die Integrale von

I) $x^{2r+1} . \sqrt{(a+bx^2)}\, dx$

II) $\frac{x^{2r+1} . dx}{\sqrt{(a+bx^2)}}$

wo $2r+1$ jede ungerade Zahl ſeyn kan. Beyde ſind

ſind durch endliche Reihen ohne Logarithmen gegeben (249 VIII)

Ex. Für $x^3 \sqrt{(a+bx^2)}\, dx$ iſt $r=1$; $p+r=\frac{3}{2}$ alſo wird die Reihe in 248; VIIII;

$(a+bx^2)^{\frac{3}{2}} \cdot (\frac{2}{5} \cdot (a+bx^2) - \frac{2}{3} a)$

$= \frac{2}{15} \cdot (a+bx^2)^{\frac{3}{2}} \cdot (3bx^2 - 2a) = M$

Ferner aus 249; XI Conſt =

$- a^{\frac{5}{2}} \cdot (\frac{2}{5} - \frac{2}{3}) = + \frac{2}{15} \cdot 2a^{\frac{5}{2}}$

Dieſes zu M geſetzt giebt

$\frac{2}{15} \cdot ((a+bx^2)^{\frac{3}{2}} \cdot (3bx^2 - 2a) + 2a^{\frac{5}{2}})$

und dieſes nach 248 VIII; mit $2b^2$ dividirt giebt das verlangte Integral ſo daß es für $x=0$ verſchwindet.

II. Ex. Eben ſo iſt für $\frac{x^3\, dx}{\sqrt{(a+bx^2)}}$ nur $p=-\frac{1}{2}$; $p+r=+\frac{1}{2}$ und das verbeſſerte Integral $\frac{\sqrt{(a+bx^2)} \cdot (bx^2 - 2a) + 2a\sqrt{a}}{3bb}$

254. Zuſ. $(ax^q + bx^s)^p \cdot dx = x^{pq} \cdot (a+bx^{s-q})^p \cdot dx$; da iſt aus (248) $m = pq$; $n = s - q$, und das Differential läßt nach 248; III; ſich integriren wenn $\frac{pq+1}{s-q}$ eine ganze be-

jahte Zahl iſt, die man $= r + 1$ ſetzen kan. Es iſt $z = a + bx^{s-q}$

255. Zuſ. Wenn $p = \frac{1}{2}$; $s = q + 1$, ſo läßt ſich $\surd (ax^q + bx^{q+1}).dx$ allemahl integriren wenn q gerade iſt. Es iſt alsdenn $r = \frac{1}{2}q$

Exempel Für $\surd (ax^2 + bx^3).dx$ iſt $q = 2$; $r = 1$; $z = a + bx$ und das verbeſſerte Integral

$$\frac{2.\left((a+bx)^{\frac{3}{2}}.(3bx-2a)+2a^{\frac{5}{2}}\right)}{15b^2}$$

256. Anm. Wenn man die gefundenen Integrale differentiirt, und daraus die angenommenen Differentiale herausbringt, ſo verſichert man ſich von der Richtigkeit der gefundenen Integrale, nicht in Abſicht auf die Gewißheit der Regeln, von denen man durch die Beweiſe überzeugt ſeyn muß, ſondern ob man ſolche richtig angebracht und gehörig gerechnet hat.

Andere Verwandlungen.

257. Aufg. $\frac{aadx}{x\surd(ax+xx)}$ zu integriren.

Aufl. Man ſetze $\surd(ax+xx) = \frac{zx}{b}$ alſo

$a + x = \frac{zzx}{b^2}$ und $x = \frac{abb}{(zz-bb)}$ folglich

$\frac{zx}{b} = \frac{abz}{zz-bb}$ und $dx = \frac{abb. - 2zdz}{(zz-bb)^3}$

alſo

also $\frac{aadx}{x\sqrt{(ax+xx)}} = \frac{aa. - 2abbzdz}{(zz-bb)^2}$.

$\frac{zz-bb}{abb} \cdot \frac{zz-bb}{abz} = \frac{-2adz}{b}$ davon das Integral $-\frac{2az}{b} = \frac{-2a\sqrt{(ax+xx)}}{x}$

258. *Anm.* Die Abſicht bey dieſem Verfahren iſt die Irrationalgröſſe wegzuſchaffen; daher man ſich hier ſolcher Kunſtgriffe gebraucht wie bey den unbeſtimmten Aufgaben (Alg. 183.). Dergleichen lehrt auch Eul. Intr. in analyſ. inf. L. I. c. 3.

259. Die Differentiale die nur eine veränderliche Gröſſe enthalten, werden folgendergeſtalt abgetheilt. Wenn eine Gröſſe unterſchiedene Glieder enthält, in deren einem oder mehrern die veränderliche Gröſſe befindlich iſt, und aus dieſer zuſammengeſetzten Gröſſe, eine Wurzel gezogen wird, ſo heißt man das hier eine Irrationalgröſſe; und wenn dergleichen in einem Differentiale vorkommt, iſt es ein irrationales Differential.

Wie in 248; wenn p ein Bruch iſt, und in den folgenden Abſätzen.

Enthält das Differential keine ſolche zuſammengeſetzte Irrationalgröſſe, ſo heißt es rational

Wie das (248) wenn p eine ganze Zahl, bejaht oder verneint wäre.

Hiebey hindert nichts, daß in einem Differentiale Theile vorkommen, wo aus der veränderlichen Gröſſe eine Wurzel gezogen iſt, wenn ſolche Theile nur keine zuſammengeſetzten Gröſſen ſind. So iſt in (208) das Element der Fläche der Parabel ein rationales Differential, denn das Verfahren nach 203. V; iſt einerley, m — 1 mag eine ganze Zahl oder ein Bruch ſeyn.

260. Wenn eine rationale Function ein Quotient iſt, wo ſich die veränderliche Gröſſe im Diviſor befindet, ſo heißt ſie eine gebrochne. Iſt die veränderliche Gröſſe nicht im Diviſor, eine ganze.

So wäre $\frac{a+bx}{c+fx^2}$ eine gebrochne Function,

aber $\frac{m+nx}{g}$ eine ganze.

Wenn die ganze Function mit dx multiplicirt iſt, ſo hat die Integration keine Schwürigkeit. Bey einer gebrochnen Function aber ſind Kunſtgriffe nöthig die unten (347 u. f.) vorkommen werden.

261. Irrationale Differentiale, ſucht man in rationale zu verwandeln (wie 248) und wenn alsdenn gebrochne Functionen vorkommen bedient man ſich der nur erwähnten Kunſtgriffe.

Von

Von der verkehrten Methode der Tangenten.

262. Erkl. Man heißt die verkehrte Methode der Tangenten das Verfahren, da man aus gegebenen Eigenſchaften der Tangenten oder Normallinien u. ſ. w. einer krummen Linie, die Gleichung für die krumme Linie findet.

263. Aufg. Eine krumme Linie zu finden, deren Subtangente $\frac{ydx}{dy} = \frac{yy}{r+x}$ iſt.

Aufl. Alſo iſt $(r+x)\,dx = ydy$ oder $rx + \frac{1}{2}xx = \frac{1}{2}y^2 + \text{Conſt.}$ Sollen x und y zugleich $= 0$ ſeyn, ſo iſt $\text{Conſt} = 0$ und $2\,rx + xx = yy$ und die krumme Linie iſt eine gleichſeitige Hyperbel (Alg. 417.) wo (Alg. 389.) $b = a = 2r$.

264. Aufg. Eine krumme Linie zu finden, deren Subnormallinie unveränderlich iſt.

Aufl. Weil $\frac{ydy}{dx} = a$ ſo iſt $ydy = adx$ folglich $\frac{1}{2}yy = ax + \text{Conſt.}$ Geſetzt nun, es ſoll $y = cc$ für $x = 0$ ſeyn: So iſt $\frac{1}{2}cc = 0 + \text{Conſt}$; oder $\text{Conſt} = \frac{1}{2}cc$; und $yy = 2ax + cc$. Man ſetze $x = u + e$ alſo $yy = 2au + 2ae + cc$; und nehme $e = -\frac{cc}{2a}$ ſo iſt $yy = 2au$. Man kann alſo die allgemeinſte Gleichung, die aus der Integration gefunden ward, $yy = 2au + 2ae + cc$, allemahl auf $yy = 2au$ eine Glei-

chung

chung für eine Parabel, deren Parameter 2 a wäre, bringen. Folglich hat blos die Parabel dieſe Eigenſchaft.

265. Anm. Daß die Parabel dieſe Eigenſchaft hat, iſt ſchon (93) dargethan worden. Hier zeigt ſich, daß dieſe Eigenſchaft keiner andern krummen Linie zukömmt. Und ſo kann man vermittelſt dieſer Methode verſuchen, welche von den Sätzen, die durch die vorhin (77; 92) gelehrte Methode: (methodus directa tangentium) gefunden worden ſind, ſich umkehren laſſen.

Von der Rectification der krummen Linien.

266. Aufg. Das Differential des Bogens CM 1 F. einer gegebenen krummen Linie zu finden.

Aufl. Der Bogen CM heiſſe s, und wachſe um das endliche Stück MN = Δs indem die Abſciſſe AP um das endliche Stück PQ = MS wächſt. Nun iſt Δs allemahl gröſſer als die Sehne MN oder $\frac{\Delta s}{\surd(MS^2 + NS^2)} = 1 + p$ daß p eine bejahte Gröſſe bedeutet. Aber p kann unendlich abnehmen, weil die Sehne MN ihrem Bogen ſo nahe kommen kann als man will, wenn man die Ordinate NQ unendlich nahe an PM rücken läßt. (68) Die Gränze des Quotienten $\frac{\Delta s}{\surd(MS^2 + NS^2)}$ bey dieſer unendlichen Nähe-

rung

rung iſt $\frac{ds}{\surd(dy^2 + dy^2)}$ welches $= 1$ ſeyn muß, weil p kleiner als jede angebliche Grösse werden kann. Wåre dieſe Grånze $= 1 + q$ daß q eine angebliche Grösse bedeutete, ſo könnte p nicht kleiner als q werden. Daß die Grånze nicht kleiner als 1 iſt, erhellt, weil $\frac{\Delta s}{\surd(MS^2 + NS^2)}$ nicht kleiner als 1 werden kann. Alſo iſt s eine ſolche Function von x und y, daß $ds = \surd(dx^2 + dy^2)$. Wenn man Mm für eine gerade Linie annimmt, wo $MR = dx$; $Rm = dy$ iſt, ſo iſt $Mm = \surd(dx^2 + dy^2)$. So trågt man den Beweis insgemein vor.

267. Aufg. Die Långe s einer gegebenen krummen Linie zu finden.

Aufl. Aus der Gleichung drücke man $\surd(dx^2 + dy^2)$ durch x, dx, oder durch y, dy, allein, wo möglich, aus, und integrire ſolches. Das Integral muß s ſeyn (266.)

268. Aufg. Eine Parabel für die $y^3 = axx$ iſt, zu rectificiren.

Aufl. Man ſetze $a = 1$, weil ſich die Abmeſſungen nachgehends allemahl wieder durch den Buchſtaben ergånzen laſſen. Alſo $y^{\frac{3}{2}} = x$; giebt $\frac{3}{2} y^{\frac{1}{2}} dy = dx$; und $ds = dy \surd(1 + \frac{9}{4} y)$. Dieſes mit 245; verglichen, iſt

vor.

245	X	a	p	c
hier	$\frac{9}{4}y$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{9}$

alſo das Integral $= \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} \cdot (1 + \frac{9}{4}\,y)^{\frac{3}{2}} + \text{Conſt}$

Soll es für $y = 0$ verſchwinden, ſo kömmt

$$0 = \frac{8}{27} + \text{Conſt}$$

alſo $s = \frac{8}{27} \cdot ((1 + \frac{9}{4}\,y) \cdot \surd(1 + \frac{9}{4}\,y) - 1)$

Dieſes verwandelt ſich in

$\frac{1}{27} \cdot ((4 + 9\,y) \cdot \surd(4 + 9\,y) - 8)$

Will man ſtatt 1 den Buchſtaben ſetzen ſo darf man nur bedenken daß alles nur eine Abmeſſung haben muß: Alſo ſetzt man

$$s = \frac{1}{27} \cdot (4a + 9y) \cdot \surd(4 + \frac{9y}{a} - \frac{8a}{27}$$

269. Anm. Man heißt dieſe Parabel die neiliſche. Wilhelm Neil hat ihre Rectification gefunden und 1657 bekannt gemacht. Es iſt, ſo viel man weiß die erſte krumme Linie, die rectificirt worden iſt. S. Walliſens Brief an Hugen, der ſich bey Walliſens Schrift von der Cycloide befindet. Wallis. Op. Math. Vol. 1. p. 551. Unter den Erläuterungen über Carteſens Geometrie 517. S. findet ſich Heinrich v. Hevraet Schreiben von Verwandelung krummer Linien in gerade, an Franz v. Schooten, 1659 aufgeſetzt, wo Hevraet eben dieſe Parabel zum Exempel ſeiner Methode anführt. Neils Erfindung iſt ihm vermuthlich unbekannt geweſen. S. unten 559.

270. Zuſ. Man ſetze ds (268) dem Elemente der Fläche einer krummen Linie mit einer beſtändigen Gröſſe dividirt, oder $\frac{2dy}{a}$ gleich, wo y der

an-

andern krummen Linie Abſciſſe iſt. Dieſes giebt wenn man die Abmeſſungen ſogleich ergänzt, $4aa + 9ay = 4zz$. Man ſetze $y = u + e$ daß ſich der Gleichung linker Theil in $4aa + 9au + 9ae$ verwandelt, und ferner $4aa + 9ae = 0$ oder $e = -\frac{4}{9}a$. Wenn alſo $u = y + \frac{4}{9}a$ ſo iſt $9au = 4zz$ oder $\frac{9}{4}au = zz$ und die andere Linie iſt eine apolloniſche Parabel, deren Parameter $= \frac{9}{4}a$. Das Element der Länge der neiliſchen Parabel, iſt alſo dem Elemente der Fläche der apolloniſchen durch a dividirt gleich, und man kann die neiliſche rectificiren, wenn man die apolloniſche quadriren kann. Da ſich nun das letzte thun läßt, (208) ſo wird dadurch die Rectification der neiliſchen begreiflich.

271. Aufg. Die apolloniſche Parabel, deren Parameter a iſt; zu rectificiren.

Aufl. Weil für ſie $dx = \frac{2y}{a} dy$ (84) ſo iſt

$$ds = \frac{dy\sqrt{(aa + 4yy)}}{a} = dy\sqrt{\left(1 + \frac{4yy}{aa}\right)}.$$

Dieſes zu integriren verwandelt man die Irrationalgröſſe in eine unendliche Reihe, deren jedes Glied man mit dy multiplicirt, und denn integrirt. Zu dieſer Verwandlung kann man (51) brauchen, und ſtatt des dortigen n; y; hier 2; $4yy : a^2$ ſetzen. So bekömmt man:

$$ds = dy.\left(1 + \frac{2yy}{aa} - \frac{2y^4}{a^4} + \frac{4y^6}{a^6} - \frac{10y}{a^8}\right)$$

und $s = y + \frac{2y^3}{3aa} - \frac{2y^5}{5a^4} + \frac{4y^7}{7a^6} - \frac{10y^9}{8a^8} \ldots$

wo $y < a$ ſeyn muß, wenn ſich die Reihe nähern ſoll. Wollte man die Reihe durch x ausdrücken, ſo ſetzte man

$$s = y.\left(1 + \frac{2yy}{3\,aa} - \frac{2y^4}{5\,a^4} + \frac{4y^6}{7a^6} - \frac{10y^8}{9\,a^8} \ldots\right)$$

$$= \surd ax.\left(1 + \frac{2x}{3\,a} - \frac{2\,x^2}{5\,aa} + \frac{4x^3}{7a^3} - \frac{10x^4}{9\,a^4} \ldots\right)$$

Will man eine Reihe haben, die ſich für ein groſſes y nähert, ſo ſetze man $\surd\,(4yy + aa)^{\frac{1}{2}}$ $= 2y + \frac{aa}{8y} + \frac{a^4}{64y^3} \ldots$ welches mit $\frac{dy}{a}$ multiplicirt und integrirt $s = \frac{yy}{a} + \frac{1}{8}\,aly - \frac{a^3}{128yy} \ldots$ giebt

272. Anm. $ds = \frac{dy}{a}.\,2\surd\,(\frac{1}{4}\,aa + yy)$ alſo $\frac{1}{2}\,ds = \frac{dy.\,\surd\,(\frac{1}{4}\,aa + yy)}{a}$. Es ſey $\frac{1}{2}\,ds = \frac{zdy}{a}$, ſo iſt $z = \surd\,(\frac{1}{4}\,aa + yy) =$ dem u Alg. 418. Es können aber die u Alg. 418. Ordinaten bedeuten, die mit der groſſen Axe parallel gehen, wenn die y als Abſciſſen

ſciſſen auf der kleinen aus dem Mittelpuncte genommen werden. Alſo iſt $\frac{1}{2}$ ds ſo groß als das Element der gleichſeitigen Hyperbel Alg. 418. mit 2 dividirt; und man könnte die Parabel durch einen algebraiſchen endlichen Ausdruck (Alg. 751.) rectificiren, wenn man die Hyperbel auf dieſe Art quadriren könnte. Das letztere aber hat man bisher noch nicht thun können, es läßt ſich auch nicht bewerkſtelligen, weil die Quadratur der Hyperbel mit den Logarithmen zuſammenhängt, wie einigermaſſen aus (283) erhellen wird; der Logarithme aber von x läßt ſich nicht durch x algebraiſch geben, weil einer Zahl unzählich viel Logarithmen zugehören (234) und alſo der Logarithme eine tranſcendentiſche Function ſeiner Zahl iſt. (Alg. 571.) Die Gränzen, in die ich mich einſchränken muß, verſtatten mir nicht dieſes alles vollſtändig auszuführen.

Quadraturen und Rectificationen, die zum Kreiſe gehören.

273. Aufg. Das Stück der Kreisfläche CDMP 17 F. zu quadriren, wo CP = x, PM = y; CD = CA = 1.

Aufl. Weil $y = \surd(1 - xx)$ alſo $ydx = dx \surd(1 - xx)$ ſo mache man die Reihe

$$\surd(1 - xx) = (1 - xx)^{\frac{1}{2}}.$$

Ein allgemeines Geſetz dieſer Reihe findet man aus 51 wenn dort n=2 geſetzt wird. Da ſind die Coefficienten von $(1 + y)^{\frac{1}{2}}$; folgende, die erſte 1 nicht mitgerechnet,

$$\frac{1}{2};\ -\frac{1}{8};\ -\frac{1}{8}\cdot\frac{-3}{3.2} = +\frac{1}{16};$$

$+\frac{1}{16}.\ \frac{-5}{4.2}=\frac{-5}{128};\ \frac{-5}{128}.\ \frac{-7}{5.2}=$

$\frac{+7}{256}$ und ſo der r te Coefficient

$\frac{1.-1.-3.\ldots\ldots-(2r-3)}{1.\ 2.\ 3.\ldots\ldots\ldots r.\ 2^r}$ Es iſt aber

$2r-3$ die $r-1$te ungerade Zahl, (wie man aus Alg. 38 findet, wenn man das dortige $2m+1$ hier $=2r-3$ ſetzt); und der rte Coefficient iſt bejaht oder verneint, nachdem die Zahl ſeiner verneinten Factoren, d. i. nachdem $r-1$ gerade oder ungerade iſt. Um alſo was beſtimmtes zu haben, ſo ſetze man, er ſoll bejaht, alſo $r-1=2t$ und $r=2t+1$ ſeyn, ſo iſt $2r-3=4t+2-3=4t-1$ und der rte oder $2t+1$te Coeficieient $=$

$$\frac{+1.1.3.5.\ldots\ldots(4t-1)}{1.2.3.4\ldots\ldots(2t+1)2^{2t+1}}=P;$$

Alſo der folgende $(2t+2)$te $=Q=$

$$\frac{P.-(2r-1)}{2.(r-1)}\ (51)=\frac{P.-(4t+1)}{2.(2t+2)}=$$

$$-\frac{P.(4t+1)}{2.(2t+2)}$$

Wenn man nun $(1-xx)^{\frac{1}{2}}$ macht, ſo wird der erſte Coefficient in $-xx$; der zweyte in $+x^4$;

der dritte in $-x^6$; und ſo der r te in $(-x^2)^r$ oder der $(2t+1)$te in $(-x^2)^{2t+1}$ d. i. in $-x^{4t+2}$ multiplicirt, der r + 1 te oder $(2t+2)$ te in $(-x^2)^{2t+2} = +x^{4t+4}$. Alſo wird jeder Coefficient, der in $(1+y)^{\frac{1}{2}}$ bejaht iſt, in eine verneinte Gröſſe, und jeder verneinte in eine bejahte multiplicirt. Die Producte werden alſo alle verneint, und es iſt

$$\sqrt{(1-xx)} = 1 - \tfrac{1}{2}xx - \tfrac{1}{8}x^4 - \tfrac{1}{16}x^6 - \tfrac{5}{128}x^8 - \tfrac{7}{256}x^{10} \ldots\ldots - \frac{1.1.3.5\ldots\ldots 4t-1}{1.2.3.4\ldots(2t+1)\,2^{2t+1}}.\, x^{4t+2} - \frac{P.(4t+1)}{2.(2t+2)}.\, x^{4t+4}\ldots\ldots$$

Wenn man nun hier jedes Glied mit dx multiplicirt und integrirt, ſo erhält man:

$$\int dx\sqrt{(1-xx)} = x - \frac{x^3}{2.3} - \frac{x^5}{8.5} - \frac{x^7}{16.7} - \frac{5x^9}{128.9} - \frac{7x^{11}}{256.11}\ldots\ldots$$

$$- \frac{1.1.3.5\ldots\ldots(4t-1).\, x^{4t+3}}{1.2.3.4\ldots\ldots(2t+1).\,2^{2t+1}.(4t+3)}$$

$$- \frac{P.(4t+1).\, x^{4t+5}}{2.(2t+2).(4t+5)}\ldots\ldots$$

Wo die allgemeinen Glieder wegen des Geſetzes

des Fortganges zu merken ſind. Die Conſt iſt hier und in der Folge $=0$ weil das Integral mit den Gröſſen, nach denen die Reihen fortgehen, wie hier x, in (275) u iſt, verſchwinden. Dieſe Reihe gibt ein Stück DCPM bald ziemlich genau, wenn x klein iſt.

Wenn man in ihr $x=1$ ſetzt, ſo bekömmt man den Innhalt des Quadranten $DCA = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} - \frac{1}{112} \ldots$

274. Zuſ. Das Stück CDMP beſteht aus dem Ausſchnitte MCD und dem Dreyecke CMP; Es iſt alſo $\frac{1}{2}$ Bog DM $+ \frac{x\surd(1-x^2)}{2}$; des Bogens DM Sinus für den Halbmeſſer $=1$, iſt x; dieſer Bogen heiſſe δ; So iſt CDMP $= \frac{1}{2}.\delta + \frac{1}{4}.\sin 2\delta$ (Trig. 19. S. 5. Zuſ.) Folglich $\int\surd(1-x^2)\,dx = \frac{1}{4}.(2\delta + \sin 2\delta)$

275. Aufg. Den Abſchnitt APM zu quadriren, wo $AP = u = 1 - x$ (273).

Aufl. Hier iſt $y = \surd(2u-uu)$ alſo das Element des Abſchnitts $= du\surd(2u-uu)$. Dieſes zu integriren muß die Irrationalgröſſe in eine unendliche Reihe verwandelt, und denn wie in (273) verfahren werden. Dieſe Verwandelung bequem zu verrichten, erwege man, daß die Irrationalgröſſe $=\surd 2u.\surd(1-\frac{1}{2}u)$. Man ſuche alſo nur die unendliche Reihe für den letzten Factor; dieſe hat man aus (273), wenn man ſtatt

des

des dortigen xx hier ½ u ſchreibt. Sie wird alſo

$$1 - \frac{1}{4}u - \frac{1}{8.4}uu - \frac{1}{16.8}u^3 - \frac{1}{128.16}u^4 - \frac{7}{256.32}u^5 \ldots - P.\left(\frac{u}{2}\right)^{2t+1} - Q.\left(\frac{u}{2}\right)^{2t+2}\ldots$$

Folglich iſt $\surd(2u-uu) = \surd 2.\surd(u-\frac{1}{2}u^2) =$

$$\surd 2.\Big(u^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}u^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8.4}u^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{16.8}u^{\frac{7}{2}} - \frac{5}{128.16}u^{\frac{9}{2}} - \frac{7}{256.32}.u^{\frac{11}{2}} - \frac{21}{1014.64}u^{\frac{13}{2}} - \frac{33}{2048.128}u^{\frac{15}{2}} - \frac{429}{32768.256}.u^{\frac{17}{2}}\ldots - \frac{P}{2^{2t+1}}u^{(4t+3):2} - \frac{Q}{2^{2t+2}}.u^{(4t+5):2}\ldots\Big)$$

Jedes Glied dieſer Reihe mit du multiplicirt und integrirt giebt die Fläche APM $= \surd 2\Big(\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}$

$$- \frac{1}{4}.\frac{2}{5}.u^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{8.4}\frac{2}{7}.u^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{16.8}.\frac{2}{9}.u^{\frac{9}{2}} - \frac{5}{128.16}.\frac{2}{11}.u^{11:12}\ldots - \frac{P}{2^{2t+1}}.\frac{2}{4t+5}.u^{(4t+5):2} - \frac{Q}{2^{2t+2}}.\frac{2}{4t+7}.$$

$u^{(4t+7):2} \ldots)$ Man ſieht gleich, daß ſich jede zwey folgende Glieder der Reihe ſo ausdrük-ken laſſen, wenn P einen Coefficienten, für den r ungerade iſt, (273) bedeutet:

$$-\frac{P}{2^{2t}} \cdot \frac{u^{(4t+5):2}}{4t+5} - \frac{Q}{2^{2t+1}} \cdot \frac{u^{(4t+7):2}}{4t+7}$$

Daher denn auch für dieſe Reihe ein allgemeines Geſetz dargethan iſt.

276. Zuſ. Man kann ſie auch ſo ausdrücken:

$$2\sqrt{2u}. \left(\tfrac{1}{3}u - \frac{1}{4.5}u^2 - \frac{1}{8.4.7.}u^3 - \frac{1}{16.8.9}u^4 - \frac{5}{128.16.11}u^5 \ldots \right.$$

$$\left. \ldots - \frac{P.u^{2t+2}}{2^{2t+1}.(4t+5)} - \frac{Qu^{2t+3}}{2^{2t+2}.(4t+7)} \ldots \right)$$

277. Zuſ. Wenn z; v; als Ordinate und Abſciſſe eines Kreiſes, deſſen Halbmeſſer r iſt, einem Bogen zugehören, der dem Bogen AM 17 F. ähnlich iſt; ſo iſt z = ry; v = ru; dv = rdu (Trig. 1. S.) alſo das Element des ähnlichen Ab-ſchnittes in dieſem Kreiſe = zdv = ry. rdu = rr. ydu; und folglich der Abſchnitt der in die-ſem Kreiſe einem Bogen zugehört, der dem Bo-gen AM ähnlich iſt; = rr ſy du; Man findet ihn

ihn alſo, wenn man $\frac{v}{r}$ ſtatt u ſetzt, aus 276 folgendergeſtalt:

$$2rr.\sqrt{\frac{2v}{r}}.\left(\tfrac{1}{3}.\frac{v}{r}-\frac{1}{4.5}.\frac{vv}{rr}-\frac{1}{8.4.7}.\left(\frac{v}{r}\right)^3-\frac{1}{16.8.9}.\left(\frac{v}{r}\right)^4-\frac{5}{128.16.11}.\left[\frac{v}{r}\right]^5\ldots-\frac{P}{2^{2t+1}.(4t+5)}.\left(\frac{v}{r}\right)^{2t+2}-\frac{Q}{2^{2t+2}.(4t+7)}.\left(\frac{v}{r}\right)^{2t+3}\ldots\right)$$

278. Zuſ. Man ſetze nun den Durchmeſſer $=1$ alſo $r=\frac{1}{2}$; ſo iſt $2rr\sqrt{\frac{2v}{r}}=\frac{1}{2}\sqrt{4v}=\sqrt{v}$; und die Fläche wird

$$\sqrt{v}.\left(\tfrac{2}{3}v-\tfrac{1}{5}vv-\frac{1}{4.7}.v^3.-\frac{1}{8.9}.v^4-\frac{1}{64.11}.v^5\ldots-\frac{2P}{4t+5}.v^{2t+2}-\frac{2Q}{4t+7}.v^{2t+3}\ldots\right)$$

279. Zuſ. Man kann in der Reihe (273) jedes Glied durch das vorhergehende ausdrücken, das wo $4t+3$ der Exponent von x iſt ſey $=\zeta$;

 und

und das folgende $= \theta$; ſo iſt $P = \frac{-(4t+3)\zeta}{x^{4t+3}}$ welcher Werth von P im folgenden Gliede gebraucht $\theta = \frac{(4t+3).(4t+1)}{2.(2t+2).(4t+5)} . \zeta x^2$ giebt; welches verneint iſt, weil ζ verneint iſt.

Exempel. Wenn $4t + 3 = 7$ alſo $t = 1$ und $\zeta = \frac{-x^7}{128.9}$ ſo iſt $\theta \frac{7.5}{2.4.9} . \frac{-x^7}{16.7} . xx = -\frac{5}{128.9} x^9$ Dieſes dient, daß man nicht jedes Glied von neuem berechnen darf, ſondern aus jedem berechneten das nächſtfolgende finden kann.

280. Zuſ. Eben ſo in 277; wenn in der Reihe, die in $2rr\sqrt{\frac{v}{r}}$ multiplicirt wird; das Glied, deſſen Exponent $2t + 2$ iſt ζ; das folgende θ heißt; ſo iſt $P = 2^{t+1} . (4t+5) . \left(\frac{v}{r}\right)^{-2t-2} \zeta$ und weil $Q = \frac{-P.(4t+1)}{2.(2t+2)}$ (273) ſo iſt

$$\theta = \frac{(4t+5).(4t+1)}{4.(2t+2).(4t+7)} \zeta . \frac{v}{r}.$$

Exem-

Exempel. Wenn $\zeta = -\frac{1}{16.8.9.}\cdot\left(\frac{v}{r}\right)^4$

alſo t = 1 ſo iſt $\frac{\theta = 9.5}{4.4.11}\cdot -\frac{1}{16.8.9.}\cdot$

$\left(\frac{v}{r}\right)^4\cdot\frac{v}{r} = \frac{-5}{128.16.11}\cdot\left(\frac{v}{r}\right)^5$

281. Aufg. Es ſey 17 F. CA = r; PM = s; AM = a welches hier eine veränderliche Gröſſe bedeutet. Man ſoll den Bogen a aus ſeinem Sinus s finden.

Aufl. $AP = r - CP = r - \surd(rr - ss)$

alſo $dAP = Pp = MR = \frac{-sds}{\surd(rr-ss)}$ und

(266) $da = \left(ds^2 + \frac{ssds^2}{rr - ss}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{rds}{\surd(rr - ss)}$

oder das Differential eines Bogens iſt ein Product aus dem Halbmeſſer in das Differential des Sinus, mit dem Coſinus dividirt; welche Formel von häufigen Gebrauche iſt.

Alſo iſt $da = \frac{rds}{r.\surd\left(1 - \frac{ss}{rr}\right)} = ds.\left(1 - \frac{ss}{rr}\right)^{-\frac{1}{2}}$

Die Irrationalgröſſe wird aus 52 in eine unendliche Reihe verwandelt. Man ſetzt nähmlich, ſtatt des dortigen y; e; r;

hier $-\frac{ss}{rr}$; 2; n

 Nun

Nun ſind in (52) alle Coefficienten, die zu ungeraden Potenzen von y d. i. hier von $\frac{-ss}{rr}$ gehören, verneint, alle aber, die zu geraden von y oder hier von $\frac{-ss}{rr}$ gehören, bejaht. Das erhellt daraus, weil in 52 iſt gewieſen worden, daß jeder folgende Coefficient dem vorhergehenden entgegengeſetzt iſt, zu y aber gehört ein verneinter. Da nun hier die ungeraden Potenzen von $\frac{-ss}{rr}$ verneint, die geraden bejaht ſind, ſo iſt jedes Glied der Reihe ein Product aus zwo verneinten, oder zwo bejahten Gröſſen, und folglich allemahl bejaht. Daher ſieht die Reihe ſo aus

$$1 + \tfrac{1}{2}.\frac{ss}{rr} + \frac{1.3}{1.2.4}.\left(\frac{ss}{rr}\right)^2 + \frac{1.3.5}{1.2.3.8}.\left(\frac{ss}{rr}\right)^3 + \frac{1.3.5.7}{1.2.3.4.16}.\left(\frac{ss}{rr}\right)^4$$

$$+ \frac{1.3.5.7.9}{1.2.3.4.5.32}.\left[\frac{ss}{rr}\right]^5 \ldots$$

$$\ldots + \frac{1.3.5.\ldots\ldots 2n-1}{1.2.3.\ldots\ldots n.\ 2^n}.\left[\frac{ss}{rr}\right]^n + \frac{P.(2n+1)}{(n+1).\ 2}.\left[\frac{ss}{rr}\right]^{n+1} \ldots$$

Wenn man hier jedes Glied mit ds multiplicirt, und integrirt; und Conſt $=0$ ſetzt, weil a und

s zugleich = 0 ſind, ſo erhält man

$$a = s + \tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{3}.\frac{s^3}{r^2} + \frac{1.3}{1.2.4}.\tfrac{1}{5}.\frac{s^5}{r^4} + \frac{1.3.5}{1.2.3.8}.\tfrac{1}{7}\frac{s^7}{r^6} + \frac{1.3.5.7}{1.2.3.4.16}.\tfrac{1}{9}\frac{s^9}{r^8} + \frac{1.3.5.7.9}{1.2.3.4.5.32}.\tfrac{1}{11}.\frac{s^{11}}{r^{10}}$$

$$\ldots + \frac{1.3.\ldots.2n-1}{1.2.\ldots n.2^n}.\frac{1}{2n+1}.\frac{s^{2n+1}}{r^{2n}} + \frac{P.(2n+1)}{(n+1).2.(2n+3)}.\frac{s^{2n+2}}{r^{2n+2}}\ldots$$

welche Reihe alſo wieder durch ein allgemeines Geſetz gegeben iſt.

Wenn das Glied, deſſen Exponent $2n+1$ iſt; ζ; und das folgende θ heißt; ſo iſt

$P = (2n+1).\left[\frac{s}{r}\right]^{-2n}.\frac{\zeta}{s}$ daraus findet ſich

$$\theta = \frac{(2n+1)^2}{(2n+2).(2n+3)}.\zeta\left[\frac{s}{r}\right]^2$$

Exempel. Wenn $2n+1=9$ alſo $n=4$; ſo iſt

$$\theta = \frac{9.9}{10.11}.\frac{1.3.5.7}{1.2.3.4.16}.\tfrac{1}{9}.\frac{s^7}{r^8}\frac{ss}{rr}$$

$$= \frac{1.3.5.7.9}{1.2.3.4.5.32}.\tfrac{1}{11}.\frac{s^{11}}{r^{10}}$$

282. Zuſ. Wenn das erſte Glied der Reihe A, das zweyte B, das dritte C u. ſ. w. heißt, ſo iſt für

$n = 0; \quad 1; \quad 2;$

$\zeta = A; \quad B; \quad C;$

$$\theta = \frac{1.1}{2.3} . \frac{A.ss}{rr}; \quad \frac{3.3}{4.5} . \frac{B.ss}{rr}; \quad \frac{5.5}{6.7} . \frac{C.ss}{rr}; \ldots$$

alſo die Reihe; wenn $r = 1$

$$a = s + \frac{1.1}{2.3} . ss. A + \frac{3.3.ss}{4.5.} B + \frac{5.5.ss}{6.7.} . C + \frac{7.7.ss}{8.9} . D + \frac{9.9.ss}{10.11.} E. \ldots$$

283. Zuſ. Für $r = 1$; iſt $\frac{a}{s}$

$$= 1 + \frac{As}{6} + \frac{3.3.B.s}{4.5} \ldots$$

Dieſer Quotient wird am größten, wenn die Reihe, die ihm gleich iſt, am größten wird. Weil aber dieſer Reihe Glieder alle bejaht ſind, ſo iſt ſie am größten, wenn s am größten, oder $= 1$ iſt; da denn a dem Bogen von 90 Gr. gleich wird. Alſo giebt der Bogen von 90 Gr. durch ſeinen Halbmeſſer dividirt, einen gröſſern Quotienten, als jeder andere Bogen, durch ſeinen Sinus dividirt.

284. Zuſ. Wenn man $a = \frac{1}{2} b$; $s = \frac{1}{2} c$ ſetzt, ſo giebt ſich der Bogen b durch ſeine Sehne c; aus (281) folgendergeſtalt

$$b = c + \frac{c^3}{24} + \frac{3 . c^5}{640} \ldots .$$

285. Aufg. Aus dem Bogen a; den Sinus s zu finden. Ich will dabey $r = 1$ ſetzen.

Aufl. Man könnte zu dieſer Abſicht nur die Reihe 281) umkehren. Sie iſt nähmiich $a = s + hs^3 + is^5 \ldots$, wo h; i; u. ſ. w. die gegeben Coefficienten ſind, wenn man nun in Alg. 690. ſtatt des dortigen x; y; λ; δ;
hier a; s; 1; 2;
ſetzet, ſo erhellt, daß die umgekehrte Reihe $s = Aa + Ba^3 \ldots$ iſt wo man die Coefficienten A; B; . . . beſtimmen müßte. Dieſes geſchähe ſo, daß man ſtatt s; s^3; u. ſ. w. die nur angenommene Reihe ſetzt; folgendergeſtelt

$$\left.\begin{array}{lll} a = s^5 = & Aa + Ba^3 & + C \\ + \frac{1}{6} s^3 = & + \frac{1}{6} A^3 & + \frac{1}{6} . 3AAB \\ + \frac{3}{40} s^5 & & = \frac{3}{40} A^5 \end{array}\right\} a^5$$

Alſo $A = 1$; und weil die folgenden Glieder alle $= 0$ ſeyn müſſen, $B = - \frac{1}{6}$; $C = + \frac{1}{12} - \frac{3}{40} = + \frac{1}{120}$ u. ſ. w. alſo giebt dieſes $s = a - \frac{1}{6} a^3 + \frac{1}{120} a^5 \ldots \ldots$

So pflegt man insgemein dieſe Aufgabe aus der vorhergehenden herzuleiten. Dazu nun muß man hohe Potenzen der Reihe $Aa + Ba^3 \ldots$ machen, wenn man viel Coefficienten derſelben haben will;

und

und auſerdem daß dieſes eine ſehr mühſame Rechnung erfodert, ſo ſehe ich nicht, wie ſich daraus ein allgemeines Geſetz für die Coefficienten A, B, . . . zuverläßig beſtimmen läßt, weil die höhern Glieder der Potenzen der unendlichen Reihe, aus denen man die folgenden Coefficienten beſtimmen muß, gar zu ſehr zuſammengeſetzt werden. Ich will alſo von dieſem Verfahren hier nichts beybehalten als die Geſtalt der Reihe, die man für s annehmen muß. Ich will nähmlich ſetzen

$$s = a + \alpha a^3 + \beta a^5 + \gamma a^7 \ldots + \pi a^{2n-1} + \varrho a^{2n+1} + \sigma a^{2n+3} \ldots$$

Ich nehme da unveränderlich an, und finde

$$\frac{ds}{da} = 1 + 3\alpha a^2 + 5\beta a^4 + 7\gamma a^6 \ldots + (2n-1)\pi a^{2n-2} + (2n+1)\rho a^{2n} + (2n+3)\sigma a^{2n+2}$$

und

$$\frac{dds}{da^2} = * + 3.2\alpha a + 5.4.\beta a^3 + 7.6.\gamma a^5 \ldots + (2n-1).(2n-2)\pi a^{2n-3} + (2n+1).2n.\varrho a^{2n-1} + (2n+3).(2n+2).\sigma a^{2n+1}$$

Nun iſt (281) $\frac{ds^2}{da^2} = 1 - ss$ alſo $\frac{2\,ds\,dds}{da^2}$

=

$= -- 2sds$ oder $\frac{dds}{da^2} = -- s$

Folglich

$3.\,2\alpha a + 5.\,4.\,\beta a^3 + 7.\,6.\,\gamma.\,a^5 \ldots\ldots$
$+ (2n+1).\,2n.\,\rho a^{2n-1}$
$+ (2n+3).(2n+2)\sigma a^{2n+1}$
$= -a - \alpha a^3 -- \beta a^5 \ldots\ldots -- \pi a^{2n-1} -- \varrho a^{2n+1} \ldots$

Wenn man hier die Coefficienten bey einerley Potenz von a gleich ſetzt, ſo erhält man

$\alpha = \frac{--1}{3.\,2}$; $\beta = \frac{--\alpha}{5.\,4}$; $\gamma = \frac{--\beta}{7.\,6} \ldots\ldots$

$\varrho = \frac{-\pi}{(2n+1).\,2n}$ $\sigma = \frac{-\varrho}{(n+3).(2n+2)}$

wo das Geſetz des Fortganges deutlich in die Augen fällt. Jeder Coefficient iſt dem vorhergehenden entgegengeſetzt, und alſo wechſeln bejahte und verneinte ab. Alſo iſt, wenn man jeden Coefficienten mit ſeinem Zeichen nimmt, daß $\alpha = -\frac{1}{3.\,2}$ $\beta = -\left[-\frac{1}{3.\,2}\right] : 5.\,4 = \frac{+1}{5.\,4.\,3.\,2}$ u. ſ. w.

$s = a - \frac{1}{3.\,2}a^3 - \frac{\alpha}{5.\,4}.\,a^5 - \frac{\beta}{6.\,7}a^7 \ldots$
$- \frac{\pi}{(2n+1).\,2n}a^{2n+1} - \frac{\rho}{(2n+3).(2n+2)}.\,a^{2n+3}$

π gehört zum Exponenten $2n - 1$; Iſt

$2n - 1 = \quad 3; \quad 5; \quad 7; \ldots$

ſo iſt

$$\pi = + \frac{1}{3.2} - \frac{1}{5.4.3.2}; + \frac{1}{7.6.5.4.3.2} -$$

Jeder folgende Coefficient kömmt nähmlich heraus, wenn man den vorhergehenden durch ein Product, aus dem Exponenten, zu dem der folgende gehört, in die nächſt kleinere Zahl dividirt. Da nun die Exponenten die uugeraden Zahlen nach der Reihe ſind, ſo iſt der Diviſor jedes Coefficienten ein Product aus allen ganzen Zahlen nach der Reihe, von dem Exponenten, an dem er zugehört. Alſo iſt überhaupt

$$\pi = \frac{1}{(2n-1).(2n-2).(2n-3)\ldots.2} \pm \frac{1}{} - ;$$

ob aber π bejaht oder verneint iſt, erhellt daraus: Wenn $2n - 1$ die zweyte ungerade Zahl; 3; bedeutet, ſo iſt π verneint, und alſo auch weil die Zeichen der Coefficienten abwechſeln, verneint, wenn π die vierte, ſechſte u. ſ. w. ungerade Zahl bedeutet: Folglich bejaht, wenn es die dritte, fünfte, u. ſ. w. ungerade Zahl bedeutet. Aber für die dritte, fünfte, u. ſ. w. ungerade Zahl, oder für eine Zahl, deren Stelle unter den ungeraden Zahlen durch eine ungerade Zahl angedeutet wird, iſt n ungerade; weil $2n - 1$ die n te ungerade Zahl bedeutet. Man ſetze alſo $n =$ einer ungeraden Zahl $= 2t + 1$ ſo iſt $2n - 1 = 4t + 1$ und

$\pi =$

$$\pi = \frac{+1}{(4t+1).\,4t.\,(4t-1)\,\ldots\,2}$$ Folglich der Coefficient bey dem Exponenten $2n+1$ oder $4t+3$; oder

$$\varrho = \frac{-1}{(4t+3).\,(4t+2).\,4t\,\ldots\,2}$$

und die drey Glieder, welche die Exponenten $2n-1$; $2n+1$; $2n+3$ oder $4t+1$; $4t+3$; $4t+5$; haben, ſind

$$\frac{+a^{4t+1}}{(4t+1).\,4t.\,(4t-1)\,\ldots\,2}$$

$$\frac{-a^{4t+3}}{(4t+3).\,(4t+2).\,(4t+1).\,4t\,\ldots\,2}$$

$$\frac{+a^{4t+5}}{(4t+5).\,(4t+4)\,\ldots\,2}$$

Wenn dieſe drey nur gefundenen Glieder ζ; θ; η; heiſſen ſo iſt $\pi = \zeta.\,a^{-4t-1}$ folglich $\theta = -\frac{\zeta a a}{(4t+1).\,(4t+3)}$ auch $\varrho = \theta.\,a^{-4t-3}$ und $\eta = -\frac{\theta.\,ae}{(4t+5).\,(4t+4)}$. Man kann, dieſe Formel zu gebrauchen, zuerſt $\frac{-\alpha}{5.\,4}.\,a^5 = \zeta$ ſetzen, da $t=1$ iſt. Heißt man nun die völligen Glieder,

nicht die Coefficienten der Reihe s, nach der Ordnung;

$a = A; -\frac{1}{3.\,2.}\,a^2 = B$ u. ſ. w. ſo iſt

$$s = a - \frac{Aaa}{3.\,2} - \frac{Baa}{4.\,5} - \frac{Caa}{6.\,7} - \frac{Daa}{9.\,8} - \frac{Eaa}{11.\,10} \ldots$$

286. Zuſ. Aus 284; wird hier $c = b - \frac{b^3}{24} + \frac{b^5}{1920} \ldots$

287. Aufg. Aus dem Querſinus (Sinus verſus) AP; den Bogen AM = a; zu finden.

Aufl. Es ſey AP = u; CA = 1 wie in 275; ſo iſt (nach Geom. 44 S. 8. Z.) der Abſchnitt $APM = \frac{a.\,\frac{1}{2} - (1-u).\,\sqrt{(2u - uu)}}{2}$

alſo $2.\,APM + (1-u).\,\sqrt{2u}.\,\sqrt{(1-\frac{1}{2}u)} = a$

Nun iſt (275)

$$\sqrt{2u}.\,\sqrt{(1-\frac{1}{2}uu)} = \sqrt{2u}.\,\Big[1 - \frac{1}{4}u - \frac{1}{8.\,4}u^2 - \frac{1}{16.\,8}.\,u^3 - \frac{5}{128.\,16}u^4 - \frac{7}{256.\,32}$$

$$-\frac{7}{256.\,32}u^5 \ldots\ldots - \frac{P.\,u^{2t+1}}{2^{2t+1}}$$

$$-\frac{Q.\,u^{2t+2}}{2^{2t+2}}\ldots\ldots\Big]$$

Dieſes multiplicirt mit 1 − u giebt

$$\surd 2u.\Big(1-\frac{5}{4}u+\frac{7uu}{8.\,4}+\frac{3u^3}{16.\,8}+\frac{11}{128.\,16}u^4+\frac{13}{256.\,32}.\,u^5\ldots+\frac{2P-Q}{2^{2t+2}}u^{2t+2}+\frac{2Q-R}{2^{2t+3}}.\,u^{2t+3}\ldots\Big)$$

wo aus 273. $P = \frac{1.\ 1.\,3.\,5.\ldots(4t-1)}{1.\,2.\,3.\,4.\ldots(2t+1).\ 2^{2t+1}}$

und $Q = \frac{P.\,(4t+1)}{2.\,(2t+2)}$ und $R = \frac{Q.\,(4t+3)}{2.\,(2t+3)}$

und $2P - Q = \frac{(4t+7)\ P}{2.\,(2t+2)}$

$$2Q - R = \frac{(4t+9).\ Q}{2.\,(21+2)}$$

alſo die beyden Glieder deren Exponenten $2t+2$ und $2t+3$ ſind

$$+\frac{(4t+7).\,P.\,u^{2t+2}}{2^{2t+3}.\,(2t+2)} + \frac{(4t+9).\ Q.\,u^{2t+3}}{2^{2t+4}.\,(2t+3)}$$

auf die Zeichen der Coefficienten wird hier nicht geſehen, ſondern ſie werden alle als bejaht ange-

nommen, weil ſich durch jedes Multiplication mit der zugehörigen Potenz von $- \frac{1}{2} u$ das Zeichen des Products giebt, (275; 273;)

Zu dieſer Reihe nun muß man 2. APM addiren, nm a zu haben. Ich nehme 2. APM aus 276. wo man $4 \surd 2u$ in die Reihe $\frac{1}{3} u \ldots$ zu multipliciren hat. Um nun den gemeinſchaftlichen Factor $\surd 2u$ in beyde unendliche Reihen in $\frac{1}{3} u \ldots$ und in $1 - \frac{5}{4} u \ldots$ zu multipliciren, ſo multiplicire ich bey 2 APM ſogleich 4 in alle Glieder der Reihe $\frac{1}{3} u \ldots$ dieſes giebt

$$2. APM = \surd 2u. \left(\frac{4}{3} u - \frac{1}{5} uu - \frac{1}{8.\ 7} u^3 \ldots \right.$$

$$\left. - \frac{4 P.\ u^{2t+2}}{2^{2t+1}.\ (4t\ 5)} - \frac{4 Q\ u^{2t+3}}{2^{2t+2}.\ (4t+7)} \ldots \right)$$

dazu addire man die nur jeßo gefundene Reihe $\surd 2u. (1 - \frac{1}{2} uu)$; ſo bekömmt man, die Glieder, die einerley Potenz von u haben, zuſammengerechnet:

$$a = \surd 2u. (1 + \frac{u}{12} + \frac{5 u^3}{16.\ 8.\ 7} \ldots$$

$$+ \frac{5.\ 7.\ u^4}{64.\ 32.\ 9} + \frac{63 u^5}{256.\ 32.\ 11} \ldots$$

$$+ \frac{16tt + 16t + 3}{(2t+2).\ (4t+5)} . \frac{1}{2^{2t+3}} P.\ u^{2t+2}$$

+

$$+\frac{16tt+32t+15}{(2t+3).(4t+7)} . \frac{1}{2^{2t+4}} . Qu^{2t+3}$$

288. Zuſ. Wenn das Glied der Reihe, deſſen Exponent $2t+2$ iſt, ζ; das folgende θ heißt, ſo iſt $P = \frac{(2t+2).(4t+5).2^{2t+3}}{16tt+16t+3} . \zeta u^{-2t-2}$

woraus Q nach 287 gemacht, und mit den gehörigen Gröſſen multiplicirt $\theta =$

$$\frac{(16tt+32t+15).(4t+5).(4t+1)}{(16tt+16t+3).(2t+3).(4t+7)\,4} \zeta u$$

giebt.

Exempel. Wenn $t = 1$ ſo iſt $\theta = \frac{63.\ 9.\ 5.}{35.5.11.4.}$

$$\frac{5.\ 7}{64.\ 32.\ 9} u^4 . u = \frac{63\ u^5}{256.\ 32.\ 11}$$

289. Zuſ. Zu ſehen, ob ſich $16tt+32t+15$ in Factoren zerfällen läßt, ſetze man es $=(4t+\alpha).(4t+\beta) = 16tt+4.(\alpha+\beta)+\alpha\beta$. Dieſes giebt $\alpha+\beta = 8$; $\alpha\beta = 15$ oder $\beta = \frac{15}{\alpha}$

folglich $\alpha + \frac{15}{\alpha} = 8$ oder $\alpha\alpha = 8\alpha - 15$ oder

$\alpha = 4 \pm \sqrt{(16-15)}$ das iſt, $\alpha = 5$ oder 3; da alsdenn $\beta = 3$ oder 5 wird, alſo iſt dieſe Gröſſe $= (4t+5).(4t+3)$. Eben ſo findet man

$16tt + 16t + 3 = (4t+1).(4t+3)$ alſo

$$\theta = \frac{(4t+5)^2}{(4t+7).(4t+6).2} \cdot \zeta$$

290. Zuſ. Wenn S der Binomialcoefficient iſt, der nach R folgt, alſo $S = \frac{R.(4t+5)}{2.(2t+4)}$ ſo iſt der Reihe $r\ (1 - \frac{1}{2}uu)$ (287) Glied das nach dem folgt, deſſen Exponent $2t+3$ iſt, $\frac{2R - S}{2^{2t+4}} u^{2t+4}$ und das Glied der Reihe (276) das eben den Exponenten hat

$$-\frac{R.u^{2t+4}}{2^{2t+3}.(4t+9)}.$$ Es iſt ferner

$$2R - S = \left(2 - \frac{(4t+5)}{2.(2t+4)}\right).R = \frac{4t+11}{2.(2t+4)}.R$$

rechnet man alſo die beyden Glieder der Reihen (287); (276) die den Exponenten $2t+4$ haben, zuſammen, ſo bekömmt man nach gehöriger Rechnung, die wie 287; 289; bewerkſtelliget wird, das Glied der Reihe 287; das eben den Exponenten hat

$$\frac{(4t+7).(4t+5)}{(2t+4).(4t+9)} \cdot \frac{R}{2^{2t+5}} \cdot u^{2t+4}$$

291. Zuſ. Wenn dieſes Glied η heißt, und $R = \frac{Q.(4t+3)}{2.(2t+3)}$ geſetzt wird, ſo iſt

$\theta =$

$$\theta = \frac{(4t+5).(4t+3)}{(2t+3).(4t+7).2^{2t+4}} Qu^{2t+3}$$

daraus findet man $\eta = \frac{(4t+7)^2}{(4t+9).(4t+8).2} . \theta u$

wie in (288).

292. Zuſ. Wenn man die drey Glieder θ, ζ, η; (289; 291) mit einander vergleicht, wo wenigſtens t = 1 alſo 4 der kleinſte Werth von 2t + 2; ſeyn muß, ſo erhellt aus ihnen ein allgemeines Geſetz der Reihe, welches für die 4 erſten Glieder auch durch die Rechnung richtig gefunden wird, wenn nähmlich die Glieder nach der Reihe $1 = A$; $\frac{1}{12} = B$ u. ſ. w. heiſſen, ſo iſt

$$a = \sqrt{2u}\Big(1 + \frac{1}{2.3.2}.Au + \frac{3.3}{4.5.2}.Bu$$

$$+ \frac{5.5.}{6.7.2} Cu + \frac{7.7}{8.9.2.}. Du$$

$$+ \frac{9.9}{10.11.2.} Eu \ldots\ldots\Big)$$

293. Aufg. Aus dem Bogen a; den Querſinus u zu finden.

Aufl. Weil $a = u^{\frac{1}{2}} \sqrt{2} + \frac{u^{\frac{3}{2}} . \sqrt{2}}{12} \ldots$ (287);

ſo iſt, wenn man dieſe Reihe umkehren will (Alg. 690.) das dortige; x; y; λ; δ

hier ; a; u; $\frac{1}{2}$; 1;

alſo $\frac{1}{\lambda} = 2; (1+\delta): \lambda = 2: \frac{1}{2} = 4$; folglich die umgekehrte Reihe

$$u = \alpha aa + \beta a^4 + \gamma a^6 \ldots + \pi a^{2n} + \rho a^{2n+2} + \sigma . a^{2n+4} + \tau . a^{2n+6}$$

und $$\frac{du}{da} = 2\alpha a + 4\beta a^3 + 6\gamma a^5 \ldots$$
$$+ 2n\pi a^{2n-1} + (2n+2)\rho a^{2n+1}$$
$$+ (2n+4)\sigma a^{2n+3}$$
$$+ (2n+6)\tau a^{2n+5} \ldots$$

und, wenn da beſtändig angenommen wird,

$$\frac{ddu}{da^2} = 2\alpha + 4.3\beta aa + 6.5.\gamma a^4 \ldots$$
$$+ 2n.(2n-1).\pi a^{2n-2} + (2n+2)(2n+1)\rho a^{2n}$$
$$+ (2n+4).(2n+3)\sigma a^{2n+2} \ldots$$
$$+ (2n+6).(2n+5).\tau a^{2n+4}$$

Nun iſt $da = \frac{ds}{\surd(1-ss)}$ (281) und $ss = 2u - uu$

alſo $sds = (1-u)\,du$ und $ds = \frac{1-u}{s}.du$, aber $1 - ss = 1 - 2u + uu = (1-u)^2$

alſo $da = \frac{(1-u)\,du}{\surd(2u-uu)\,(1-u)}$ oder

(2u

$(2u - uu)\,da^2 = du^2;\ \frac{ddu}{da^2} = 1 - u =$

$1 - \alpha aa - \beta a^4 - \gamma a^6 \ldots - \pi a^{2n} - \varrho a^{2n+2}$
$\sigma a^{2n+4} \ldots$

Die Glieder, welche einerley Exponenten haben, in beyden Reihen, die $\frac{ddu}{da^2}$ ausdrücken, gleich geſetzt, giebt ſich $\alpha = \frac{1}{2}$; $\beta = -\frac{\alpha}{4.3} = -\frac{1}{4.3.2}$ $\gamma = -\frac{\beta}{6.5} = +\frac{1}{6.5.4.3.2} \ldots$

$\varrho = -\frac{\pi}{(2n+2).(2n+1)}$; $\sigma = -\frac{\rho}{(2n+4.)(2n+3)}$

$\tau = -\frac{\sigma}{(2n+6).(2n+5)}$

Die Zeichen der Coefficienten wechſeln ab, und der erſte α der in der Reihe $= \alpha aa \ldots$ zum Exponenten 2 gehört, iſt bejaht, alſo ſind alle bejaht, die zu Exponenten 2; 2.3; 2.5; ... 2.(2t + 1) (numeris pariter imparibus) gehören, und alle verneint, die zu Exponenten 2.2; 2.4; 2.6; 2.8... 2.2t; (numeris pariter paribus) gehören. Es ſey alſo n = 2t ſo iſt π verneint, ϱ bejaht, σ verneint, τ bejaht, u. ſ. w.

Nun nehme man ferner an, π ſey ein Bruch, deſſen Zähler = 1; der Nenner ein Product aus

allen ganzen Zahlen, vom Exponenten an, dem π zugehört, ſey; oder es ſey

$$\pi = \frac{-1}{2n.(2n-1).(2n-2)\ldots 2} \text{ ſo iſt}$$

$$\rho = +\frac{1}{(2n+2).2n.(2n+1)\ldots 2} \text{ und}$$

$$\sigma = \frac{-1}{(2n+4).(2n+3).(2n+2)\ldots 2}$$

u. ſ. w. oder alle folgende Coefficienten ſind auch ſolche Brüche, nur daß die Zeichen der Zähler abwechſeln. Das Angenommene aber iſt wahr, wenn $\pi = \beta$ und alſo die Folge durchgängig wahr. Alſo iſt, 2t ſtatt n geſetzt

$$u = \frac{aa}{2} - \frac{a^4}{4.3.2} + \frac{a^6}{6.5.4.3.2} \ldots$$

$$-\frac{a^{4t}}{4t.(4t-1)\ldots 2} + \frac{a^{4t+2}}{(4t+2).(4t+1)\ldots 2}$$

$$-\frac{a^{4t+4}}{(4t+4).(4t+3)\ldots 2} \ldots$$

295. Zuſ. Wenn das erſte Glied $\frac{aa}{2} = A$ das zweyte B und ſ. w. heißt; ſo iſt

$$u = \frac{aa}{2} - \frac{Aaa}{3.4} - \frac{Baa}{5.6} - \frac{Caa}{7.8}$$

$$-\frac{Daa}{9.10} \ldots$$

296.

296. Aufg. Aus dem Bogen AM = a den Coſinus CP = x zu finden.

Aufl. $da = \frac{ds}{\surd(1-ss)}$ (281) aber $\surd(1 - ss) = x$ alſo $\frac{-sds}{\surd(1-ss)} = dx$ und $da = -\frac{dx}{s}$ oder $-s\,da = dx$. Nun iſt aus (285) $dx = -ada + \frac{1}{3.2}a^3da$

$$- \frac{1}{5.4.3.2}a^5da + \frac{1}{6.7.5.4.3.2}a^7da \ldots$$

$$- \frac{1}{(4t+1).4t.(4t-1)\ldots.2}.a^{4t+1}da$$

$$+ \frac{1}{(4t+3).(4t+2)\ldots.2}a^{4t+3}da$$

$$- \frac{1}{(4t+5).(4t+4)\ldots.2}.a^{4t+5}da \ldots$$

. . . .

Folglich x = Conſt — den Integralen der Glieder dieſer unendlichen Reihe. Nun verſchwinden dieſe Integrale alle, wenn a = o und da wird x = 1 alſo iſt Conſt = 1 und

$$x = 1 - \tfrac{1}{2}aa + \frac{1.}{4.3.2}.a^4 - \frac{1}{6.5.4.3.2}a^6$$

+

$$+ \frac{1}{8.\,7.\,6.\,5.\,4.\,3.\,2}\,a^8 \ldots\ldots$$

$$- \frac{1}{(4t+2).\,(4t+1)\ldots 2}.\,a^{4t+2}$$

$$+ \frac{1}{(4t+4).\,(4t+3)\ldots 2}.\,a^{4t+4}$$

$$- \frac{1}{(4t+6).\,(4t+5)\ldots 2}.\,a^{4t+6} \ldots\ldots$$

297. Zuſ. Wenn man $-\frac{1}{2}aa = A$; $+\frac{1}{4.\,3.\,2}a^4 = B \ldots$ das Glied, deſſen Exponent $4t+2$ iſt, ζ; die folgenden beyden θ; η; nennt, ſo iſt $x = 1 - \frac{1}{2}aa - \frac{1}{4.\,3}Aaa$

$$-\frac{1}{6.\,5}.\,Baa - \frac{1}{8.\,7}.\,Caa \ldots\ldots$$

$$-\zeta - \frac{1}{(4t+4).\,(4t+3)}.\,\zeta aa -$$

$$\frac{1}{(4t+6).\,(4t+5)}.\,\theta aa \ldots$$

298. Anm. Umgekehrt den Bogen aus dem Coſinus zu finden, berechne man nach (281) den Bogen deſſen Sinus x iſt, und ziehe ihn vom Quadranten ab.

299. Aufg. Aus der Tangente AT = t 18 F. den Bogen AM zu finden.

Aufl.

Aufl. Weil $t = \frac{s}{\sqrt{(1-ss)}}$ (Trig. 4. Erkl. 3. Zuſ.) ſo iſt $dt = \frac{ds}{(1-ss).\sqrt{(1-ss)}} = \frac{da}{1-ss}$ (281). Aber $1 : 1 - ss = 1 + tt : 1$ (Trig. 4. Erkl. 5. Zuſ.) alſo $1 + tt = \frac{1}{1-ss}$ und $dt = da.(1 + tt)$ oder $\frac{dt}{1+tt} = da$. oder das Differential des Bogens, iſt das Differential der Tangente, mit dem Quadrate der Secante dividirt. Wenn At eine nächſtgröſſere Tangente, und CO = CT iſt, ſo laſſe man ſich den Punct t dem Puncte T unendlich nähern; dadurch vermindert ſich zugleich der Winkel TCt unendlich, weil CT: Tt = ſin CtA: ſin TCt, und CtA endlich bleibt; Folglich vermindern ſich die Bogen Mm, TO; als Maaſſe dieſer Winkel unendlich, und nähern ſich unendlich, geraden Linien die mit CMT; CmO, rechte Winkel machten. Ferner iſt CTA = CtA + TCt; wenn alſo TCt unendlich abnimmt, ſo nähert ſich CtA unendlich dem Winkel CTA. Die Gränzen alſo, welche man den Gröſſen, die ſich durch dieſe unendlichen Abnahmen verändern, ſetzen kann, ſind CtA = CTA; tOT = R alſo $\triangle$CAT ∽ $\triangle$TOt und CA: CT = OT: Tt;

+ oder

oder $Tt = \frac{OT.\,CT}{CA}$ aber CM : Mm $= CT : OT$ alſo $Tt = \frac{CT^2\ Mm}{CM^2}$ und Mm $= \frac{CM^2.\ Tt}{CT^2}$. Nennt man alſo $CM = 1$; $Mm = da$; $Tt = dt$, ſo iſt $da = \frac{dt}{1 + tt}$ wie vorhin. Folglich $da = dt.\ (1 - t^2 + t^4 - t^6 \ldots + t^{4n} - t^{4n+2} \ldots\ldots)$ und $a = t - \frac{1}{3} t^3 + \frac{1}{5} t^5 - \frac{1}{7} t^7 \ldots + \frac{1}{4n+1} t^{4n+1} \frac{t^{4n+3}}{4n+3} \ldots$ oder $a = t.\ (1 - \frac{1}{3} t^2 + \frac{1}{5} t^4 - \frac{1}{7} t^6 \ldots + \frac{1}{4n+1}.\ t^{4n} - \frac{1}{4n+3}.\ t^{4n+2}$

300. Zuſ. Wenn $a = 45°$ ſo iſt $t = 1$ alſo iſt der achte Theil des Umkreiſes $= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \ldots$ woraus man alſo den ganzen Umkreis berechnen, und deſſelben Verhältniß zum Durchmeſſer finden könnte.

301. Zuſ. Wenn 1 : P die Verhältniß des Durchmeſſers zum Umfange (S. 44. S.) ſo iſt

2 P

2 P ein Kreis, deſſen Durchmeſſer = 2 oder der Halbmeſſer = 1 iſt, weil 1 : P = 2 : Umfange dieſes Kreiſes. Alſo iſt $\frac{2P}{8}$ oder $\frac{1}{4}$ P = (1 — $\frac{1}{3}$ + $\frac{1}{5}$ . . .) oder P = 4. (1 — $\frac{1}{3}$ + $\frac{1}{5}$ . . . Wenn nun ein Kreis, 1 zum Durchmeſſer, P zum Umfange hat, ſo iſt ſeine Fläche = $\frac{1}{4}$. P = (1 — $\frac{1}{3}$ + $\frac{1}{5}$ . . . .) So hat Leibniz dieſe Reihe für die Quadratur des Kreiſes zuerſt bekannt gemacht. Act. Er. Lipſ. Febr. 1682. Aber dieſe Reihe nähert ſich zu langſam, als daß ſie die Peripherie bald auf viel Decimalbrüche genau zu finden diente. Wenn man nähmlich den Umkreis bis auf n Decimalſtellen, oder bis auf die Ordnung — n richtig will berechnet haben, ſo muß man bis auf die Glieder der Reihe kommen, die keine Decimalzifern von dieſer Ordnung enthalten. Aber dieſer Reihe fünftes Glied enthält noch Zehntheilchen, oder eine Zifer von der Ordnung — 1. Alſo geben die erſten fünf Glieder den Umkreis nicht bis auf Zehntheile. Nach Eulers Erinnerung Comm. Ac. Petrop. T. VIIII. p. 226. müßte man von ihr 10^{50} Glieder berechnen den Umfang auf 100 Stellen zu haben, welches eine Ewigkeit erfodern würde. Leibniz hat ſie auch a. a. O. nicht vorgeſchlagen den Umfang wirklich daraus zu berechnen, ſondern nur zu zeigen, daß ſich die Quadratur des Kreiſes durch eine Reihe giebt, deren Geſetz ſo leicht zu überſehen iſt.

301.

301. Aufg. Aus dem Bogen die Tangente zu finden.

Aufl. Weil da + t^2 da = dt (299) ſo iſt das erſte Glied von t = a; Man kann nähmlich nach (Alg. 694) ſetzen

$$dt = da + a^2\,da + \tfrac{2}{3}\,a^4\,da$$

$$-\,tt\,da = -\,a^2\,da - \frac{2a^4}{3}\,da$$

$$t = a + \tfrac{1}{3}\,a^3 + \tfrac{2}{15}\,a^5$$

So würde man die folgenden Glieder von t auch finden. Leichter aber geht es ſo an: Wenn in Alg. 690. und hier 299.

$$x;\ y;\ \lambda;\ \delta;\ \frac{1}{\lambda};\ (1+\delta):\lambda;$$

hier a; t; 1; 1; 1; 2;

ſo iſt

$$t = a + \alpha a^3 + \beta a^5 + \gamma a^7 + \delta a^9 + \varepsilon a^{11} \ldots$$

$$tt = a^2 + 2\alpha a^4 + \left.\begin{matrix}+\alpha\alpha\\+2\beta\end{matrix}\right)a^6 + \left.\begin{matrix}+2\alpha\beta\\+2\gamma\end{matrix}\right)a^8 + \left.\begin{matrix}+\beta\beta\\+2\alpha\gamma\\+2\delta\end{matrix}\right\}a^{10}$$

$$\frac{dt}{da} - 1 = 3\alpha a^2 + 5\beta a^4 + 7\gamma a^6 + 9\delta a^8$$

$+ 11\,\varepsilon\,a^{10} \ldots$ Alſo die Coefficienten, die zu einerley Potenzen von a gehören, gleich geſetzt

$$\alpha = \tfrac{1}{3};\ \beta = \frac{2\alpha}{5} = \frac{2}{5\cdot 3};\ \gamma = \frac{2\beta + \alpha\alpha}{7}$$

$$= \tfrac{1}{3}$$

$$= \tfrac{1}{3}.(\tfrac{4}{5} + \tfrac{1}{3}).\tfrac{1}{7} = \frac{17}{9.\ 7.\ 5} = \frac{17}{315}$$

$$\delta = \frac{2.(\alpha\beta + \gamma)}{9} = 2\left(\frac{2}{5.3.3} + \frac{17}{9.5.7}\right).$$

$$\tfrac{1}{9} = 2.\left(2 + \frac{17}{7}\right).\frac{1}{9.\ 5.\ 9} = \frac{2.\ 31}{9.\ 7.\ 5.\ 9}$$

$$= \frac{62}{2835}\ \varepsilon = 2.\ \frac{(\delta + \alpha\gamma) + \beta\beta}{11} =$$

$$\left(2.\left(\frac{2.\ 31}{9.\ 9.\ 7.\ 5} + \frac{17}{3.\ 9.\ 7.\ 5}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{4}{5.\ 5.\ 3.\ 3}\right).\frac{1}{11}$$

$$= \left(\frac{1}{9.\ 7.\ 5.\ 3}.\frac{4.\ 31}{3} + 2.\ 17\right)$$

$$= \left(\frac{1}{9.7.5.3}.\left(\frac{4.\ 31}{3} + 2.\ 17\right)\right.$$

$$\left. + \frac{4}{25.\ 9}\right).\frac{1}{11}$$

$$= \left(\frac{1}{9.\ 7.\ 5.\ 3}.\frac{113.\ 2}{3} + \frac{4}{5.\ 5.\ 9}\right).\frac{1}{11}$$

$$= \frac{1}{9.\ 5}.\left(\frac{1}{7.\ 3}.\frac{113.\ 2}{3} + \frac{4}{5}\right).\frac{1}{11}$$

$$= \frac{1}{9.5} \cdot \frac{691.2}{7.9.5} \cdot \frac{1}{11} = \frac{691.2}{11.9.9.7.5.5} = \frac{1382}{155925}$$ Alſo iſt

$$t = a + \tfrac{1}{3}a^3 + \tfrac{2}{15}a^5 + \tfrac{17}{315}a^7 + \tfrac{62}{2835}a^9 + \tfrac{1382}{155925}a^{11} \ldots\ldots$$

Ein allgemeines Geſetz dieſer Reihe zu finden, braucht man nur einen unbeſtimmten Coefficienten der Reihe tt anzugeben; welches ſich aus (59) thun lieſſe: Aber dieſer Coefficient wird ſo zuſammengeſetzt, daß es keinen practiſchen Nutzen haben würde, das Geſetz der Reihe durch ihn anzugeben, wie ein ſolcher Nutzen ſich bey den Geſetzen der vorigen Reihen findet, daß man nähmlich jedes folgende Glied bequem aus dem vorhergehenden berechnen kann. Daher iſt es der Mühe nicht werth dergleichen allgemeines Geſetz hier zu ſuchen; zumahl, da man a ordentlich ſo klein nimmt, daß die berechneten Glieder der Reihe nicht alle nöthig ſind, t in der verlangten Schärfe zu finden.

302. Aufg. Aus dem Bogen die Cotangente τ zu finden.

Aufl. $\tau = \frac{1}{t}$ (Trig. 5. Erkl. 1. Zuſ.) alſo da

$$t = a.(1 + \tfrac{1}{3}a^2 + \tfrac{2}{15}a^4 + \tfrac{17}{315}a^6 + \tfrac{62}{2835}a^8 \ldots)$$

(301) ſo iſt $\tau = a^{-1}$ in die unendliche Reihe auf die Potenz -1 erhoben multiplicirt. Um alſo dieſe

ſe unendliche Reihe auf die Potenz —1 zu erheben, ſetze man in (56) $m = 1)$ $z = aa$; $\alpha = \frac{1}{3}$; $\beta = \frac{2}{15}$; $\gamma = \frac{17}{315}$; $\delta = \frac{62}{2835}$. Alſo iſt aus (65: V) $A = -\frac{1}{3}$; $B = (-2. -\frac{1}{3}. \frac{1}{3} - 2. \frac{2}{15}). \frac{1}{2} = +\frac{1}{9} - \frac{2}{15} = \frac{1}{3}. (\frac{1}{3} - \frac{2}{5}) = -\frac{1}{45}$

$$C = \left(-3. -\frac{1}{45}. \frac{1}{3} - 3. -\frac{1}{3}. \frac{2}{15} - \frac{3.17}{315}\right). \frac{1}{3}$$

$$= \left(+\frac{1}{45} + \frac{2}{15} - \frac{17}{15.7}\right). \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{15}. \left(\frac{1}{3} + 2 - \frac{17}{7}\right). \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{45}. \frac{7 + 14 - 51}{21} = \frac{-2}{45.21} =$$

$\frac{-2}{945}$ So findet man

$$\tau = \frac{1}{a} - \frac{1}{3} a - \frac{1}{45} a^3 - \frac{2}{945} a^4 - \frac{1}{4725} a^5 \ldots$$

303. Aufg. Aus dem Bogen die Secante S zu finden.

Aufl. $S = x^{-1}$ (296. und Trig. 4. Erkl. 5. Zuſ.

$$= \left(1 - \tfrac{1}{2} aa + \frac{1}{4.3.2} a^4 \ldots\right)^{-1}$$

(296). Alſo iſt in (56. V.) $z = aa$, $m = -1$;

 $\alpha =$

$\alpha = -\frac{1}{2}$; $\beta = +\dfrac{1}{4.3.2}$ . . . und

$A = +\frac{1}{2}$; $B = \left(-2.+\frac{1}{2}.-\frac{1}{2}-\dfrac{1}{4.3}\right).$

$\frac{1}{2} = (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}.\frac{1}{6}).\frac{1}{2} = \frac{1}{4}.(1-\frac{1}{6}) = \dfrac{+5}{24}.$

So findet man

$$S = 1 + \frac{1}{2}aa + \frac{5a^4}{24} + \frac{61}{720}a^6$$

$$+ \frac{277}{8064}a^8 \ldots$$

304. Aufg. Aus dem Bogen die Coſecante Σ zu finden.

Aufl. $\Sigma = 1.s^{-1}$ (Trig. 5. Erkl. 1. Zuſ. und hier 281.) $= a^{-1}\left(1 - \dfrac{1}{3.2}a^2 + \dfrac{1}{5.4.3.2}a^4 \ldots\right)^{-1}$ (285). Alſo in (56. V) $\alpha = -\frac{1}{6}$; $\beta = -\frac{1}{120}$ . . . $z = aa$; $m = -1$; und $A = +\frac{1}{6}$; $B = (-2.\frac{1}{6}.-\frac{1}{6} - \frac{1}{60}).\frac{1}{2} = \frac{1}{6}.(\frac{2}{6} - \frac{1}{10}).\frac{1}{2} = \frac{7}{360}$ ſo findet man

$$\Sigma = \frac{1}{a} + \frac{a}{6} + \frac{7a^3}{360} + \frac{31a^6}{15120} \ldots$$

305. Anm. Die zehen Sätze 281; 285; 287; 293; 296; 299; 301; 302; 303; 304; ſind hier in der Ordnung vorgetragen, wie ſie in Hauſens Calculo Extenſorum; El. Ar. & Geom. p. 180. ſtehen; die Analyſis aber iſt bey vielen anders. Die umgekehrten Sätze

ße von denen, welche unmittelbar durch die Integration gefunden werden, zu finden, beruft ſich Hauſen auf die Umkehrung der Reihen; wie bey 285; 293; 301; der ich mich aber aus der 285 angezeigten Urſache nicht habe bedienen wollen. Dieſe Reihen dienen die trigonometriſchen Lienien zu berechnen, wenn man die Quadratur des Kreiſes, die gleich ſoll gewieſen werden, annimmt und ihnen andere Lehrſätze, als von der Zuſammenſetzung der Winkel (Trig. 19. S.) und derſelben Vervielfältigung und Theilung (Alg. 175.) beyfügt.

306. Aufg. **Die Verhältniß des Durchmeſſers zum Umkreiſe zu finden.**

Aufl. Von einem Bogen, deſſen Verhältniß in Graden zu 180 Gr. bekannt iſt, berechne man die Tangente und brauche ſolche ſtatt t in der Reihe (299) daraus den Bogen zu berechnen, aus welchem man alsdenn den halben Umkreis für den Halbmeſſer 1, und folglich den ganzen für den Durchmeſſer = 1 berechnet, oder die Zahl P G. 44. S. findet. Man muß aber den Bogen ſo nehmen daß t ein kleiner Bruch des Halbmeſſers wird, damit ſich die Reihe bald nähert. Es ſey der Bogen von 30 Gr. ſo iſt $s = \frac{1}{2}$; $\surd(1-ss) = \frac{\surd 3}{2}$ alſo (299) $t = \frac{1}{\surd 3} = \surd\frac{1}{3}$. Folglich

$$a = \surd\tfrac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3\cdot 3} + \frac{1}{5\cdot 3\cdot 3} - \frac{1}{7\cdot 3\cdot 3\cdot 3} + \frac{1}{9\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3} - \frac{1}{11\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3} \ldots\right)$$

 Alſo

Alſo 6a oder der halbe Umfang =

$$\surd 12 . \left(1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + \frac{1}{9 \cdot 3^4} - \frac{1}{11 \cdot 3^5} \ldots\right.$$

Dieſes giebt folgendes Verfahren: Man dividire $\surd 12$ durch 3; und 9; und 27; u. ſ. w. mit einem Worte durch alle Potenzen der 3. Dieſes geſchieht leicht, wenn man erſtlich $\surd 12$ durch 3; den Quotienten wieder durch 3, dieſen Quotienten wieder durch 3; u. ſ. w. jeden Quotienten, der durch die vorige Diviſion durch 3 entſtanden iſt, wieder durch 3 dividirt, und giebt die Zahlen, welche in folgenden Columnen unter A ſtehen: Nähmlich bey 1, 3, 5; 7; . . . befinden ſich die Quotienten $\frac{\surd 12}{1}$; $\frac{\surd 12}{3}$; $\frac{\surd 12}{3 \cdot 3}$; $\frac{\surd 12}{3 \cdot 3 \cdot 3}$ u. ſ. w. was neben jeder ungeraden Zahl ſtehet iſt $\frac{1}{3}$ deſſen, was neben der nächſtvorhergehenden ſtehet, ſo ſtehet 331 neben 43 und iſt $\frac{1}{3}$ von 993 das neben 41 ſteht. Weil nun 47 die 24 ungerade Zahl iſt, ſo iſt 0, 000 000 000 037 = $\surd 12 : 3^{23}$. die ungeraden Zahlen aber haben bey dieſen Quotienten folgende Bedeutungen: der Columne A erſtes Glied 3, 464. . . . mit 1 dividirt, alſo ungeändert giebt der Columne B erſtes Glied; der Columne A zweytes Glied 1, 15. . . mit 3 dividirt giebt der Columne C erſtes Glied

Glied 0, 3849001794 60; und ſo geben, der Columne A, 3; 5; 7; 9; u. ſ. w. alle ungeraden Glieder, mit den neben ihnen ſtehenden ungeraden Zahlen 5; 9; 13: 17; . . . dividirt, das 2; 3; 4; 5; u. f. Glieder der Columne B; aber der Columne A; 4; 6; 8; u. ſ. w. alle geraden Glieder mit den neben ihnen ſtehenden ungeraden Zahlen 7; 11; 15; . . . dividirt, das 2; 3; 4; u. f. Glieder der Columne C. Aber die Glieder der Columne B; ſind die ungeraden oder bejahten Glieder der Reihe $\sqrt{12}.\left(1 - \frac{1}{3\cdot 3} + \frac{1}{5\cdot 3^2} - \frac{1}{7\cdot 3^3} \ldots\right)$ wenn nähmlich $\sqrt{12}$ überall wirklich multiplicirt wird, daß man $\sqrt{12} - \frac{\sqrt{12}}{3\cdot 3} + \frac{\sqrt{12}}{5\cdot 3^2} \ldots$ bekömmt, und die Glieder der Columne C ſind der nur genannten Reihe gerade, oder verneinte Glieder. Wenn man alſo die Summe der Columne C von der Summe der Columne B abzieht, ſo hat man von der Reihe, welche den halben Umkreis ausdrückt, ſoviel Glieder zuſammengerechnet, als B und C zuſammen enthalten, und alſo den halben Umfang für den Halbmeſſer 1; d. i. den ganzen für den Durchmeſſer = 1; d. i. P auf ſoviel Decimalfiguren gefunden, ſoviel Decimalfiguren die Glieder der Reihe, die man zuſammengerechnet hat, geben. Es kömmt nähmlich darauf an, daß

	A	
1	3. 464101615138	(
3	1. 154700538379	(
5	384900179560	(
7	123800059830	
9	42766686607	(
11	14255562202	
13	4751854067	(
15	1583951356	
17	527983785	(
19	175994595	
21	58664865	(
23	19555955	
25	6518318	(
27	2172773	
29	724258	(
31	241419	
33	80473	(
35	26824	
37	8641	(
39	2980	
41	993	(
43	331	
45	110	(
47	37	

B	C
3. 464101615138	= √ 12
	(0. 384900179460
769800035892	
	(18328579974
4751854072	
	(1295960200
365527236	
	(105596757
31057870	
	(9262873
2793565	
	(850215
260733	
	(80473
24974	
	(7788
2438	
	(766
242	
	(76
24	
	(8
2	
	(1

+ 3. 546233172181 0. 404640517591
— 0. 404640518591

+ 3. 141592653590.

das letzte Glied der Reihe in der Decimalſtelle keine Zifer mehr hat, bis auf welche man die Zahl P haben will. So hat eigentlich das letzte Glied der Columne C keine Zifer mehr in der 12 Decimalſtelle, weil in A; 37 von der Ordnung — 12 mit 47 dividirt keine 1 dieſer Ordnung giebt. Da indeſſen 370 von der Ordnung — 13 mit 47 dividirt, 7 und beynahe 8 von dieſer Ordnung gäbe, welches beynahe 1 von der Ordnung — 12 austrägt, ſo iſt das letzte Glied von C, von dieſer Ordnung geſetzt worden. Aus einem ähnlichen Grunde iſt der Columne A letztes Glied 37 angenommen worden, welches durch die Diviſion mit 3 aus dem nächſtvorhergehenden auch nicht ſo herauskäme. So findet man P auf 12 Decimalſtellen, weil man $\sqrt{12}$ auf ſoviel Stellen geſucht hat, und der Reihe, die P ausdrückt, letztes Glied, oder hier der Columne C unterſtes Glied; nichts mehr in der 12 Decimalſtelle hat. Es erhellt aber aus dem nur erklärten Verfahren, daß die letzten Ziefern von P unrichtig ſeyn können, weil oft die letzten Glieder von A; B; C; unrichtig angenommen werden. Will man alſo P auf vielmehr Decimalſtellen haben, ſo darf man nur $\sqrt{12}$ auf mehr Decimalſtellen ausziehen, wobey der Vortheil Alg. 321. XXX. zu gebrauchen iſt; auch dienen kann, daß $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

307. Anm.

307. Anm. Wenn man die Reihe 299 brauchen will, kann man nicht leicht einen andern Bogen als den von 30 Gr. nehmen, weil kein anderer Bogen, der etliche mahl genommen den Halbkreis ausmacht, eine Tangente hat, die kleiner als der Halbmeſſer iſt, und ſich auf eine ſo einfache Art beſtimmen läßt. Wollte man mehr zuſammengeſetzte Tangenten nehmen, die denn zum Halbmeſſer alle Irrationalverhältniſſe haben, ſo würde die Rechnung mit ihnen gar zu beſchwerlich werden.

308. Anm. Vermittelſt der Reihe (299) iſt P auf 74 Decimalfiguren gefunden worden, wobey die ganze Schwürigkeit des Verfahrens (306) darauf ankömmt, $\sqrt{12}$ in ſehr viel Decimalfiguren zu haben. Herr Euler de variis modis circuli quadraturam proxime exprimendi, Comm. Petrop. T. VIIII. p. 227. giebt eine Methode an, dieſe verdrießliche Ausziehnng der Wurzeln zu erſparen, die ſich aber auf Erfindungen von ihm gründet, welche ich hier nicht habe vortragen können. In eben dieſer Schrift 2. §. giebt er für den Durchmeſſer = 1. den Umkreis bis auf 227 Decimalſtellen folgendergeſtalt an:

3, 141592 653989 793238 462643 383279
502884 197169 399375 105820 974944
592307 816406 286208 998628 034825
342117 067982 148086 513272 306647
093844 6+

die erſten 100 Zifern hat Machin, alle aber Lagny durch einen noch nicht bekannten Kunſtgriff erfunden.

Eine Reihe, die bequemer als die gebrauchte geweſe wäre, findet ſich ſo: Es ſey $\frac{1}{4}$ P oder $45° = a + b$

alſo (Trig. 19. S. 3. Z.) $1 = \dfrac{\text{tang } a + \text{tang } b}{1 - \text{tang } a . \text{tang } b}$

und $\text{tang } b = \dfrac{1 - \text{tang } a}{\text{tang } a + 1}$ alſo $= \frac{1}{3}$ wenn

tang

tang a = $\frac{1}{2}$; folglich (299)

$$a = \frac{1}{1.2} - \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{5.2^5} \ldots\ldots$$

$$b = \frac{1}{1.3} - \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} \ldots\ldots,$$

welche beyde Reihen zuſammen addirt a + b = $\frac{1}{4}$ P geben; ohne daß man zu wiſſen braucht, wie viel Grade a oder b einzeln halten. Eul. Introd. in An. inf. L. 1. §. 142.

309. Zuſ. Wenn der Halbmeſſer = 1; ſo iſt die Zahl P der halbe Umkreis und giebt alſo, mit 180 dividirt

1 Gr. = 0, 017453 292519 943295 769236 904

Dieſes mit 60 dividirt giebt

1 Min. = 0, 000290 888208 665721 596153

Dieſes mit 60 dividirt giebt

1 Sec. = 0, 000004 848136 811

1 Tert = 0, 000 000 080 802 2801

Auch iſt der Quotient, der herauskömmt, wenn man den Halbmeſſer mit dem Bogen von einer Minute dividirt

3437, 746 . . .

310. Aufg. Für einen Bogen, der kleiner als der Halbmeſſer iſt, den Sinus zu finden.

Aufl. Dieſes geſchieht aus 309; vermittelſt der Reihe 286.

Ex. Man ſucht den Sinus von 44 Gr. 37 M. ſo iſt aus 309; a = 0, 7787077345981367l2904 alſo in 286

B = 0. 078699543785532300962
D = 3445013136641268 5
F = 1599424168698
H = 17952201
K = 71

— 0. 078733955163408346 17

A = 0. 7787077345981367 12904
C 2386114038759569243
E = 290139836962012
G = 6217102574
I = 40022

+ 0. 78109413878295038 6756
— 0. 078733955163408346 17

0. 702360143266609552139 = Sin 44. 37

Berechnung der trigonometriſchen Linien.

311. Anm. Wiewohl dieſe Berechnung eigentlich nicht hieher gehört, ſo wird es doch nicht undienlich ſeyn hier Anleitung dazu zu geben, und dadurch wenigſtens die Möglichkeit zu zeigen, wie ſich die Foderung Trig. 2. S. als eine Aufgabe auflöſen läßt. Wie man eine Menge Sinuſſe und folglich Coſinuſſe, Tangenten u. ſ. w. Trig. 4. Erkl. 5. Z. aus den Bogen unmittelbar finden kann, erhellt aus 310. Den Bogen aber, deſſen Länge dem Halbmeſſer gleich iſt, findet man ſo: Er ſey n Grade, ſo iſt n. 0, 01745329. . = 1 (309) alſo

alſo $n = \frac{1}{00174 \ldots}$ welches 57 Gr. giebt. Der Reſt von dieſer Diviſion mit 60 multiplicirt, und durch den Diviſor dividirt, giebt Minuten u. ſ. w. Man findet dieſen Bogen = 57 Gr. 17 M. 44 Sec. 48 Tert. 22 Quart. 29 Quint. 21 Sext. Eul. introd. in analyſ. inf. L. I. §. 530. Sein Sinus iſt aus 282. 0, 8414709840514. Für gröſſere Bogen findet man die Sinus und Coſinus aus dieſen Linien für die kleinern, durch die Addition der Winkel Trig. 19. S. und derſelben Multiplication (Alg. 175.) Man muß aber bemerken, daß bey ſolchen Arbeiten die letzten Zifern der Sinuſſe, die man ſo vermittelſt anderer findet, nicht ſoweit richtig ſind als die letzten Zifern dererjenigen, vermittelſt derer man ſie findet, (Ar. III. 13.) und daher muß man die Sinus, vermittelſt derer man viel andere finden will, auf vielmehr Decimalſtellen ſuchen, als man ſie für ſich brauchte. Aber die Vielecke (Alg. 162.) geben auch viel Sinus unmittelbar, deren man ſich nachgehends bedienen kann andere zu finden. Folgendes iſt hiebey auch brauchbar.

312. Aus Trig. 19. S. iſt $\sin(\alpha+\delta) = \sin\alpha . \cos\delta + \sin\delta . \cos\alpha$. Nun ſuche man aus dem bekannten Sinus und Coſinus eines Bogens, den Sinus eines Bogens der jenen um etwas übertrifft das noch nicht völlig eine Minute beträgt. Alſo ſind Sinus und Coſinus von α gegeben; auch der Bogen δ iſt gegeben; Nun iſt wegen der Vorausſetzung, $\delta < 0,0003$ (309) alſo $\delta^2 < 27^{-12}$ Dieſer Würfel des Bogens, giebt alſo erſt Zifern in der eilften Decimalſtelle. Er

Er kömmt aber in dem zweyten Gliede der Reihe für den Sinus (286) und im dritten der Reihe für den Coſinus (297) vor. Verlangt man alſo dieſes kleinen Bogens Sinus und Coſinus nicht ſo weit, ſondern nur etwa wie gewöhnlich bis auf die ſiebente Decimalſtelle, ſo ſetzt man ohne merklichen Fehler, ſtatt des Sinus nur das erſte Glied der Reihe, und ſtatt des Coſinus nur die erſten beyden. Alſo wird

$\sin(\alpha + \delta) = \sin\alpha . (1 - \frac{1}{2}\delta^2) + \delta . \cos\alpha$

welches dienen könnte, aus den Sinibus die für alle ganze Minuten in den Tafeln befindlich ſind die Sinus für Bogen zu finden, die zwiſchen Mengen ganzer Minuten fallen.

Z. E. für den Bogen $30^\circ\ 0'\ 30''$ wäre $\alpha = 30^\circ$ und $\delta = 30'' = 0,00014504 \ldots$

313. Es iſt alſo $\sin(\alpha + \delta) - \sin\alpha = \delta . (\cos\alpha - \frac{1}{2}\delta . \sin\alpha)$. Hier iſt des zweyten Factors letztes Glied in Vergleichuug mit dem erſten klein, wofern nicht $\cos\alpha$ ſehr klein in Vergleichung mit $\sin\alpha$ iſt, das iſt wofern nicht α einem rechten Winkel ſehr nahe iſt. Wenn alſo α einem rechten Winkel nicht ſehr nahe iſt, kann man ohne groſſen Irrthum den Unterſchied der Sinuſſe $= \delta \cos\alpha$ ſetzen: Und folglich unter eben den Umſtänden, $\sin(\alpha + \varepsilon) - \sin\alpha = \varepsilon . \cos\alpha$ Folglich iſt alsdenn

$\sin(\alpha + \varepsilon) - \sin\alpha : \sin(\alpha + \delta) - \sin\alpha = \varepsilon : \delta$

Die.

Dieſe Proportion nimmt man insgemein ſowohl für die Sinus als für ihre Logarithmen an (Trig 12 S.) die Secunden eines geſuchten Winkels zu finden. Im gegenwärtigen liegt der Grund aus welchem man beurtheilen kann wie weit ſolches verſtattet iſt. Daß es bey Winkeln die dem rechten ſehr nahe kommen immer unrichtiger wird, beruhet darauf, weil bey ſolchen Winkeln die Sinus ſehr langſam wachſen, Gegentheils bey kleinen Winkeln, wachſen ſie beynahe in der Verhältniß der Winkel, wie ſelbſt aus dem erhellt daß für einen kleinen δ, beynahe $\sin \delta = \delta$ iſt.

314. Aufg. Alle Sinus und Coſinus, die zu kleinern Bogen als 45 Gr. gehören, zu finden.

Aufl. Ein Bogen, der kleiner als 45 Gr. iſt, läßt ſich durch $\frac{m}{n} \cdot 45$ Gr. ausdrücken, daß $\frac{m}{n}$ ein eigentlicher Bruch iſt. Wenn nun für den Halbmeſſer $= 1$; die Länge des Bogens von 90 Gr. $= \frac{1}{2} P$ iſt, (309) ſo kann man in 285; 296;

$a = \frac{m}{n} \cdot \frac{1}{2} P$ ſetzen. Dieſes giebt in 285 den Sinus

$$= \frac{m}{n} \cdot \frac{1}{2} P + \frac{m^3}{n^3} \cdot \left(\tfrac{1}{2} P\right)^3 \cdot \frac{1}{3 \cdot 2}$$

$$+ \frac{m^5}{n^5} \cdot \left(\tfrac{1}{2} P\right)^5 \cdot \frac{1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} \cdot \cdot \cdot \cdot$$

und

und in 296 den Coſinus

$$1 - \frac{m^2}{n^2} \cdot (\tfrac{1}{2} P)^2 \cdot \tfrac{1}{2} + \frac{m^4}{n^4} \cdot 1 (\tfrac{1}{2} P)^4 \cdot \frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 2} \ldots$$

In beyden Reihen kann $\frac{m}{n}$ bis an $\frac{1}{2}$ wachſen, und alſo ſind die Potenzen davon lauter eigentliche Brüche, die für höhere Grade immer abnehmen. Was aber den Factoren jedes Gliedes betrifft, der in die Potenz von $\frac{m}{n}$ multiplicirt wird, ſo verhält es ſich damit folgerdergeſtalt: Es iſt

$\frac{1}{2} P = 1,5707963267948966 19 \ldots$ alſo $< 1,6$; alſo $(\frac{1}{2} P)^2 < 2,56$ und $(\frac{1}{2} P)^3 < 4,096$ Folglich iſt in der Reihe für den Sinus, $(\frac{1}{2} P)^3 \cdot \frac{1}{6}$ kleiner als 1. Man nenne in jedem Gliede, das nicht das erſte iſt, den Factor, darein die Potenz von $\frac{m}{n}$ multiplicirt wird, wie $(\frac{1}{2} P)^3 \cdot \frac{1}{6}$ im zweyten iſt, $= Q$; und den ähnlichen Factor im nächſten Gliede wie $(\frac{1}{2} P)^5 \cdot \frac{1}{24}$ iſt, $= R$; ſo iſt allemahl R ein Product aus Q in $(\frac{1}{2} P)^2$ durch ein Product aus zwo Zahlen dividirt, davon die kleinſte im dritten Gliede 4; im vierten 6; im fünften 8 u. ſ. w. iſt, (285) alſo iſt der Quotient, den $(\frac{1}{2} P)^2$ mit dieſer beyden Zahlen Producte dividirt, giebt allemahl ein

eigentlicher Bruch, und allemahl in jedem folgenden Gliede kleiner als in dem vorhergehenden, folglich iſt das Product aus Q in dieſen Quotienten allemal kleiner als Q: oder R kleiner als Q. Nun iſt für das zweyte Glied, Q ein eigentlicher Bruch, folglich R im dritten Gliede ein kleinerer eigentlicher Bruch. Bedeutet alſo nun Q den Factor, der im dritten Gliede in die Potenz von $\frac{m}{n}$ multiplicirt wird, ſo iſt ſolcher ein eigentlicher Bruch, und R iſt nun der Factor, der im vierten Gliede in die Potenz von $\frac{m}{n}$ multiplicirt iſt, und ein kleinerer eigentlicher Bruch als Q. So erhellt, daß die Zahlen, die in jedem Gliede in die Potenzen von $\frac{m}{n}$ multiplicirt werden, lauter abnehmende eigentliche Brüche ſind, und die Reihe für den Sinus ſich nähern würde, wenn auch $\frac{m}{n} = 1$ wäre, noch vielmehr, da es kleiner als $\frac{1}{2}$ iſt.

Für den Coſinus; iſt $\frac{1}{2}$ P gröſſer als $\frac{3}{2}$ aber kleiner als 1, 6 und noch vielmehr kleiner als 2; folglich $(\frac{1}{2} P)^2 . \frac{1}{2}$ gröſſer als 1. aber $(\frac{1}{2} P)^4$ viel kleiner als 16 und folglich mit $\frac{1}{4.\ 3.\ 2.}$ multiplicir-

plicirt gewiß kleiner als 1. Was alſo in der Reihe für den Coſinus drittem Gliede, in die Potenz von $\frac{m}{n}$ multiplicirt wird, iſt ein eigentlicher Bruch. Dieſes wird nun durch den eigentlichen Bruch $(\frac{1}{2}P)^2 . \frac{1}{6.5}$ multiplicirt, um das herauszubringen, was im vierten Gliede in die Potenz von $\frac{m}{n}$ multiplicirt wird, und folglich iſt dieſes, das im vierten Gliede in die Potenz von $\frac{m}{n}$ multiplicirt wird, ein eigentlicher Bruch, und giebt mit $(\frac{1}{2}P)^2 . \frac{1}{8.7}$ multiplicirt wieder einen eigentlichen Bruch für das, was im fünften Gliede in die Potenz von $\frac{m}{n}$ multiplicirt wird. Und ſo wird aus jedem Factor, der in einem Gliede in die Potenz von $\frac{m}{n}$ multiplicirt wird, wenn man ihn durch $(\frac{1}{2}P)^2 . \frac{1}{90.9}$ u. ſ. w. multiplicirt, der Factor der im folgenden Gliede in die Potenz von $\frac{m}{n}$ multiplicirt

wird; iſt alſo der vorhergehende ein eigentlicher Bruch, ſo iſt der folgende auch einer. Daher wiederum die Reihe für den Coſinus ſich nähern würde, wenn auch $1 = \frac{m}{n}$ wäre.

So erhellt alſo, daß man hier den Sinus und Coſinus durch zwo Reihen, die ſich nähern ausdrückt. Und dieſes giebt alle Sinus und Coſinus bis auf 90 Gr.

315. Zuſ. Man findet alſo auch alle Tangenten und Secanten. u. ſ. w.

316. Anm. Die Kürze, in die ich mich einſchränken muß, verſtattet mir nur die Möglichkeit dieſer Rechnung zu weiſen. Man findet die dazu nöthigen Zahlen und Vortheile, bey ihr beym Euler Intr. in Anal. inf. L. I. §. 134; 135; 136; 137; Wie die Logarithmen zu dieſen Zahlen gefunden werden, will ich weiter unten erklären.

Von den Ausſchnitten der Hyperbel.

317. Aufg. Wenn in der Hyperbel (233; 14 F.) nach dem Scheitel C und einem willkührlichen Puncte M; aus dem Mittelpuncte gerade Linien AC; AM; gezogen werden, des Ausſchnittes CAM Element zu finden.

Aufl. Ein anderer Ausſchnitt ſey CAm und beyder Unterſchied MAm; MR aber ein Bogen mit

mit dem Halbmeſſer A M der den Winkel M A m mißt, alſo $Rm = Am - AM$. Wenn nun m unendlich nahe an M rückt, ſo nähert ſich Mm unendlich einer geraden Linie (68) und MR einem Perpendikel auf A m (96) und der Ausſchnitte Unterſchied MAm einem geradelinichten Drenecke, deſſen Innhalt $\frac{MR.\,Am}{2}$ wäre, und weil ſich Am unendlich dem Werthe AM nähert, ſo iſt dieſer Innhalt $\frac{MR.\,AM}{2}$. Dieß alſo iſt die Gränze, der ſich der Ausſchnitte Unterſchied unendlich nähert, oder des Ausſchnittes C A M Differential.

II. Der Winkel CAM heiſſe ϕ. Weil C A M $+ MAP = 45$; ſo iſt $dMAP = -d\phi$. Aber $MR = AM.d\phi$ (Geom. 44 S. 11 Z.) und daher $\frac{MR.\,AM}{2}$ als des Ausſchnittes Differential, $=$

$$\frac{AM^2.d\phi}{2}.$$

III. Nun heiſſe $AP = \omega.$, ſo iſt tang MAP $=$ $\frac{PM}{\omega}.$, Sec MAP $= \frac{AM}{\omega}$; alſo $- d\phi =$

$$\frac{\frac{\omega^2 . dPM}{\omega}}{AM^2}$$ (299) $PM = \frac{a^2}{8\omega}$ (233. I) giebt $d\frac{PM}{\omega} =$

$- \frac{2a^2}{8} . \frac{d\omega}{\omega^3}$ alſo endlich des Ausſchnitts

CAM Differential $= + \frac{a^2 d\omega}{8\omega}$

IIII. Eben das Differential aber hat auch die Fläche GCMP (233. I) oder es iſt der Ausſchnitt MAm = MPmp. Und wenn alſo $\frac{a^2}{8}$. log. ω ſo genommen wird, daß es für $\omega = AG = 1$ verſchwindet, ſo ſind der Ausſchnitt CAM, und die Fläche CGPM zugleich = 0 und alſo allemal gleich. Zu dieſer Abſicht muß man das Logarithmiſche Integral ſo ausdrücken $\frac{a^2}{8}$. log. $\frac{2\sqrt{2}.\omega}{a}$ (233 (III.)

318. Aufg. Eben den Ausſchnitt durch die Abſciſſe auf die Axe aus dem Mittelpuncte auszudrücken.

Aufl. Wenn man ſich von M auf die verlängerte AC als der Hyperbel Axe ein Perpendikel vorſtellt, ſo iſt dieſes die Ordinate der Hyperbel, und zwiſchen ihm und dem Mittelpuncte iſt auf der Axe die erwähnte Abſciſſe enthalten.

Dieſe

Dieſe Abſciſſe und Ordinate ſind das u und y Alg. 418. Sie ſollen hier x und z, heiſſen, ſo iſt $z = \surd(x^2 - \frac{1}{4}a^2)$; taug $\varphi = \frac{z}{x}$; ſec $\varphi = \frac{AM}{x}$ alſo der Winkel MAm oder $d\varphi = \frac{x^2 . d\frac{z}{x}}{AM^2}$

daraus findet ſich auf eine ähnliche Art wie vorhin MR; imgleichen des Ausſchnittes Element

$$MAm = \tfrac{1}{2} x^2 . d\frac{z}{x} = \tfrac{1}{2} . (xdz - zdx) = \tfrac{1}{2}$$

$$\left(\frac{x^2\, dx}{\surd(x^2 - \frac{1}{4}a^2} - \surd(x^2 - \tfrac{1}{4}a^2) . dx\right)$$

$$= \frac{\frac{1}{4}a^2\, dx}{2\surd(x^2 - \frac{1}{4}a^2)}\Bigg)$$

319. Zuſ. Weil $x^2 + z^2 = AM^2 = AP^2 + PM^2$ ſo wird aus (317) $2x^2 - \frac{1}{4}a^2 = \frac{64\omega^4 + a^4}{64\omega^2}$

dieſes giebt $x = \frac{8\omega^2 + a^2}{8\omega . \surd 2}$

Imgleichen $\omega = \frac{x \pm \surd(x^2 - \frac{1}{4}a^2)}{\surd 2}$

Nähmlich zu der Abſciſſe x gehört in der Hyperbel nebſt den Puncte M noch ein anderer, auf der andern Seite der Axe; Ein Perpendikel von dieſem auf AE gefällt gäbe ebenfalls ein ω; das offen-

ſenbahr kleiner als AP wäre. Alſo gilt für AP in dem doppelten Werthe, das Zeichen +

Nun muß das Differential des Ausſchnittes, durch x (318) und durch ω (317) ausgedrückt einerley Integral gäbe. Ferner iſt

$$\frac{2\surd 2.\omega}{a} = \frac{2.(x+\surd(x^2-\frac{1}{4}a^2)}{a}\text{; alſo iſt}$$

$$\text{in (318) } \tfrac{1}{8} - a^2 \int \frac{dx}{\surd(x^2-\frac{1}{4}a^2} = \tfrac{1}{8}a^2.\ \log.\left(\frac{2x+2\surd(x^2-\frac{1}{4}a^2)}{a}\right)$$

320. Zuſ. Die Ordinate auf die Axe durch M giebt mit ihrer Abſciſſe, und AM, ein Dreyeck $= \frac{xz}{2}$; davon den Ausſchnitt CAM abgezogen, läßt die Fläche der Hyperbel übrig die durch $\int zdx$ ausgedrücket wird, wenn man dieſes Integral ſo nimmt, daß es für $x = \frac{1}{2}a$ oder $z = 0$ verſchwindet. Folglich iſt das Integral ſo verſtanden

$$\int dx.\surd(x^2-\tfrac{1}{4}a^2) = \tfrac{1}{2}x\surd(x^2-\tfrac{1}{4}a^2) - \tfrac{1}{8}a^2\log.\frac{2x+2\surd(x^2-\frac{1}{4}a^2)}{a}$$

321. Zuſ. I. Des Ausſchnittes Differential drückt man folgendergeſtalt durch den Winkel CAM aus: Weil AM $= x.\ \sec\phi$ (317; II) ſo iſt das Differential $= \frac{1}{2}x^2.\sec\phi^2.\ d\phi = \frac{1}{2}x^2.\ d\tan g\,\phi$.

Nun iſt $z = x. \tang \varphi$, alſo (318) $x^2. \tang \varphi^2 = x^2 - \frac{1}{4} a^2$; dieſes giebt $\frac{1}{2} x^2 = \frac{a^2}{8.(1 - \tang \varphi^2}$

folglich des Ausſchnitts Differential $= \frac{a^2 . d \tang \varphi}{8.(1 - \tang \varphi^2)}$

II. Man ziehe an der Hyperbel Scheitel C, eine Linie die ſie berührt. Das Stück dieſer Linie das zwiſchen AC und AM fält, heiſſe p; ſo iſt $p = \frac{1}{2} a. \tang \varphi$ oder $\frac{2p}{a} = \tang \varphi$.

Dieſes giebt des Ausſchnitts Differential

$$\frac{\frac{1}{16} a^3 dp}{\frac{1}{4} a^2 - p^2}$$

III. Aus II iſt $x = \frac{\frac{1}{2} a}{\sqrt{(1 - \tang \varphi^2)}}$, und $\sqrt{(x^2 - \frac{1}{4} a_2)} = \frac{\frac{1}{2} a. \tang \varphi}{\sqrt{(1 - \tang \varphi^2)}}$; dieſes giebt

$$\frac{2x}{}\frac{(1 + \sqrt{(x^2 - \frac{1}{4} a^2)})}{a} = \frac{1 + \tang \varphi}{\sqrt{(1 - \tang \varphi^2)}} = \frac{\sqrt{(1 + \tang \varphi)}}{\sqrt{(1 - \tang \varphi)}}$$ alſo $\log \frac{2x.(1 + \sqrt{(x^2 -- \frac{1}{4} a^2)}}{a}$

$$= \frac{1}{2} \log \frac{1 + \tang \varphi}{1 -- \tang \varphi}$$

Folglich den Ausſchnitt (319) nun durch φ aus-

gedrückt, oder (I) $\frac{a^2}{8} . \int \frac{d\,tang\,\phi}{1-tang\,\phi^2} = \frac{a^2}{16} .$

$\log \frac{1+tang\,\phi}{1-tang\,\phi}$

IIII. Und folglich aus (II)

$$\tfrac{1}{16}\, a^3 . \int \frac{dp}{\frac{1}{4} a^2 - p^2} = \frac{a^2}{16} . \log \frac{\frac{1}{2} a + p}{\frac{1}{2} a - p}$$

V. Nennt man $\frac{1}{2} a = r$; ſo iſt der nun gefundene Hyperbeliſche Ausſchnitt den ich H nennen will

$$H = \tfrac{1}{2} \int \frac{r^3\, dp}{r^2 - p^2} = \tfrac{1}{4} r^2 . \log \frac{r+p}{r-p}.$$

Vergleichung der Ausſchnitte des Kreiſes und der Hyperbel.

322. Aufg. Von einem Kreiſe, deſſen Halbmeſſer = e hat ein Bogen = v die Tangente = q; man ſucht den zugehörigen Ausſchnitt = C.

Aufl. Wenn t (299) zum ähnlichen Bogen gehört, ſo ſind (Trig. 1 S.) t; und a in 299; = $\frac{q}{c}$ und $\frac{v}{e}$ alſo $dv = \frac{ee\,dq}{ee + qq}$ und

$$\tfrac{1}{2}\, e\,dv = dC = \frac{\frac{1}{2} e^3\, dq}{ee + qq}$$

323. Zuſ.

323. Zuſ. Die beyden Ausſchnitte (322; 321;) zu vergleichen, ſetze man $e = r$; Soll nun $+qq = -pp$ ſeyn, ſo iſt $q = p\sqrt{-1}$ und $dq = dp\sqrt{-1}$; und $p = \frac{q}{\sqrt{-1}} = -q\sqrt{-1}$ ſo würde $dC = \frac{\frac{1}{2} r^3 dp \sqrt{-1}}{rr - pp} = \sqrt{-1} . dH$ und $C = \sqrt{-1} . H = \frac{rr\sqrt{-1}}{4} . l \frac{r - q\sqrt{-1}}{r + q\sqrt{-1}}$

Man hätte auch $p = q\sqrt{-1}$ ſetzen können, welches eben ſowohl $-pp = qq$ giebt. Dieſes gäbe $dp = dq\sqrt{-1}$ und $dq = \frac{dp}{\sqrt{-1}} = -dp\sqrt{-1}$ alſo $dC = -\sqrt{-1} . dH$ und $C = \frac{1}{4} rr\sqrt{-1} . l \frac{r - p}{r + p}$ (Ar. VI. 20.) welches eben das vorige giebt. Weil man hier zweyerley Vergleichungen zwiſchen p und q machen kann, ſo war nöthig zu zeigen, daß beyde auf eben das führen.

324. Zuſ. Der Ausſchnitt des Kreiſes kann als ein unmöglicher Ausſchnitt der Hyperbel angeſehen, und durch Logarithmen unmöglicher Gröſſen integrirt werden.

325. Anm. Dieſes hat Joh. Bernoulli zuerſt gelehret. S. Op. Io. Bern. T. I. n. 70. p. 399. Mir iſt nicht bekannt, daß er oder jemand anders die eigentliche Urſache, warum mögliche Ausſchnitte der Hyperbel, unmögliche

mögliche des Kreiſes, und umgekehrt ſind, deutlich angezeigt hätte. Vielleicht iſt ſie zu offenbahr, als daß ſie dieſe Bemühung bey Schriftſtellern, die nur erhabene Erfindungen vortragen, verdiente, ſie wird alſo doch in dieſen Anfangsgründen ſtatt finden. Wenn r zugleich der Halbmeſſer eines Kreiſes, und die halbe Axe einer Hyperbel iſt, die beyde einen Mittelpunct, und die gemeinſchaftliche Abſciſſe x haben, ſo ſey die Ordinate des Kreiſes $= y$; der Hyperbel $= z$; die Gleichungen ſind $yy = rr - xx$ und $zz = xx - rr$ (Alg. 418.). Jene Ordinate iſt nur möglich, wenn $x < r$ und dieſe nur, wenn $x > r$. Für dieſe Abſciſſen alſo, für welche es mögliche Ordinaten und Ausſchnitte bey dem Kreiſe gibt, gibt es nichts dergleichen bey der Hyperbel; und umgekehrt, wenn der Hyperbel Ausſchnitte möglich werden, ſind des Kreiſes ſeine unmöglich. Daher kann für $r = e$ (323) der Ausſchnitt des Kreiſes nichts anders als ein unmöglicher Ausſchnitt der Hyperbel ſeyn.

326. Zuſ. Wenn man ſich aber der logarithmiſchen Reihen bedienet, ſo wird C durch lauter mögliche Gröſſen gegeben, dieſes erhellt ſo: vorläufig iſt in 223; für $a = 1$ (225) $l\,\frac{1-u}{1+u} =$
$- 2u.\,(1 + \frac{1}{3}u^2 + \frac{1}{5}u^4 \ldots\ldots) = - 2u.\,T$
wo die Reihe T lauter gerade Potenzen von u enthält.

Nun iſt $\frac{r - q\sqrt{-1}}{r + q\sqrt{-1}} = \left(1 - \frac{q\sqrt{-1}}{r}\right):$
$\left(1 + \frac{q\sqrt{-1}}{r}\right)$ wo man $\frac{q\sqrt{-1}}{r} = u$

(223) ſetzen kann. Da enthält alſo T lauter mögliche Glieder (Alg. 230.) und es iſt

$$C = \frac{rr.\sqrt{-1}}{4} \cdot \frac{-2q\sqrt{-1}}{r} \cdot T = \frac{+qr}{2} \cdot T$$

Weil die Potenzen gerader Exponenten von $\sqrt{-1}$ abwechſelnd verneint oder bejaht ſind, nachdem der Exponent ein Product aus einer geraden Zahl in eine ungerade, oder in eine gerade iſt, ſo ſind der Reihe T Glieder abwechſelnd verneint und bejaht.

Für $q = r$ wird $u = \sqrt{-1}$ und

$C = \frac{rr}{2} \cdot (1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \ldots)$ welches mit (300) übereinſtimmt.

327. Zuſ. $v = \frac{2C}{r} = \frac{r\sqrt{-1}}{2} \cdot l\, \frac{r - q\sqrt{-1}}{r + q\sqrt{-1}}$

oder für $r = 1$; und $q = u\sqrt{-1}$; $\frac{\text{B tang } u\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}$

$= \frac{1}{2} \log \frac{1+u}{1-u}$ und aus (299)

$$\frac{\text{Bog tang } u\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} = \frac{u\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} \cdot \left(1 + \frac{1}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^4 \ldots\right)$$

Woraus die Reihe für $\log \frac{1+u}{1-u}$ wie in 223 folgt.

328. Zuſ. Für den Halbmeſſer = 1 iſt in 299, aus (322) $a = \frac{\sqrt{-1}}{2} \cdot l\, \frac{1 - q\sqrt{-1}}{1 + q\sqrt{-1}}$ (I) oder auch $\frac{-1}{2\sqrt{-1}} \cdot l\, \frac{1 - q\sqrt{-1}}{1 + q\sqrt{-1}} = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \cdot l\, \frac{1 + q\sqrt{-1}}{1 - q\sqrt{-1}} = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \cdot l\, \frac{\sqrt{-1} - q}{\sqrt{-1} + q}$ (II).

329. Zuſ. Wenn $\sin a = c$; $\cos a = \gamma$; alſo $q = \frac{c}{\gamma}$ ſo iſt $a = \frac{\sqrt{-1}}{2} \cdot l\, \frac{\gamma - c\sqrt{-1}}{\gamma + c\sqrt{-1}}$

330. Zuſ. Wenn $le = 1$ geſetzt wird (232) alſo $a le = a = le^a$; und $\frac{1}{\sqrt{-1}} = -\sqrt{-1}$; ſo kömmt $e^{-2a\sqrt{-1}} = \frac{\gamma - c\sqrt{-1}}{\gamma + c\sqrt{-1}}$ $= \frac{(\gamma - c\sqrt{-1})^2}{1}$ oder $e^{-a\sqrt{-1}}$ $= \gamma - c\sqrt{-1}$; Gegentheils $e^{2a\sqrt{-1}} = \frac{\gamma + c\sqrt{-1}}{\gamma - c\sqrt{-1}} = \frac{(\gamma + c\sqrt{-1})^2}{1}$ und $e^{a\sqrt{-1}} = \gamma + c\sqrt{-1}$ folglich $\frac{e^{a\sqrt{-1}} + e^{-a\sqrt{-1}}}{2} = \gamma = \cos a$ und

$$\frac{e^{a\sqrt{-1}} - e^{-a\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = c = \text{ſin } a;$$ welches

nach (239) die Reihe (285) gäbe.

Vervielfältigung der Winkel vermittelſt der Tangenten.

331. Aufg. Aus der Tangente x des einfachen Bogens E, die Tangente y des n fachen F zu finden. Der Halbmeſſer iſt = 1. Dieſes gehört zu Alg. 175.

Weil F = n. E ſo iſt dF = ndE alſo (299).

$$\frac{ndx}{1+x^2} = \frac{dy}{1+y^2}.$$ Dieſe beyden Integrale zu finden, bediene man ſich in 328; des II. Ausdrucks. Man ſetze einmahl

$$a = E;\ q = x;\ \text{ſo iſt } E = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \cdot l\,\frac{\sqrt{-1}-x}{\sqrt{-1}+x}$$

zweytens

$$a = F;\ q = y;\ \text{ſo iſt } F = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \cdot l\,\frac{\sqrt{-1}+y}{\sqrt{-1}+y}$$

Weil nun F = n. E; ſo iſt auch

$$n.\,l\,\frac{\sqrt{-1}-x}{\sqrt{-1}+x} = l\,\frac{\sqrt{-1}-y}{\sqrt{-1}+y}$$ und

$$\left(\frac{\sqrt{-1}-x}{\sqrt{-1}+x}\right)^n = \frac{\sqrt{-1}-y}{\sqrt{-1}+y} \quad (\odot)$$

Der

Der Kürze wegen will ich ε ſtatt $\surd - 1$ ſchreiben. So iſt $\left(\frac{\varepsilon - x}{\varepsilon + x}\right)^n = \frac{\varepsilon - y}{\varepsilon + y}$

II. Wenn n ungerade iſt, ſo kann man aus ☉ folgende Gleichung machen: $\left(\frac{x - \varepsilon}{x + \varepsilon}\right)^n = \frac{y - \varepsilon}{y - \varepsilon}$ daß beyde Zähler den vorigen in ☉ entgegengeſetzt werden. Aber für ein gerades n würde $(x - \varepsilon)^n$ dem $(\varepsilon - x)^n$ nicht entgegengeſetzt, wie doch $y - \varepsilon$ dem $\varepsilon - y$, daß alſo dieſe Verwandelung für das gerade n nicht angeht. Für das ungerade n aber kömmt vermöge dieſer Verwandelung

$(x - \varepsilon)n. (y + \varepsilon) = (y - \varepsilon). (x + \varepsilon)n$ (♂)

III. Man ſetze $-\cot E = z$; alſo $y = -\frac{1}{z}$; daraus wird in (I); $\frac{\varepsilon - y}{\varepsilon + y} = \frac{z\varepsilon + 1}{z\varepsilon - 1}$; Man multiplicire hier Zähler und Nenner mit ε, weil nun $\varepsilon^2 = -1$ ſo verwandelt ſich der Bruch in $\frac{z - \varepsilon}{z + \varepsilon}$ welches alſo $= \left(\frac{\varepsilon - x}{\varepsilon + x}\right)^n$ iſt. (I)

Wenn nun n gerade iſt, ſo iſt $(\varepsilon - x)^n = (x - \varepsilon)^n$, und die nur jetzt gefundene Gleichung giebt $(x - \varepsilon)^n. (z + \varepsilon) = (z - \varepsilon). (x + \varepsilon)^n$ (☿)

Welche

Welche der ♂ in II völlig ähnlich iſt, nur daß ſie z ſtatt y hat.

IIII. Wenn man alſo in beyden Gleichungen ♂ und ☿; den Buchſtaben y allein gebrauchen will, oder ♂ ſtatt beyder Gleichungen gebraucht, ſo bedeutet dieſes y für ein ungerades n; tang F = tang n E für ein gerades n aber, — cot F.

V. Aus ♂ findet man

$$y = \frac{(x-\varepsilon)^n + (x+\varepsilon)^n}{(x+\varepsilon)^n - (x-\varepsilon)^n}\,\varepsilon$$

Wenn die Binomialcoefficienten der Potenz n; A, B; C; D. . . . heiſſen, ſo iſt

$$(x+\varepsilon)^n = x^n + A\varepsilon x^{n-1} + B\varepsilon\varepsilon x^{n-2} + C\varepsilon^3 x^{n-3} + D\varepsilon^4 x^{n-4} \ldots$$

$$(x-\varepsilon)^n = x^n - A\varepsilon x^{n-1} + B\varepsilon^2 x^{n-2} - C\varepsilon^3 x^{n-3} + D\varepsilon^4 x^{n-4} \ldots$$

alſo die Summe $2.(x^n + B\varepsilon^2 x^{n-2} + D\varepsilon^4 x^{n-4} \ldots)$
Der Unterſchied $= 2.(A\varepsilon x^{n-1} + C\varepsilon x^{n-3} \ldots)$
Die Summe nähmlich iſt das doppelte des erſten, dritten, u. ſ. f. oder der ungeraden, und der Unterſchied das doppelte des zweyten, vierten, u. ſ. f. oder der geraden Glieder der Reihe $(x+\varepsilon)^n$. Der letztere enthält alſo lauter ungerade Potenzen von ε und daher kann man ihn ſo ausdrücken: $2\varepsilon.(Ax^{n-1} + C\varepsilon\varepsilon.x^{n-3} \ldots)$ da 2ε in eine Reihe

multiplicirt wird, die lauter gerade Potenzen von ε enthält. Nun ſind die geraden Potenzen von ε abwechſelnd verneinte oder bejahte Einheiten (326) alſo

$$y = \frac{x^n - Bx^{n-2} + Dx^{n-4} \ldots\ldots}{Ax^{n-1} - Cx^{n-3} + Ex^{n-5} \ldots\ldots}$$

Die Glieder des Zählers und des Nenners machen nähmlich, wenn man auf ihre Zeichen uicht acht giebt, zuſammen $(x+1)^n$ aus; und es giebt ſich alſo folgende Regel: Man erhebe $x+1$ auf die Potenz n; und ſchreibe die geraden Glieder in den Nenner die ungeraden in den Zähler eines Bruches, doch ſo, daß im Nenner ſowohl als im Zähler die Zeichen der Theile abwechſeln, und + den Anfang macht. Dieſer Bruch iſt die Tangente des n fachen Bogens, wenn n ungerade iſt, (II) und die verneinte Cotangente, wenn n gerade iſt. (III) Im letzten Falle alſo bekömmt man die verneinte Tangente des n fachen Bogens, wenn man ihn umkehrt.

VI. Aus ⊙ wird $y = \frac{(\varepsilon+x)^n - (\varepsilon-x)^n}{(\varepsilon-x)^n + (\varepsilon+x)^n}\varepsilon$; (♃)

Wenn hier n ungerade iſt, ſo iſt auch

$y = \frac{(x+\varepsilon)^n + (x-\varepsilon)^n}{(x+\varepsilon)^n - (x-\varepsilon)^n}.\varepsilon$ welchen Ausdruck man in V fand, wo er die Tangente für das ungerade n bedeutet. Iſt aber n gerade, ſo läßt

ſich

ſich $\mathfrak{Z}$ in $\frac{(x+\varepsilon)^n-(x-\varepsilon)^n}{(x+\varepsilon)^n+(x-\varepsilon)^n}\cdot\varepsilon$ verwadeln. Man heiſſe q, was hier in ε multiplicirt wird; ſo iſt für ein gerades n; aus IIII. $-\cot F=\frac{\varepsilon}{q}$ alſo der Werth von y den hier $\mathfrak{Z}$ giebt $=\frac{\varepsilon}{-\cot F}\cdot\varepsilon$ $=\frac{+1}{\cot F}=+\operatorname{tang} F$. Dieſe Gleichung $\mathfrak{Z}$ giebt alſo in beyden Fällen tang F.

$(\varepsilon+x)^n=\varepsilon^n+A\varepsilon^{n-1}.x+B\varepsilon^{n-2}.x^2\ldots$

$(\varepsilon-x)^n=\varepsilon^n-A\varepsilon^{n-1}.x+B\varepsilon^{n-2}.x^2\ldots$

alſo $y=\frac{A\varepsilon^{n-1}x+C\varepsilon^{n-3}x^3\ldots}{\varepsilon^n+B\varepsilon^{n-2}x^2\ldots}\cdot\varepsilon$ wo der Zähler aus den geraden der Nenner aus den ungeraden Gliedern von $(x+\varepsilon)^n$ beſteht.

VII. Es ſey n ungerade, ſo dividire man den Nenner durch ε; und man bekömmt;

$y=\frac{\pm Ax\mp Cx^3\ldots}{\pm 1\mp Bxx\ldots}$ die obern oder die untern Zeichen, nachdem n – 1 ein Product aus 2 in eine gerade oder in eine ungerade Zahl iſt. (326) Aber

$$\frac{-Ax+Cx^3\ldots}{-1+Bxx\ldots}=\frac{+Ax-Cx^3\ldots}{+1-Bxx\ldots}$$

alſo gilt allemahl folgende Regel: Man mache

einen Bruch, deſſen Zähler aus den geraden, der Nenner aber aus den ungeraden Gliedern von $(1+x)^n$ beſteht, die Zeichen der Theile im Zähler und Nenner aber abwechſeln, daß das erſte + iſt. Dieſer Bruch iſt tang F.

VIII. Es ſey n gerade, ſo multiplicire man in VI den Zähler mit ε; Dieſes giebt
$y = \frac{\pm Ax \mp Cx^3 \ldots}{\pm 1 \mp Bxx \ldots}$; die obern oder untern Zeichen, nachdem n ein Product aus 2 in eine gerade oder in eine ungerade Zahl iſt. Es iſt aber wiederum $\frac{-Ax + Cx^3 \ldots}{-1 + Bxx \ldots} = \frac{+Ax - Cx^3 \ldots}{+1 - Bxx \ldots}$ wo alſo eben die vorige Regel (VII) gilt, weil y eben das bedeutet (VI)

Exempel.

VIIII. Für n = 5; wird (V)
$\frac{x^5 - 10x^3 + 5x}{5x^4 - 10xx + 1}$ = der Tangente des fünffachen Bogens.

Wenn E = 30 Gr. ſo $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ und der Bruch $= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\frac{1}{9} - \frac{10}{3} + 5}{\frac{5}{9} - \frac{10}{3} + 1} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ = tang 150 Gr.

X.

X. Für n = 4 iſt (V) $y = \frac{x^4 - 6xx + 1}{4x^3 - 4x}$

$= -\cot 4E$ alſo $\frac{4x.(xx - 1)}{x^4 - 6x^2 + 1} = -\operatorname{tang} 4E$

Wenn E = 30 Gr; iſt, giebt dieſes

$\frac{4}{\surd 3}.\frac{(\frac{1}{3} - 1)}{\frac{1}{9} - 2 + 1} = + \surd 3 = \operatorname{tang} 60$ Gr.

$= - \operatorname{tang} 120$ Gr.

XI. Für n = 5 kömmt aus (VIII)

$\frac{5x - 10x^3 + x^5}{1 - 10x^2 + 5x^4}$ wie VIIII nur rückwärts geleſen, und eben ſo für n = 4 wie X nur dem Werthe in X entgegengeſetzt.

XII. Für n = 6 iſt der umgekehrte Bruch

$\frac{6x^5 - 20x^3 + 6x}{x^6 - 15x^4 + 15xx - 1} = - \operatorname{tang} 6E$

Iſt E = 45° ſo wird der Nenner = 0 und der Zähler = − 8 alſo der Bruch ein verneintes Unendliche. Aber tang 6. ½ R = tang 270 Gr. iſt ein bejahtes Unendliches: (Trig. 4. Erkl. 2 Zuſ.)

XIII. Anm. Joh. Bernoulli, der dieſe Methode Act. Erud. Lipſ. Iun. 1712, (Op. T. I. n. 89.) bekannt gemacht hat, redet, als wenn 331 V. für ein gerades n die Cotangente ſelbſt gäbe. Hieſſe dieſe Cotangente

$= q = \frac{1}{y}$ ſo wäre $\frac{\varepsilon - y}{\varepsilon + y} = \frac{\varepsilon q - 1}{\varepsilon q + 1}$

wo man dieſes in ⊙ geſetzt keine Gleichung zwiſchen x und q bekäme, die der ♂ zwiſchen x und y ähnlich

wäre wie in III. Eben ſo wenig würde man dergleichen erhalten, wenn man die Gleichung $\frac{dy}{1+yy}$

$$= dF = -\frac{dq}{1+qq} = \frac{ndx}{1+xx}$$

integrirte; da $\int - \frac{dq}{1+qq}$ ſo müßte genommen werden, daß $x = 0$ für $q = \infty$ wäre, dieſes gäbe

$$\frac{n\varepsilon}{2} l \frac{1 - x\varepsilon}{1 + x\varepsilon} = - \frac{\varepsilon}{2} . l \frac{1 - q\varepsilon}{1 + q\varepsilon}$$

+ Conſt und für $q = \infty$; $\frac{n\varepsilon}{2} l 1$ oder $0 = - \frac{\varepsilon}{2}$

$l - 1$ + Conſt (9) alſo Conſt $= \frac{\varepsilon}{2} l - 1$ und

$$n l \frac{1 - \varepsilon x}{1 + \varepsilon x} = l - 1 + l \frac{1 + q\varepsilon}{1 - q\varepsilon}$$

$= l \frac{1 + q\varepsilon}{q\varepsilon - 1}$ woraus eben das folgt, was man bekömmt, wenn man $\frac{1}{q}$ ſtatt y in ⊙ ſetzt. Alſo muß man nicht eine Gleichung zwiſchen x und $q = + \cot F$; ſondern zwiſchen x und $z = - \cot F$ ſuchen. (331. IIII.) wie auch die Exempel (331. X; XII) die Bernoulli ebenfalls gebraucht hat, zeigen.

Beweis daß einer Zahl unendliche Logarithmen zugehören.

332. I. Jede mögliche bejahte Zahl b, kann als b. 1 betrachtet werden. Sie hat gewiß einen möglichen Logarithmen; derſelbe heiſſe L; Aus der Lehre der Logarithmen iſt $\log b = L + \log 1$; kann alſo log 1 noch mehr Werthe haben als 0; ſo giebt jeder zu L einen andern für log b; und log b hat alſo ſoviel Werthe als log 1 haben kan. Folglich darf man nur die Werthe von log 1 ſuchen.

II. Aus 328; iſt $2a\sqrt{-1} = l\frac{\sqrt{-1}-q}{\sqrt{-1}+q}$;

Es braucht keinen Beweis daß $\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} = 1$;

bedeutet alſo a den Bogen deſſen Tangente = 0; ſo iſt $2a\sqrt{-1} = l1$; und l1 hat ſoviel Werthe als dieſer Bogen haben kann.

III. Nun iſt zwar ein Bogen deſſen Tangente = 0 iſt, ſelbſt = 0; alſo $2.0.\sqrt{-1} = l1$ oder $l1 = 0$; aber es gehört auch, für den Halbmeſſer = 1; die Tangente 0; zu dem Bogen π; 2π; 3π; . . . $n\pi$, wo n jede ganze bejahte Zahl bedeuten kann. (Alg. 614) Folglich iſt für

$a = 0$	π	2π	$\ldots n\pi$
$l1 = 0$	$2\pi\sqrt{-1}$	$2\pi\sqrt{-1}$	$2n\pi\sqrt{-1}$

IIII. Eben ſo iſt in II; $-2a\sqrt{-1} = l\frac{\sqrt{-1}+q}{\sqrt{-1}-q}$ für $q=0$ wird dieſes $-2a\sqrt{-1} = l1$; und alſo iſt auch $l1 = -2n\pi\sqrt{-1}$

V. Alſo iſt in (I) $\log b = L \pm 2n\pi\sqrt{-1}$, welches ſoviel Werthe hat als n haben kann, das iſt unzählich viel; alle unmöglich auſer für $n=0$.

VI. In (328 I) ſetze man $q=\infty$ wenn nun a den Bogen bedeutet deſſen Tangente unendlich iſt, ſo iſt $\frac{2a}{\sqrt{-1}} = l-1$; und wenn man die in (III) angezeigte Veränderung macht, auch $\frac{-2a}{\sqrt{-1}}$ $= l-1$; Es iſt aber $a = \frac{1}{2}\pi$; oder $\frac{3}{2}\pi$, oder $\frac{5}{2}\pi$ . . . oder $\frac{2m+1}{2}\pi$; alſo $l-1 = \frac{\pm(2m+1)\pi}{\sqrt{-1}}$ welche unzählichen Werthe alle unmöglich ſind.

VII. Eine verneinte mögliche Zahl, $-b$; kan angeſehn werden als ein Product aus einer bejahten $+b$ in -1; Ihr Logarithme iſt alſo
$lb + l-1$ oder aus (V)
$= L \pm 2n\pi\sqrt{-1} \mp (2m+1)\pi\sqrt{-1}$
$= L \pm (2n-2m-1)\pi\sqrt{-1}$; da kann der unmögliche Factor nie verſchwinden, weil eine ungerade und eine gerade Zahl einander nie aufheben können. Alſo hat eine verneinte Zahl nur unmögliche Logarithmen.

VIII. Wenn ein Logarithme $f + g\sqrt{-1}$ gegeben iſt, die Zahl x die ihm zugehört zu finden.

Weil $f + g\sqrt{-1} = lx$ ſo iſt $e^{f + g\sqrt{-1}} = x$ dieſes mit 330 verglichen giebt g = dem dortigen a; und $x = e^f. (\cos g + \sqrt{-1}. \sin g)$

VIIII. Soll der gegebene Logarithme möglich ſeyn, ſo ſetzt man g = o.

X. Wenn $e^f = x$, ſo darf man für x nicht die verneinten oder unmöglichen Werthe nehmen die e^f etwa haben könnte, z. E. wenn $f = \frac{1}{2}$ ſetzt man nicht $x = -\sqrt{e}$ weil von $-\sqrt{e}$ der Logarithme nicht die mögliche Gröſſe $\frac{1}{2}$ ſeyn kann (VII) Eben ſo, wenn $f = \frac{1}{3}$ nimmt man für x keinen der beyden unmöglichen Werthe von $\sqrt[3]{e}$; die $\frac{\sqrt[3]{e}. (-1 \pm \sqrt{-3})}{2}$ ſind (Alg. 242) weil dieſer unmöglichen Gröſſen Logarithme nicht möglich ſeyn könnte. Man verſteht nehmlich unter x nur den bejahten Werth den e^f hat, nicht jeden andern.

XI. Es iſt klar daß hier 15 F. zu einer Ordinate QD; nicht mehr als eine Abſciſſe QA zu finden iſt, und eine Linie in der Weite DQ mit der Aſymptote parallel, die logarithmiſche Linie nur in einem Puncte ſchneidet, und daß überhaupt keine gerade Linie kan gezogen werden welche die logarithmiſche in unzählich viel Puncten

cten ſchnitte. Das Merkmahl tranſcendenti-ſcher Linien Anal. endl. Gr. 577. läßt ſich alſo hier nicht anbringen, und doch iſt die logarithmi-ſche Linie eine tranſcendentiſche; denn lieſſe ſich bey ihr zwiſchen x und y eine algebraiſche Glei-chung finden davon die $ydx = ady$ (216) die Differentialgleichung wäre, ſo wäre x eine alge-braiſche Function von y; das iſt, jede Zahl y hätte nur eine gewiſſe Menge Logarithmen, nicht unzählich viel; wieder (II).

XII. Dieſes zu erklären ſetze man in der 15 Fig. würden Abſciſſen und Ordinaten mit der A-ſymptote parallel gezogen, daß alſo dem Puncte D; auf AB eine Abſciſſe $= QD = y$; und eine durch D mit AQ parallel gezogene Ordinate $= QA = x$ zugehörte. Auf dieſe Art gehört zu je-der Abſciſſe $= y$; eine mögliche Ordinate $= x$; aber unzählich viel unmögliche; und weil dieſe unmöglichen keine Schenkel der krummen Linie geben, ſo giebt es auch nur einen möglichen Durchſchnitt dieſer Ordinate mit der krummen Linie, die übrigen ſind als unmöglich anzuſehn. Die logarithmiſche Linie hat alſo, ſo zu reden, ei-nen möglichen Schenkel und unzählich unmögli-che. So hat die neiliſche Parabel (268) für je-des x nur ein mögliches y, oder nur einen mögli-chen Schenkel und zweene unmögliche. (An. endl. Gr. 240) So läßt ſich dieſe Beſchaffenheit der logarithmiſchen Linie mit An. endl. Gr. 576 ver-gleichen.

All-

Allgemeiner Ausdruck der Seiten, ordentlicher Vielecke.

333. Aufg. Den Umfang des Kreiſes durch Logarithmen auszudrücken.

Aufl. I. Wenn man in (328); q = 1 ſetzet, ſo iſt der Bogen von 45 Graden $= \frac{\varepsilon}{2}\, l \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}$.

Es iſt aber $\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} = \frac{(1 - \varepsilon)^2}{(1 + \varepsilon).(1 - \varepsilon)} = -\varepsilon$;

alſo dieſer Bogen $= \frac{\sqrt{-1}}{2}.\, l - \sqrt{-1}$. Dieſer Ausdruck aber iſt weiter zu nichts zu brauchen. Der halbe Umkreis iſt viermahl ſo groß; alſo $\sqrt{-1}.\, 2.\, l(-\sqrt{-1}) = \sqrt{-1}.\, l - 1$; wie in 332; VI; für m = 0

II. Man ſetze $q = \frac{1}{\sqrt{3}}$ = tang 30 Gr; ſo iſt dieſer Bogen nach dem zweyten Ausdrucke 328;

$= \frac{1}{2\varepsilon}.\, l \frac{\varepsilon - 1 : \sqrt{3}}{\varepsilon + 1 : \sqrt{3}}$ der Bruch unter dem logarithmiſchen Zeichen wird $= \frac{\varepsilon\sqrt{3} - 1}{\varepsilon\sqrt{3} + 1}$

$= \frac{-\sqrt{3} - \varepsilon}{-\sqrt{3} + \varepsilon}$ alſo der Bogen von 30 Gr.

$$= \frac{1}{2\varepsilon} . \, l \, \frac{\sqrt{3} + \varepsilon}{\sqrt{3} - \varepsilon}$$ und der halbe Umfang

$$= \frac{3}{\varepsilon} l \, \frac{\sqrt{3} + \varepsilon}{\sqrt{3} - \varepsilon}.$$

III. Folglich der ganze $= \frac{3}{\varepsilon} . \, l \left(\frac{\sqrt{3} + \varepsilon}{\sqrt{3} - \varepsilon} \right)^2$

$$= \frac{3}{\varepsilon} . \, l \, \frac{1 + \varepsilon\sqrt{3}}{1 - \varepsilon\sqrt{3}}$$

334. Aufg. Die Tangente x von $\frac{1}{n}$ des halben Umfangs zu finden.

Aufl. Bog tang $x = \frac{3}{n\varepsilon} \, \frac{\sqrt{3} + \varepsilon}{\sqrt{3} - \varepsilon}$ (337)

$= \frac{1}{2\varepsilon} . \, l \, \frac{\varepsilon - x}{\varepsilon + x}$ folglich $\frac{6}{n} l \, \frac{\sqrt{3} - x}{\sqrt{3} + x} = l \, \frac{\varepsilon - x}{\varepsilon + x}$
daraus findet ſich, die Zeichen der Logarithmen weggelaſſen, nach gehöriger Rechnung

$$x = \varepsilon . \, \frac{((\sqrt{3} - \varepsilon)^{6:n} - (\sqrt{3} + \varepsilon)^{6:n})}{(\sqrt{3} + \varepsilon)^{6:n} + (\sqrt{3} - \varepsilon)^{6:n}}$$

335. Zuſ. Weil die Seiten eines Vielecks, das um den Kreis beſchrieben iſt, mit ihren mittlern Puncten den Kreis berühren; ſo iſt 2 x die Seite eines Vielecks, das um den Kreis beſchrie-

ben iſt, und deſſen Winkel am Mittelpuncte $\frac{2}{n}$ des halben oder $\frac{1}{n}$ des ganzen Umkreiſes iſt, oder das n Seiten hat.

So iſt für n = 6 die Seite des um den Kreis beſchriebenen Sechsecks = $\frac{+2}{\sqrt{3}}$ als die doppelte Tangente von 30 Gr.

336. Zuſ. Weil $(\sqrt{3}-\varepsilon).(\sqrt{3}+\varepsilon)=4$; ſo iſt $1+xx=4.\,4^{6:n}:((\sqrt{3}+\varepsilon)^{6:n}+(\sqrt{3}-\varepsilon)^{6:n})^2$ und die Seite des ähnlichen Vielecks, das in dem Kreis beſchrieben iſt, oder $\frac{2x}{\sqrt{(1+xx)}}$ iſt $=(\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{2}\sqrt{-1})^{6:n}-(\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}\sqrt{-1})^{6:n}\sqrt{-1}$ Dieſe Formel giebt Cramer in den Anmerk. zu Jac. Bernoullis Werken 74. Num. 765 Seite ohne Beweis. Für n = 6 wird ſie = + 1.

337. Aufg. Eine Gleichung zwiſchen des Winkels ϕ Sinus b; Coſinus β; und des Winkels n. ϕ Sinus p; Coſinus π zu finden.

Aufl. In ⊙ 331 ſetze man $x=\frac{b}{\beta}$; $y=\frac{p}{\pi}$ ſo kömmt $\left(\frac{\varepsilon\beta-b}{\varepsilon\beta+b}\right)^n=\frac{\varepsilon\pi-p}{\varepsilon\pi+p}$. Aber

$$\frac{\varepsilon\beta - b}{\varepsilon\beta + b} = \frac{-\beta - b\varepsilon}{-\beta + b\varepsilon} = \frac{\beta + b\varepsilon}{\beta - b\varepsilon} = \frac{(\beta + b\varepsilon)^2}{(\beta - b\varepsilon)(\beta + b\varepsilon)} = (\beta + b\varepsilon)^2.$$ Alſo

$(\beta + b\varepsilon)^{2n} = (\pi + p\varepsilon)^2$ oder $(\cos\phi \pm \sin\phi . \sqrt{-1})^n = \cos n\phi \pm \sin n\phi \sqrt{-1}$; die Zweydeutigkeit der Zeichen folgt aus (Alg. 32.)

So iſt, für $n = 2$; $(\cos\phi \pm \sin\phi \sqrt{-1})^2 = \cos\phi^2 - \sin\phi^2 \pm 2\cos\phi . \sin\phi \sqrt{-1} = \cos 2\phi \pm \sin 2\phi \sqrt{-1}$ (Trig. 19 S. 5 Z.

338. Aufg. Die unendliche Reihe, welche den Sinus durch den Bogen giebt (285) in Factoren zu zerfällen.

Aufl. I. Der Sinus ſoll y heiſſen. Er iſt aber

$$= a.\left(1 - \frac{1}{1.2.3}a^2 + \frac{1}{1.2.3.4.5}a^4 \ldots \pm \frac{a^{2n}}{1.2.3\ldots 2n.(2n+1)} \ldots\right)$$ wo ich für die Reihe S ſchreiben, alſo $y = a. S$ ſetzen will. Das obere Zeichen gilt im letzten Gliede, wenn n gerade, das untere, wenn n ungerade iſt. Weil die Reihe unendlich iſt, ſo kann n ſo groß als man will, oder unendlich angenommen werden.

II. Weil $\frac{y}{a} = S$ und $S = 1$ für $a = 0$ ſo folgt, daß der verſchwindende Bogen ſeinem Sinus

nus gleich iſt. Eben das folgt aus 281 wenn man aus der dortigen Reihe den Quotienten ſucht, den der Bogen, mit dem Sinus dividirt, giebt, und den Sinus alsdenn $= 0$ ſetzt.

III. Auſer dieſem Falle giebt es aber noch unzählich viele, da nicht der Bogen, aber der Sinus $= 0$ würde, wenn nähmlich der Bogen dem einfachen, doppelten, dreyfachen u. ſ. f. halben Umkreiſe gleich wird. Der halbe Umkreis heiſſe c; ſo wird $\frac{y}{a}$ oder $S = 0$ ſo oft als $x = c$ oder $2c$ oder $3c \ldots$ oder nc wo n unendlich iſt (I). Man kann alſo $S = 0$ als eine Gleichung betrachten, die unzählich viel Wurzeln, und darunter die genannten hätte.

IIII. Um aber hier nach dem, was wegen der Gleichungen iſt gelehret worden, zu verfahren, ſo muß das höchſte Glied der Gleichung $S = 0$ nur 1 zum Coefficienten haben. Man muß alſo alle Glieder mit $1.\ 2.\ 3.\ldots(2n+1)$ multipliciren; dieſes gibt $1.\ 2.\ 3.\ldots(2n+1) - 4.\ 5.\ldots(2n+1)\,a^2 + 6.\ 7.\ldots(2n+1)\,a^4 \ldots + a^{2n}$ welches ich T nennen will $= S.\ 1.\ 2.\ 3.\ldots(2n+1)$

V. Erſter Fall. Wenn man n als gerade anſieht; da das obere Zeichen gilt (I) und $T = 0$ alſo völlig die Beſchaffenheit einer Gleichung von 2n Graden hat, da nur das höchſte Glied zuletzt ſteht. Weil a in dieſer Gleichung lauter gerade

rade Exponenten hat, ſo giebt es für jede bejahte Wurzel dieſer Gleichung auch eine verneinte, die nur der bejahten entgegengeſetzt, ſonſt mit ihr von einerley Gröſſe iſt. Alſo hat die Gleichung nebſt den nur genannten Wurzeln $+c$; $+2c$. . . $+nc$ auch die $-c$; $-2c$; . . . $-nc$; und da die Zahl dieſer Wurzeln zuſammen $2n$ iſt, ſo ſind das ihre Wurzeln alle. Sie entſpringt alſo aus den $2n$ Wurzelgleichungen $(a-c).(a+c).(a-2c).(a+2c)\ldots(a-nc).(a+nc)$ (Alg. 221) oder T iſt ein Product aus den n Factoren $(aa-cc).(aa-4cc)(aa-9cc)\ldots(aa-nnc)$

VI. Die letzten Theile dieſer n Factoren mit einander multiplicirt geben, $+c^{2n}.1.4.9\ldots nn$, bejaht, weil ihre Zahl gerade iſt. Dieſes Product iſt ſo groß als das Glied der Gleichung, das die unbekannte Gröſſe nicht enthält, (Alg. 219) alſo $=1.2.3\ldots(2n+1)$. (IIII).

VII. Weil n gerade iſt, ſo kann man ſtatt jedes Factors (V) auch den entgegengeſetzten nehmen; und bekömmt $T=(cc-aa).(4cc-aa).(9cc-aa)\ldots(nncc-aa)$ alſo auch $T=cc.\left(1-\frac{aa}{cc}\right).4cc.\left(1-\frac{aa}{4cc}\right).9cc.\left(1-\frac{aa}{9cc}\right)\ldots nncc.\left(1-\frac{aa}{nncc}\right)$ oder

T=

$$T = c^{2n} . 1 . 4 . 9 \ldots nn . \left(1 - \frac{aa}{cc}\right) . \left(1 - \frac{aa}{4cc}\right) . \left(1 - \frac{aa}{9cc}\right) \ldots \left(1 - \frac{aa}{nncc}\right).$$

Setzt man in dieſem Werthe von T; $1 . 2 . 3 \ldots (2n + 1)$ ſtatt $c^{2n} . 1 . 4 . 9 \ldots nn$ (VI) ſo erhält man aus (IIII)

$$S = \left(1 - \frac{aa}{cc}\right) . \left(1 - \frac{aa}{4cc}\right) . \left(1 - \frac{aa}{9cc}\right) \ldots \left(1 - \frac{aa}{nncc}\right)$$

VIII. Zweyter Fall. Wenn n ungerade, alſo das untere Zeichen gilt. Da iſt aus (IIII) $- S . 1 . 2 . 3 \ldots (2n + 1) = 1 . 2 \ldots (2n + 1) + 4 . 5 \ldots (2n + 1) a^2 \ldots + a^{2n}$ wo ich das, was zur rechten Seite des Gleichheitszeichens ſteht, zuſammen V nennen will. Nun entſteht V wie vorhin T; aus einer ungeraden Zahl von n Factoren $(aa - cc) . (aa - 4cc) \ldots (a^2 - nnc^2)$ deren letzte Theile als eine ungerade Menge verneinter Factoren, das Product $- c^{2n} . 1 . 4 \ldots nn$ geben, welches wie das ähnliche Product bey T vorhin, hier $= - 1 . 2 \ldots 2n + 1$ ſeyn muß. Weil ferner die Menge der Factoren aus denen V entſteht, ungerade iſt, ſo iſt, wenn man jedes entgegengeſetzten nimmt, ihr Product $(cc - aa) . (4cc - aa) \ldots nncc - aa) = - V$ (Anfangsgr. III. Th. II. B.) S oder

oder $cc.\left(1-\frac{aa}{cc}\right).\,4.\,cc.\left(1-\frac{aa}{4cc}\right)\ldots$

$nncc.\left[1-\frac{aa}{nncc}\right]$ oder $+\,c^{2n}.\,1.\,4.\,9\ldots nn.$

$\left(1-\frac{aa}{cc}\right)\ldots\left(1-\frac{aa}{nncc}\right)$ oder

$+\,1.\,2.\,\ldots\,(2n+1).\,\left(1-\frac{aa}{cc}\right)\ldots$

$\left(1-\frac{a^2}{nnc^2}\right)=-V=+S.\,1.\,2.\ldots$

$(2n+1)$; alſo wieder $S=\left(1-\frac{aa}{cc}\right)\ldots$

$\left(1-\frac{aa}{nncc}\right)$

X. Es iſt alſo überhaupt des Bogens a Sinus

$$=a.\left(1-\frac{a^2}{c^2}\right).\left(1-\frac{a^2}{4c^2}\right).\left(1-\frac{a^2}{9c^2}\right)\ldots\left(1-\frac{a^2}{n^2c^2}\right)$$

339. Anm. Ich habe hier eine Erfindung Joh. Bernoullis Op. T. IIII. n. 152. vorgetragen, obwohl mit einigen Aenderungen; beſonders wird, was ich (338; V.) von der Zahl der Wurzeln geſagt habe, eine Schwürigkeit heben, die ſich der Erfinder a. a. O. Schol. 2 ohne Noth macht, ob nähmlich die Gleichungen, wie bey mir $T=0$; $V=0$; ſind, auch noch andere Wurzeln als die angegebenen haben könnten. Anwendungen findet man a. a. O. und beym Euler; de

Sum-

Summis ſerier. reciprocarum Comm. Acad. Petrop. T. VII. p. 124. Herr Euler hat dieſen Ausdruck des Sinus aus andern Gründen hergeleitet Introd. in Anal. inf. L. I. §. 158.

340. Anm. Daß y = o wird, wenn der Bogen ± c; ± 2c; u. ſ. w. iſt, hångt mit den Begriffen der Trigonometrie ſo zuſammen. Wenn in der Trigon. 1. Fig. DE des Bogens AD Sinus iſt, ſo iſt FE = — DE der Sinus des Bogens AF welcher dem AD entgegengeſetzt, alſo = — AD iſt. Der Bogen, der vom Anfange von welchem die Bogen gerechnet werden, nicht nach der Seite nach der man die Bogen ordentlich nimmt, ſondern nach der entgegengeſetzten genommen wird; iſt verneint. Dergleichen wåre in der Ekliptik ein Bogen von o ♈ unmittelbar durch das Zeichen)-(durch; dieſer Bogen wåre nicht + 30 Gr. ſondern — 30 Gr. Ein ſolcher verneinter Bogen hat vermöge des Erwieſenen auch einen verneinten Sinus, der auſer dieſer Entgegenſetzung dem Sinus des bejahten gleich iſt. Folglich haben auch die Bogen + c; — c; oder Trig. 1. Fig. ADHB; AFhb; und eben ſo + 2c; — 2c; u. ſ. w. entgegengeſetzte, ſonſt gleiche Sinus. Weil aber die Sinus der bejahten von dieſen Bogen + o ſind, und bejahte und verneinte o einerley ſind, ſo ſind dieſer Bogen Sinus alle = o, und alſo wird y = o auch wenn man die verneinten Vielfache des halben Umfanges ſtatt des Bogens ſetzt.

341. Aufg. Die Reihe für den Coſinus (296) in Factoren zu zerfällen. Ich will dieſe Reihe S heiſſen; daß alſo a. a. O. x = S iſt.

Aufl. I. Es iſt x = o; für a = $\frac{1}{2}$ c; $\frac{3}{2}$ c; $\frac{5}{2}$ c. . $\frac{2n-1}{2}$ c wo n unendlich iſt; und eben

ſo für eben dieſelben verneinten Werthe; weil die Reihe lauter Potenzen gerader Exponenten des Bogens enthält. Eben das erhellt auch aus einer Betrachtung wie in 340. daß alſo die Gleichung $S = 0$; 2n Wurzeln, oder n Paare entgegengeſetzter ſonſt gleicher Wurzeln hat. Alles dieſes folgt aus Schlüſſen wie 338; III; V;

II. Aus der Urſache (338; IIII.), mache man $1.2.3\ldots 2n.\, S = +1.2.3\ldots 2n - 3.4\ldots 2n.\, a^2 \ldots\ldots \pm a^{2n} = T$ wo das obere oder untere Zeichen gilt, nachdem n gerade oder ungerade iſt.

III. Es ſey n gerade; ſo iſt (wie in 338; V) $T = (a^2 - \frac{1}{4}c^2).(a^2 - \frac{9}{4}c^2)\ldots\ldots \left(a^2 - \frac{(2n-1)^2}{4}c^2\right)$. Das Product aus den letzten Theilen aller dieſer Factoren, iſt $= \left(\frac{c}{4}\right)^{2n}.$ $1.9.25\ldots(2n-1)^2 = 1.2.3\ldots 2n$ (wie in 338; VI) Es iſt aber auch (wie in 338; VII.) $T = (1.\frac{1}{4}c^2 - a^2).(9.\frac{1}{4}c^2 - a^2)\ldots((2n-1)^2.\frac{1}{4}c^2 - a^2) = \frac{1}{4}c^2\, 1.\left(1 - \frac{4a^2}{cc}\right).\frac{1}{4}c^2.9.\left(1 - \frac{4a^2}{9c^2}\right)\ldots$ $\frac{1}{4}c^2.(2n-1)^2.\left(1 - \frac{4a^2}{(2n-1)^2c^2}\right) =$

$\left(\frac{c}{4}\right)$

$\left(\frac{c}{4}\right)^{2n}$. 1.9....$(2n-1)^2$. $\left(1-\frac{4a^2}{c^2}\right)$.

$\left(1-\frac{4a^2}{9c^2}\right)$.....$\left(1-\frac{4a^2}{(2n-1)^2.c^2}\right)$

Setzt man hier 1. 2. 3. . . 2n ſtatt des Factors $(\frac{1}{4}cc)^{2n}$. 1. 9. . . $(2n-1)^2$ ſo erhält man S oder

$$x = \left(1-\frac{4a^2}{c^2}\right).\left(1-\frac{4a^2}{9c^2}\right).$$

$$\left(1-\frac{4a^2}{25c^2}\right)\ldots\left(1-\frac{4a^2}{(2n-1)^2c^2}\right)$$

IIII. Für ein ungerades n; iſt

$$S = 1 - \tfrac{1}{2}a^2 + \frac{1}{4.3.2}a^4\ldots\ldots -$$

$$\frac{1}{2n.(2n-1)\ldots 1}a^{2n}$$ (296) alſo $-$ 1. 2. 3 ... 2n. S $= -$ 1. 2. 3.... 2n $+$ 3... 2n a^2 $-$ 5.... 2n a^4.....$+ a^{2n} = V$

Hier iſt $V = (a^2 - \frac{1}{4}c^2).(a^2 - \frac{9}{4}c^2)\ldots$ $\left(a^2 - \frac{(2n-1)^2}{4}c^2\right)$ in ungerader Zahl Alſo

$$-V = (\tfrac{1}{4}c^2 - a^2).(\tfrac{9}{4}c^2 - a^2)\ldots\left(\frac{(2n-1)^2}{4}c^2 - a^2\right)$$

$$= \tfrac{1}{4}c^2.\left(1-\frac{4a^2}{c^2}\right).\ \tfrac{9}{4}c^2.\left(1-\frac{4a^2}{9c^2}\right)\ldots$$

$$\frac{(2n-1)^2}{4} c^2 . \left(1 - \frac{4a^2}{(2n-1)^2 c^2}\right) = 1 . 2 .$$

$$\ldots . . (2n-1)^2 . \left(\frac{c^2}{4}\right)^n . \left(1 - \frac{4a^2}{c^2}\right).$$

$$\left(1 - \frac{4a^2}{9c^2}\right) \ldots \left(1 - \frac{4a^2}{2n-1)^2 c^2}\right)$$

Nun iſt $1 . 2 . (2n-1)^2 . \left(\frac{c^2}{4}\right)^n$ = dem Gegentheile, (weil n ungerade iſt) von $-\frac{1}{4} c^2 . -\frac{9}{4} c^2 \ldots . -\frac{(2n-1)^2}{4} c^2$ oder dem Gegentheile des letzten Gliedes der Gleichung $V = 0$; (Alg. 219) alſo $= + 1 . 2 . 3 \ldots . 2n$ Folglich

$$-V = + 1 . 2 . 3 \ldots 2n . \left(1 - \frac{4a^2}{c^2}\right).$$

$$\left(1 - \frac{4a^2}{9c^2}\right) \ldots . \left(1 - \frac{4a^2}{(2n-1)^2 c^2}\right)$$

Aber $-V = + 1 . 2 . 3 \ldots 2n . S.$ alſo $+ S =$

$$+\left(1 - \frac{4a^2}{c^2}\right)\left(\frac{1 - 4a^2}{9c^2}\right) \ldots \left(1 - \frac{4a^2}{(2n-1)^2 c^2}\right)$$

Wie für das gerade n.

$$V. \frac{x}{\frac{1-2a}{c}} = \left(\frac{1+2a}{c}\right) . \left(1 - \frac{4a^2}{9c^2}\right) . \left(1 - \frac{4a^2}{25c_2}\right) \ldots$$

$$\left(1 - \frac{4a^2}{(2n-1)^2 c^2}\right).$$

Aber

Aber $\frac{x}{1-\frac{2a}{c}} = \frac{\frac{1}{2}cx}{\frac{1}{2}c-a} = \frac{\frac{1}{2}c.\cos a}{\frac{1}{2}c-a} =$

$= \frac{\frac{1}{2}c.\sin(\frac{1}{2}c-a)}{\frac{1}{2}c-a} = \frac{\frac{1}{2}c.\sin b}{b}$; Wenn $\frac{1}{2}c-$

$a=b$. Nun iſt $\frac{\sin b}{b}=1$ für $b=0$ oder $c=2a$;

(283) da denn $\frac{4a^2}{(2n-1)^2.c^2} = \frac{1}{(2n-1)^2}$ und

$\frac{1}{2}c.\frac{\sin b}{b}$ oder $\frac{1}{2}c=(1+1).(1-\frac{1}{9}).1-\frac{1}{25})\ldots$

$\left(1-\frac{1}{(2n-1)^2}\right)$ alſo $\frac{1}{4}c=(1-\frac{1}{9}).$

$(1-\frac{1}{25})\ldots\ldots$

342. Zuſ. Aus dieſen Zerfällungen folgt

I Aus der 338; Weil $\sin a = a.S$, ſo iſt (330)

$\frac{e^{a\sqrt{-1}}-e^{-a\sqrt{-1}}}{2} = a\sqrt{-1}.S$; Es ſey $a^2=-x^2$

$a\sqrt{-1}=x$ ſo iſt $\frac{e^x-e^{-x}}{2}=x.(1+\frac{x^2}{c^2}).$

$(1+\frac{x^2}{4c^2}).(1+\frac{x^2}{9c^2})\ldots(1+\frac{x^2}{n^2c^2})$ oder

auch, wenn der erſte Ausdruck für S, im Anfange von 338 gebraucht wird:

$$e^x - e^{-x} = x \cdot \left(1 + \frac{1}{1.2.3} x^2 + \frac{1}{1.2.3.4.5} x^4 \ldots\right)$$

beydes wie beym Euler Introd. L. I. §. 156.

II Aus der 341. Weil nun coſa = S; ſo iſt (330)

$$\frac{e^{a\sqrt{-1}} + e^{-a\sqrt{-1}}}{2} = S;$$ alſo wenn $x = a \sqrt{-1}$ u. $x^2 = -a^2$ und $a = -x\sqrt{-1}$; $a^2 = -x^2$

$$e^x + e^{-x} = 2\left(1 + \frac{4x^2}{c^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{4x^2}{9c^2}\right) \ldots$$

$\left(1 + \frac{4x^2}{(2n-1)^2 c^2}\right)$ oder (296) $= 2\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4.3.2} + \frac{x^6}{6.5.4.3.2} + \frac{x^8}{8.7.6.5.4.3.2} \ldots\right)$

wo alle Glieder der Reihe 296 das Zeichen + bekommen.

Wie die Logarithmen der trigonometriſchen Linien gefunden werden.

343. Aufg. Den hyperboliſchen Logarithmen des halben Umfangs zu finden.

Aufl. Aus (342) iſt er: $l\,4 + l\,(1 - \frac{1}{9}) + l\,(4 - \frac{1}{25}) \ldots$ Jeden dieſer Logarithmen findet man, wenn man in $l\,(1 - u)$ (223); nach und nach $\frac{1}{9}$; $\frac{1}{25}$; $\frac{1}{49}$; . . . ſtatt u ſetzt. Und weil die

die folgenden dieſer Brüche z. E. $\frac{1}{81}$ ... immer kleiner und kleiner werden, ſo nähert ſich die Reihe für l (1 – u) bey jeden folgenden Bruche, ſchneller als bey dem nächſtvorhergehenden; und jede folgende Zahl wie $1 - \frac{1}{81}$ kömmt der Einheit näher als die nächſtvorhergehende, alſo ihr Logarithme dem 0; daher die folgenden Logarithmen immer kleiner als die vorhergehenden werden und die Reihe ſich nähert.

344. Aufg. Den Logarithmen eines Sinus und Coſinus zu finden.

Aufl. I. Wenn man $a = \frac{mc}{2n}$ ſetzt, ſo iſt

II. Aus 338. X. ſin $\frac{mc}{2n} = \frac{mc}{2n}$. $\left(1 - \frac{m^2}{4n^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{m^2}{9n^2}\right) \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$ alſo l ſin $\frac{mc}{4n} = lc + l\,\frac{m}{2n} + l\left(1 - \frac{m^2}{4n^2}\right) + l\left(1 - \frac{m^2}{9n^2}\right) \cdot \cdot$

III. 341. coſ $\frac{mc}{2n} = \left(1 - \frac{m^2}{n^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{m^2}{9n^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{m^2}{25n^2}\right) \cdot \cdot \cdot \cdot$ alſo

$$l \cos \frac{mc}{2n} = l\left(1 - \frac{m^2}{n^2}\right) + l\left(1 - \frac{m^2}{9n^2}\right) + l\left(1 - \frac{m^2}{25n^2}\right) \ldots$$

Weil nun $\frac{m}{2n}$ allemahl ein eigentlicher Bruch iſt, den man auch kleiner als $\frac{1}{2}$ annehmen kann, daß $\frac{m}{n} < 1$ wird, ſo findet man die Logarithmen des Sinus und des Coſinus wie in 343 und die Reihe der Logarithmen aus der jeder ſolcher Logarithme beſteht, nähert ſich wie dorten.

345. Zuſ. Aus dieſen Logarithmen hat man blos durch Addition und Subtraction die Logarithmen der Tangenten und Secanten (Trig. 4. Erkl. 3. und 5. Zuſ. 5. Erkl. 1. Zuſ.) Und aus den hyperboliſchen finden ſich die briggiſchen nach (231).

346. Anm. Man kann die natürlichen Logarithmen auch durch ähnliche Zerfällungen der Reihen für die Tangenten und Secanten wie 338; 341; unmittelbar finden. Imgleichen giebt es Vortheile, die Logarithmen der Sinuſſe noch kürzer als durch die unmittelbare Anwendung der Reihe für l (1 — x) zu finden. Dieſes, welches mir die Weitläuftigkeit hier beyzubringen nicht verſtattet, findet man, nebſt wirklichen Berechnungen beym Euler Introd. L. I. Cap. XI. Zum Unglücke für diejenigen, welche die trigonometriſchen Tafeln berechnet

net haben, ſind alle dieſe Kunſtgriffe ohngefähr hundert Jahr darnach erfunden worden, als ſie mit ihrer Arbeit fertig waren.

Lehnſätze; von der Zerlegung gebrochner Functionen in einfache.

347. Wenn z, eine veränderliche Gröſſe bedeutet, m, n, ganze bejahte Zahlen ſind, die übrigen Buchſtaben die zunächſt vorkommen, unveränderliche Gröſſen anzeigen, ſo ſey

$$M = a + bz + cz^2 \ldots + kz^m;$$

$$N = \alpha + \beta z + \gamma z^2 \ldots + \varkappa z^n;$$

alſo ſind M; N; ganze rationale Functionen; (260) aber $\frac{M}{N}$ iſt eine gebrochne.

348. Erkl. Wenn die veränderliche Gröſſe, auf lauter Potenzen gerader Exponenten erhoben iſt, ſo heißt die Function gerade aber ungerade wenn ſich in ihr lauter Potenzen ungerader Exponenten befinden. Dieſes gilt die Function mag rational oder irrational ſeyn (259).

So wären $\sqrt{(ff + z^2)}$ eine gerade, $\sqrt[3]{(z+z^3)}$ eine ungerade irrationale Function.

Eine gerade Function behält einerley Werth der Gröſſe und dem Zeichen nach, wenn man in ihr ſtatt eines angenommenen Werthes von z, den entgegengeſetzten ſonſt gleichen ſetzte bey einer ungeraden

geraden aber kömmt in dieſem Falle zwar eben der Werth, aber mit entgegengeſetzten Zeichen.

349. Lehrſ. Jede rationale ganze Function hat ſo viel einfache Factoren, ſoviel die veränderliche Gröſſe in ihr Abmeſſungen hat.

Bew. Man ſetze M = o oder z^m .....

$$+ \frac{c}{k} zz + \frac{b}{k} z + \frac{a}{k} = o$$ ſo entſtehet

dieſe Gleichung aus m Wurzelgleichungen, (Alg. 221.) und alſo das Product M aus m Factoren. Ein Exempel, wo dieſe Schlüſſe ſchon ſind gebraucht worden, giebt 338; V.

350. Zuſ. Unter denſelben können gleiche, und unmögliche ſeyn.

351. Zuſ. Wenn m gerade iſt, ſo giebt es keinen, oder 2; oder 4; oder 6, u. ſ. w. mögliche Factoren, und 1 oder 3, oder 5, u. ſ. w. wenn m ungerade iſt. Denn aus (174.) kann M = o nicht anders als eine gerade Zahl unmöglicher Wurzeln haben; Sie ſey = 2r; ſo iſt die Zahl der möglichen Wurzeln, und Wurzelgleichungen, und Factoren; m — 2r; gerade oder ungerade, nachdem es m iſt, oder o wenn 2r = m.

352. Anm. Das o muß als eine gerade Zahl angeſehen werden, weil o + 1 oder o + 3 u. ſ. w. ungerade, aber o + 2 u. ſ. w. gerade ſind.

353. Zuſ.

353. Zuſ. Wenn m gerade und $\frac{a}{k}$ verneint iſt, ſo hat M wenigſtens zweene mögliche Factoren, weil ſich die krumme Linie, der die Gleichung M = y zugehört (163) bey z = o unter der Axe befindet, und doch über die Axe auf beyden Seiten des Anfangs der Abſciſſen herauskömmt, folglich M = o gewiß zwo mögliche einander entgegengeſetzte, aber nicht eben nothwendig gleiche Wurzeln hat.

354. Lehrſatz. T und P ſind ganze Zahlen, aus der gemeinen Arithmetik, oder ganze Functionen (347) die keinen gemeinſchaftlichen Factor haben; V und Q ebenfalls ein paar ſolche Gröſſen; und P und Q haben auch keinen gemeinſchaftlichen Factor; T und V imgleichen T und Q mögen einen gemeinſchaftlichen Factor haben oder nicht; So ſind $\frac{T}{P}$; $\frac{V}{Q}$; Brüche, die ſich nicht aufheben laſſen. (Ar. I. 70.) Ich behaupte, dieſer Brüche, wie ſie da ausgedruckt ſind ihre Summe oder ihr Unterſchied, ſey auch, jedes ein Bruch, der ſich nicht aufheben läßt.

Bew. Dieſe Summe oder dieſer Unterſchied iſt $\frac{T.Q \pm V.P}{P.Q}$; Man ſetze ihn $= \frac{M}{N}$ daß

M;

M; N; ganze Zahlen oder Functionen bedeuten, alſo $N.T.Q \pm N.V.P = M.P.Q$ und $\frac{N.Q.T}{P} \pm N.V = M.Q$. Weil nun das übrige alles Ganze ſind, ſo muß $\frac{N.Q.T}{P}$ auch ein Ganzes ſeyn. Nun läßt ſich, weil P mit T und mit Q keinen gemeinſchaftlichen Factor hat, weder T noch Q mit P dividiren, auch das Product T. Q nicht, ſonſt müßte P ein Product ſeyn, deſſen einer Factor in Q der andere in T enthalten wäre. Eben ſo kann P kein Product ſeyn, deſſen einer Factor in N, der andere in Q. T enthalten wäre. (Dieſe Schlüſſe ſind einerley mit denen Ar. IIII; 24). Soll alſo $\frac{N.Q.T}{P}$ ein Ganzes ſeyn, ſo muß N für ſich, ſich mit P dividiren laſſen. Eben ſo folgt aus $N.T \pm \frac{N.P.V}{Q} = M.P$ daß es ſich mit Q dividiren läßt. Man ſetze es alſo $= H.P.Q$; ſo iſt $T.Q \pm P.V = \frac{M}{H}$ oder $M = H.(T.Q \pm V.P)$. In jedem Ausdrucke $\frac{M}{N}$ alſo, der $= \frac{T.Q. \pm P.V}{P.Q}$ iſt, iſt der Zähler ein Vielfaches des Zählers, und der

Nenner

Nenner ein Vielfaches des Nenners von dieſem Bruche, oder, jeder andere Ausdruck der = $\frac{T.Q \pm P.V}{P.Q}$ läßt ſich aufheben; folglich iſt $\frac{T.Q \pm P.V}{P.Q}$ der Ausdruck für $\frac{T}{P} \pm \frac{V}{Q}$ der ſich nicht aufheben läßt.

355. Zuſ. Geſetzt aber P und Q haben einen gemeinſchaftlichen Factor, ſo daß $P = H.R$; $Q = H.S$; ſo iſt $\frac{T.Q \pm V.P}{P.Q.} = \frac{H.S.T \pm H.R.V}{H.H.R.S}$ $= \frac{S.T. \pm R.V}{H.R.S}$ und läßt ſich alſo allemahl aufheben.

356. Zuſ. Wenn $N = H.R.H.S$; (355) ſo iſt $\frac{M}{H} = S.T \pm R.V$. Soll ſich alſo hier der Bruch $\frac{M}{N}$ in $\frac{T}{P}$ und $\frac{V}{Q}$ zerfällen laſſen, ſo muß M ſich durch H dividiren, und alſo $\frac{M}{N}$ aufheben laſſen. Es ſey $M = H.K$ ſo wird $\frac{M}{N}$ auf $\frac{K}{H.R.S}$ gebracht. Ordentlicher Weiſe aber

nimmt

nimmt man in der gemeinen Arithmetik und auch in folgenden Rechnungen an, daß der Bruch, den man zerfällen will, ſchon in den kleinſten Zahlen ausgedruckt ſey, und ſich nicht aufheben laſſe. In dieſem Falle alſo geht die Zerfällung nicht an, wofern P; Q; einen gemeinſchaftlichen Factor haben, weil alsdenn das ganze S. T ± R. V nicht dem Bruche $\frac{M}{H}$ gleich ſeyn kann.

357. Aufg. Eine gebrochne rationale Function, wo die veränderliche Gröſſe im Zähler auf höhere Grade ſteigt als im Nenner, in zweene Theile zu zergliedern, deren einer eine ganze Function, der andere eine gebrochne iſt, da die veränderliche Gröſſe im Zähler nicht ſo hoch ſteigt als im Nenner.

Aufl. Man ordne beyde nach z ſo daß die höchſten Potenzen den Anfang machen, und dividire den Zähler durch den Nenner ſo lange, bis man in dem Quotienten auf einen unveränderlichen Theil kömmt. Dieſer Quotient, den unveränderlichen Theil mit dazu gerechnet, iſt die ganze Function. Der Reſt von der Diviſion giebt den Zähler, und der vorige Nenner, den Nenner der neuen gebrochnen, oder des eigentlichen Bruchs, der mit der ganzen, den erſten uneigentlichen Bruch ausmacht.

Ex. $\frac{z^4 + 1}{zz + 1} = zz - 1 + \frac{2}{zz + 1}$

558. Aufg. Eine gebrochne Function, deren Nenner zweene Factoren hat, die keinen gemeinſchaftlichen Factor haben (356); in zwo zu zergliedern, deren jede einen dieſer Factoren zum Nenner hat.

Aufl. Sie ſey

$$\frac{a + bz \ldots + kz^m}{(\alpha + \beta z \ldots + \varkappa z^n).\ (\lambda + \mu z \ldots\ \pi z^r)}$$

Man ſetze, ſie gleiche den beyden Brüchen zuſammen

$$\frac{\mathfrak{a} + \mathfrak{b}z \ldots + \mathfrak{k}z^{n-1}}{\alpha + \beta z \ldots + \varkappa z^n} + \frac{\mathfrak{l} + \mathfrak{m}z \ldots + \mathfrak{p}z^{r-1}}{\lambda + \mu z \ldots + \pi z^r}$$

wo jeder Zähler einen Grad niedriger iſt als ſein Nenner, die deutſchen Buchſtaben ſind angenommene Coefficienten, die man beſtimmen ſoll. Der erſte Bruch hat deren n; der zweyte r, zuſammen n + r. Wenn man nun dieſe beyden Brüche auf einerley Benennung bringt, ſo hat das Product aus des erſten Zähler in des zweyten Nenner, n − 1 + r und das Product aus des zweyten Zähler in des erſten Nenner, r − 1 + n ebenſoviel Abmeſſungen. Die Summe dieſer Producte ſoll dem Zähler der gegebenen Function gleich ſeyn. Man ſetze alſo jeden Coefficienten dieſer Summe dem Coefficienten gleich, der in der Fun-

ction Zähler zu eben der Potenz von z gehört; wo ſich in der Summe eine Potenz von z findet, die nicht in dem Zähler der Function anzutreffen iſt, da iſt der Coefficient dieſer Potenz in der Summe = o. Weil nun die Summe n + r Glieder hat, ſo giebt es ſo viel Gleichungen als Coefficienten a; b; .... angenommen worden ſind. In keiner dieſer Gleichungen iſt einer dieſer Coefficienten mit einem andern ſeines Gleichen, oder mit ſich ſelbſt multiplicirt, ſondern jeder von den a; b; ... m; wird nur mit λ; μ; π; und jeder von den l; m; ... p; nur mit α; β; ... $\varkappa$; multiplicirt, alſo geben ſich alle dieſe Coefficienten nur durch einfache Gleichungen, und jeder bekömmt nur einen und zwar möglichen Werth.

359. Ex. $\frac{a + bz}{\alpha\alpha - \varkappa\varkappa zz} = \frac{a}{\alpha + \varkappa z} + \frac{l}{\alpha - \varkappa z}$ Der Zähler der Summe dieſer Brüche, wenn man ſie auf eine Benennung gebracht hat, heißt: $(a + l)\,\alpha + (l - a)\,\varkappa.\,z.$ alſo iſt $a + l = \frac{a}{\alpha}$; $l - a = \frac{b}{\varkappa}$ dieſe beyden Gleichungen geben addirt: $2\,l = \frac{b}{\varkappa} + \frac{a}{\alpha}$. und abgezogen $2\,a = \frac{a}{\alpha} - \frac{b}{\varkappa}$ alſo ſind die beyden Brüche

$$\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{a}{\alpha}-\frac{b}{\varkappa}\right)}{\alpha+\varkappa z}+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{a}{\alpha}+\frac{b}{\varkappa}\right)}{\alpha-\varkappa z}$$

360. Eine gebrochne Function läßt ſich in ſo viel Brüche von der Form $\frac{A}{p-qz}$ zerlegen, ſoviel einfache ungleiche Factoren ihr Nenner hat. Jeder einfache Factor des Nenners, wie $p-qz$ einer iſt, giebt nähmlich einen einfachen Bruch wie $\frac{A}{p-qz}$

361. Aufg. Aus dem gegebenen einfachen Factor $p-qz$; des Nenners N; einer gebrochenen Function $\frac{M}{N}$; den Zähler A, des einfachen Bruches $\frac{A}{p-qz}$ zu finden, den dieſer Factor giebt.

Aufl. Es ſey $N=(p-qz).S$; wo S eine ganze Function iſt. Der Factor S gebe bey der Zerlegung einen Bruch, deſſen Zähler die ganze Function P iſt; oder es ſey $\frac{M}{N}=\frac{A}{p-qz}+\frac{P}{S}$

$\frac{P}{S} = \frac{M}{(p - qz).\,S}$ ſo wird $\frac{P}{S} = \frac{M - A.\,S}{(p - qz).\,S}$ folglich $P = \frac{M - A.\,S}{p - qz}$ alſo muß ſich $M - A.\,S$ mit $p - qz$ dividiren laſſen; folglich $= 0$ werden, wenn $\frac{p}{q}$ ſtatt z geſetzt wird, weil alsdenn ein Factor von $M - A.\,S$ nähmlich $p - qz = 0$ wird; (nach eben der Art zu ſchlieſſen, wie Alg. 214. gebraucht worden.) Man ſetze alſo in M und in S überall $\frac{p}{q}$ ſtatt z, damit $M - A.\,S = 0$ wird; ſo kömmt daraus $A = \frac{M}{S}$; und dieſes iſt alſo der geſuchte Zähler. Der Quotient nähmlich, der aus M mit S dividirt herauskömmt, wenn man in jeder dieſer Function $\frac{p}{q}$ ſtatt z geſetzt hat.

362. Zuſ. Sucht man für jeden Factor wie $p - qz$ (360) den zugehörigen Zähler, ſo erhält man alle die Brüche, deren Summe $\frac{M}{N}$ iſt.

363. Ex. Es ſey $\frac{M}{N} = \frac{1 + zz}{z - z^3}$; wo M

$= 1$

$= 1 + zz$; $N = z. (1 + z). (1 - z)$. Man nehme z ſtatt des Factor $p - qz$; ſo iſt $S = 1 - zz$; und $p = 0$; $q = -1$; $\frac{p}{q} = 0$ alſo $A = \frac{1}{1} = 1$; zweytens nehme man $1 - z$ ſtatt des Factors $p - qz$; daß $p = 1$; $q = +1$; $S = z + zz$; $\frac{p}{q} = 1$; alſo $A = \frac{2}{2} = 1$; drittens ſey $1 + z$ ſtatt des Factors $p - qz$ und $p = 1$; $S = z - zz$; $\frac{p}{q} = -1$; alſo $A = \frac{2}{-2} = -1$; alſo $\frac{1 + zz}{z - z^3} = \frac{1}{z} + \frac{1}{1 - z} - \frac{1}{1 + z}$

364. Zweytes Ex. $\frac{M}{N} = \frac{1 - 8z + 7zz}{1 - 3z - 4zz + 12z^3}$. Hier iſt der Nenner $= (1 - 3z). (1 - 2z). (1 + 2z)$; Es ſey alſo

$$p - qz = 1 - 3z; \qquad 1 - z\,2; \qquad 1 + 2z;$$

$$S = 1 - 4zz; \qquad 1 - z - 6z^2; \qquad 1 - 5z + 6z^2$$

$$\frac{p}{q} = \tfrac{1}{3}; \qquad + \tfrac{1}{2}; \qquad - \tfrac{1}{2};$$

$$A = \frac{1 - \frac{8}{3} + \frac{7}{9}}{1 - \frac{4}{9}}; \qquad \frac{1 - \frac{8}{2} + \frac{7}{4}}{1 - \frac{1}{2} - \frac{6}{4}}; \qquad \frac{1 + \frac{8}{2} + \frac{7}{4}}{1 + \frac{5}{2} + \frac{6}{4}};$$

alſo $\dfrac{M}{N} = \dfrac{-\frac{8}{5}}{1 - 3z} + \dfrac{\frac{5}{4}}{1 - 2z} + \dfrac{\frac{27}{20}}{1 + 2z}$

365. Lehrſ. Ein Bruch $\frac{P}{(p-qz)^n}$, deſſen Zähler P eine ganze Function und niedriger als vom Grade n iſt; läßt ſich in folgende einfache Brüche zerlegen: $\frac{A}{(p-qz)^n}+\frac{B}{(p-qz)^{n-1}}+\frac{C}{(p-qz)^{n-2}}\ldots+\frac{K}{p-qz}$, deren Zahl n iſt, und die Zähler alle unveränderliche Gröſſen ſind.

Bew. Weil P höchſtens bis auf den Grad n ſteigen kann, ſo läßt ſich annehmen $P=\alpha+\beta z+\gamma z^2+\delta z^3\ldots+\varkappa z^{n-1}$; wo die Zahl der gegebenen griechiſchen Buchſtaben n iſt; es können auch welche darunter $=0$ ſeyn. Wenn man aber die einfachen Brüche alle auf einerley Benennung $(p-qz)^n$ gebracht hat, ſo wird der Zähler ihrer Summe $=A+B(p-qz)+C.(p-qz)^2\ldots K.(p-qz)^{n-1}$; dieſer Zähler, nach den Abmeſſungen von z geordnet, enthält n Glieder, und giebt alſo mit P verglichen n Gleichungen, davon die erſte $\alpha=A+Bp+Cp^2\ldots Kp^{n-1}$ iſt. In keiner dieſer n Gleichungen, befindet ſich eine höhere Potenz eines der Buchſtaben A; B. . . . K oder ein Product aus einem von

 ihnen

ihnen in dem andern. Alſo beſtimmen dieſe Gleichungen für jeden dieſer Buchſtaben, einen einzigen und möglichen Werth.

366. Aufg. Wenn $N = (p - qz)^2 . S$; die Zähler der Brüche (365) zu finden.

Aufl. Weil $\frac{M}{(p-qz)^2 . S} = \frac{A}{(p-qz)^2} + \frac{B}{p-qz} + \frac{P}{S}$ wo P den ganzen Zähler des Bruchs bedeutet, der aus des Nenners Factor S wird, ſo iſt $P = \frac{M - A.S - B.(p-qz)}{(p-qz)^2}$

Damit alſo dieſes eine ganze Function wird, ſo muß ſich $M - A.S - B.(p-qz)S$ durch das Quadrat von $p - qz$ und folglich durch $p - qz$ ſelbſt, dividiren laſſen. Es muß alſo zum erſten $= 0$ werden, wenn man $\frac{p}{q}$ ſtatt z ſetzt. Da wird alſo $M - A.S = 0$ oder $A = \frac{M}{S}$ wenn man in M und S, $\frac{p}{q}$ ſtatt z ſetzt. Ferner muß ſich $M - A.S - B.(p - qz).S$, wo z in M und S ſtehen bleibt, und nicht $\frac{p}{q}$ ſtatt ſeiner geſetzt wird; noch durch $(p - qz)^2$ dividiren laſſen; oder

oder $\frac{M - A.S}{p - qz} - B.S$ muß ſich durch $p - qz$ dividiren laſſen; Es ſey $\frac{M - A.S}{p - qz} = T$; ſo muß ſich $T - B.S$ durch $p - qz$ dividiren laſſen; oder verſchwinden, wenn $\frac{p}{q}$ ſtatt z geſetzt wird. Alſo iſt in dieſem Falle $B = \frac{T}{S}$ wenn in T und S; $\frac{p}{q}$. ſtatt z geſetzt wird. Endlich iſt $P = \frac{T - B.S}{p - qz}$ wo z in T und S ſtehen bleibt, und nicht $\frac{p}{q}$ ſtatt ſeiner geſetzt wird.

367. Erſtes Exempel. $\frac{M}{N} = \frac{1 + 3z - zz}{(1+z)^2.(3 - z)}$; Hier iſt $M = 1 + 3z - zz$; $p = 1$; $q = -1$; $S = 3 - z$; alſo $\frac{p}{q} = -1$, $A = \frac{1 - 3 - 1}{3 + 1} = -\frac{3}{4}$; $M - A.S = \frac{13}{4} + \frac{9}{4}z - zz$;

$T = \frac{13}{4} - z$; $B = \frac{\frac{13}{4} + 1}{3 + 1} = \frac{17}{16}$

$P = \frac{\frac{13}{4} - z - \frac{17}{16}.(3 - z)}{1 + z} = \frac{1}{16}$; alſo

$$\frac{M}{N} = \frac{-\frac{5}{4}}{(1+z)^2} + \frac{\frac{17}{16}}{1+z} + \frac{\frac{1}{16}}{3-z}$$

Zweytes Exempel $\frac{1+t^2}{(f-gt)^2 . (f+gt)^2}$

1. Weil $f - gt = g . \left(\frac{f}{g} - t\right)$; $f + gt = g . \left(\frac{f}{g} + t\right)$ ſo läßt ſich der Nenner folgendergeſtalt ausdrücken $g^4 . \left[\frac{f}{g} - t\right)^2 . \left[\frac{f}{g} + t\right)^2$

2. Man ſetze $\frac{f}{g} = \lambda$ und reducire

$\frac{1+t^2}{(\lambda - t)^2 . (\lambda + t)^2}$ wo $M = 1 + t^2$

3. Hier ſey erſtlich $p = \lambda$; $q = 1$; $z = t$; $S = (\lambda + t)^2$ alſo muß man λ ſtatt t ſetzen.

4. Dieſes giebt $A = \frac{1+\lambda^2}{4\lambda^2}$

5. So wird $T = \frac{1 + t^2 - \frac{(1+\lambda^2).(\lambda+t)^2}{4\lambda^2}}{\lambda - t}$

Wenn man den Zähler nach λ ordnet, ſo wird er ſelbſt ein Bruch, deſſen Nenner $4\lambda^2$; Sein Zähler aber läßt ſich mit $\lambda - t$ dividiren; und ſo

ſo erhält man $T = \frac{-\lambda^3 - 3t\lambda^2 + 3\lambda + t}{4\lambda^2}$

6. Macht man nun $\frac{T}{S}$; und ſetzt darinnen λ ſtatt t; ſo kömmt $B = \frac{1-\lambda^2}{4\lambda^3}$

7. Ferner findet man $\frac{T - B.S}{p - qz}$ oder $P = \frac{2\lambda + (1-\lambda^2)t}{4\lambda^3}$.

8. Nun iſt alſo noch zweytens übrig folgenden Bruch zu zerlegen

$$\frac{\frac{2\lambda + (1-\lambda^2)t}{4\lambda^3}}{(\lambda + t)^2}$$

9. Da iſt nun $M = \frac{2\lambda + (1 - \lambda^2)t}{4\lambda^3}$;

$p = \lambda$; $q = -1$; $S = 1$

10. Hier muß man alſo $-\lambda$ ſtatt t ſetzen.

11. Da wird $A = \frac{1+\lambda^2}{4\lambda^3}$

12. $M - A.S = \frac{\lambda - \lambda^3 + (1-\lambda^2)t}{4\lambda^3}$

Dieſes mit $\lambda + t$ dividirt giebt

$-\lambda^2$

$\frac{-\lambda^2 + 1}{4\lambda^3} = B$ weil $S = 1$

13. Hier alſo iſt $P = 0$;

14. Wenn man daher 4; 6; 11; 12; 13; zuſammen nimmt ſo iſt der Bruch in (2)

$$= \frac{1 + \lambda^2}{4\lambda^2} \cdot \left(\frac{1}{(\lambda - t)^2} + \frac{1}{(\lambda + t^2)} \right)$$

$$+ \frac{1 - \lambda^2}{4\lambda^3} \cdot \left(\frac{1}{\lambda - t} + \frac{1}{\lambda + t} \right)$$

Woraus ſich leicht λ wegſchaffen läßt.

368. Aufg. Wenn $N = (p - qz)^{n'} \cdot Z$; den Bruch $\frac{M}{N}$ nach 365 zu zerlegen.

Aufl. Es ſey $\frac{M}{(p-qz)^n \cdot Z} = \frac{A}{(p-qz)^n}$

$$+ \frac{B}{(p-qz)^{n-1}} + \frac{C}{(p-qz)^{n-2}}$$

$$+ \frac{D}{(p-qz)^{n-3}} \cdot \cdot \cdot + \frac{F}{(p-qz)^{n-f}} -$$

$$\cdot \cdot \cdot \cdot + \frac{K}{(q-qz)} + \frac{L}{Z}$$; Alſo

$(M - A.Z - B.Z.(p - qz) - C.Z.$
$(p - qz)^2 - D.Z.(p - qz)^3 \ldots - F.Z.$
$(p - qz)^f \ldots - K.Z.(p - qz)^{n-1}):$

(p—

$(p - qz)^n = L$; Folglich läßt ſich die Gröſſe $M \ldots\ldots - K. Z. (p-qz)^{n-1}$ durch $(p-qz)^n$ dividiren, weil L eine ganze Function iſt. Dieſe Gröſſe; die ich der Kürze wegen y nennen will, wird alſo $= 0$; wenn man $\frac{p}{q}$ ſtatt z ſetzt. Dieſes giebt $M - A. Z = 0$; oder es iſt $A = \frac{M}{Z}$; wenn $\frac{p}{q}$ ſtatt z geſetzt wird. Nun ſey überhaupt, ohne $\frac{p}{q}$ ſtatt z zu ſetzen;

$$\frac{M - A. Z}{p - qz} = P,$$ (wo P eine ganze Function iſt, weil ſich $y - (M - A. Z)$ ſo wohl als y und folglich auch $M - A. Z$, durch $p - qz$ dividiren läßt), ſo läßt ſich $\frac{y}{p - qz}$ noch einmahl durch $p - qz$ dividiren; oder $P - B. Z - C. Z. (p-qz) \ldots\ldots - K. Z. (p-qz)^{n-2}$ läßt ſich noch durch $p - qz$ dividiren, das heißt, es verſchwindet für $z = \frac{p}{q}$ welches alſo $B = \frac{P}{Z}$ giebt.

Nun ſey, ohne $\frac{p}{q}$ ſtatt z zu ſetzen, überhaupt

haupt $\frac{P - B.Z}{p - qz} = Q$; ſo läßt ſich $\frac{y}{(p-qz)^2}$ $= Q - C.Z - D.Z.(p-qz) \ldots$ $K.Z.(p-qz)^{n-3}$ wieder durch $p - qz$ dividiren, alſo iſt für $z = \frac{p}{q}$; $C = \frac{Q}{Z}$

Wenn nun $\frac{Q - C.Z}{p - qz} = R$ ſo läßt ſich $\frac{y}{(p-qz)^3} = R - D.Z - E.Z.(p-qz) \ldots$ wieder durch $p - qz$ dividiren, oder für $z = \frac{p}{q}$ iſt $D = \frac{R}{Z}$

Und wenn $R - D.Z = S$; ſo iſt für $z = \frac{p}{q}$; $S - E.Z. \ldots = 0$ oder $E = \frac{S}{Z}$ u. ſ. w.

Die Diviſion der Gröſſe y durch $p - qz$ oder das ihr gleichgültige Verfahren $\frac{p}{q}$ ſtatt z zu ſetzen, läßt ſich nähmlich n mahl wiederhohlen, und giebt jedesmahl einen von den n Buchſtaben A. . . . K. Nachdem man dieſe alle gefunden hat, wird auch L aus ſeinem vorhin angegebenen Werthe gefunden.

369. Exempel. $\frac{1 + zz}{z^5 . (1 + z^3)}$ giebt

$M = 1 + zz$; $p = 0$; $q = -1$; $\frac{p}{q} = 0$;

$n = 5$; $Z = 1 + z^3$ $y = 1 + zz - (A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4) . Z$;

$A = 1$; $P = \frac{1 + zz - 1 - z^3}{z} = z - zz$

$B = 0$; $Q = \frac{z - zz}{z} = 1 - z$

$C = 1$; $R = \frac{1 - z - 1 - z^3}{z} = - 1 - zz$

$D = - 1$; $S = \frac{1 - zz + 1 + zz^3}{z} = - z + zz$

$E = 0$

Endlich iſt $L = (1 + z^2) - (1 + z^3) - (z^2 + z^5) + z^3 + z^6) : z^5$ oder $= - . 1 + z$ alſo der Bruch =

$$\frac{1}{z^5} + \frac{0}{z^4} + \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^2} + \frac{0}{z}$$

$$+ \frac{z - 1}{1 + z^3}$$

370. Zuſ. Jeder eigentliche Bruch $\frac{M}{N}$ läßt ſich nach 362; 368; in einfache zerlegen; und 362 iſt ſelbſt in 368 enthalten, wenn $n = 1$ geſetzt

ſetzt wird. Man kann aber aus jeder gebrochenen Function den eigentlichen Bruch von dem Ganzen abſondern, das etwa darinnen enthalten iſt (357) und das keine ſolche Zerlegung erfodert. Alſo ſind die hier gegebenen Vorſchriften zulänglich, alle gebrochne Functionen zu zerlegen, und es iſt unnöthig beſonders darzuthun, daß ihre Anwendung bey einem uneigentlichen Bruche vor ſeiner Zergliederung nach (357) doch eben die einfachen Brüche giebt, die aus dem eigentlichen nach der Zergliederung herauskommen, obgleich bey einer geringen Aufmerkſamkeit in die Augen fällt, daß ſich dieſes ſo verhält, weil es einerley iſt, ob man dieſe Regeln bey einem eigentlichen Bruche $\frac{M}{N}$ oder bey einem uneigentlichen $\frac{M + Q. N}{N}$ wo Q eine ganze Function iſt, anbringt.

371. Ex. I) $\frac{1}{(1 + z). (1 - z)^2. z^3}$ zu zerlegen; wo $M = 1$; nehme man zuerſt den einzelnen Factor $1 + z$; oder man ſetze $N = (1 + z). Z$ wo $n = 1$; $p = 1$; $q = -1$; $\frac{p}{q} = -1$ $Z = z^3 - 2z^4 + z^5$ (368; 370). Alſo den Bruch $\frac{A}{1 + z}$ zu finden; $A = \frac{1}{-1 - 2 - 1}$ $= - \frac{1}{4}$.

II)

II) Nun nehme man den quadratiſchen Factor, oder man ſetze $N = (1 - z)^2 . (z^3 + z^4)$ wo

(368) $n = 2$; $p = 1$; $q = 1$; $\frac{p}{q} = 1$;

$Z = z^3 + z^4$; alſo $A = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$;

$$P = \frac{1 - \frac{1}{2}. z^3 - \frac{1}{2} z^4}{1 - z} = 1 + z + zz + \frac{1}{2} z^3;$$

$$B = \frac{1 + 1 + 1 + \frac{1}{2}}{1 + 1} = \frac{7}{4}$$

III) Endlich nehme man wegen des cubiſchen Factors; $N = z^3 . (1 - z - zz + z^3)$ alſo

368) $n = 3$; $p = 0$; $q = 1$; $\frac{p}{q} = 0$; $Z = 1 - z - zz + z^3$; $A = \frac{1}{1} = 1$;

$$P = \frac{1 - 1 + z + zz - z^3}{z} = 1 + z - zz;$$

$B = \frac{1}{1} = 1$; $Q = \frac{1 + z - zz - 1 + z + zz - z^3}{z}$

$= 2 - zz$; $C = \frac{2}{1} = 2$;

IIII) Alſo iſt der Bruch =

$\frac{- \frac{1}{4}}{1 + z}$ wegen (I)

$\frac{+ \frac{1}{2}}{(1 - z)^2} + \frac{\frac{7}{4}}{1 - z}$ wegen (II)

(Anfangsgr. III. Th. II. B.) U +

$+ \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{2}{z}$ wegen (III)

Daß dieſe einfachen Brůche zuſammen den vorgegebenen ausmachen, iſt daher gewiß, weil man für jeden der dreyerley Factore von N die zugehörigen einfachen Brůche gefunden hat.

Von den Werthen ſolcher Functionen, die unter gewiſſen Umſtänden unbeſtimmt ſcheinen.

372. Aufg. P; Q; ſind was man will für Functionen von x; deren jede = o wird, wenn x = a; Man fragt, was für dieſen Werth von x; der Werth von $\frac{P}{Q}$ iſt, weil ſolcher alſo $\frac{o}{o}$ zu ſeyn ſcheinet.

Aufl. Man ſetze a + e ſtatt x; ſo verwandelt ſich P in eine Gröſſe, wo alles, was kein e enthält, ſich zuſammen aufhebt, und nur Theile übrig bleiben, die in e von der erſten, und von höhern Potenzen multiplicirt ſind; wie gleich daraus erhellt, weil man jedes Stück von P es mag rational oder eine Wurzelgröſſe ſeyn, nach dem binomiſchen Lehrſatze (46) in eine Reihe, die nach e ſteigt, verwandeln kann. Man nehme von dieſen Reihen alle die Glieder zuſammen, die nur in die erſte Potenz von e multiplicirt ſind,

ſind, und heiſſe ſie zuſammen fe. die übrigen Glieder aber, deren jedes eine höhere Potenz von e enthält, heiſſen zuſammen $F.e^2$ wo Theile von F noch mit der erſten oder höhern Potenzen von e multiplicirt ſeyn können; alſo wird $P = fe + Fee$ und eben ſo $Q = ge + Gee$; wo g und G das bedeuten, was f und F bey P. Alſo verwandelt ſich $\frac{P}{Q}$ in $\frac{f + Fe}{g + Ge}$. Nun laſſe man e unendlich abnehmen; ſo verwandelt ſich $\frac{P}{Q}$ in $\frac{f}{g}$. Iſt nun hier nicht zugleich f und $g; = 0$; ſo wird $\frac{f}{g}$ der Werth von $\frac{P}{Q}$ für $x = a$ ſeyn. Es iſt nähmlich $\frac{f + Fe}{g + Ge}$ der Werth von $\frac{P}{Q}$ für jeden andern unbeſtimmten Werth von x; und man läßt ſich dieſen andern unbeſtimmten Werth von x, deren Werthe a unendlich nähern, man erhält alſo den Werth $\frac{P}{Q}$ für einen Werth von x der ſich dem Werthe a unendlich nähert, d. i. für $x = a$.

373. Ex. Wenn $\frac{-xx + a\sqrt{ax}}{a - a\sqrt{ax}}$ gegeben iſt; ſo wird $P = -aa - 2ae - 1.ee$
$+ aa + \frac{1}{2}a. - \frac{1}{8}.$

alſo $f = -\frac{3}{2}a$; $F = -\frac{7}{8} \ldots$;
Eben ſo $Q = a$

$$- a - \tfrac{1}{2}e + \frac{ee}{4a} \ldots$$

alſo $g = -\frac{1}{2}$; $G = \frac{1}{4a} \ldots$

Folglich $\frac{f}{g} = + 3a$ für den Werth von $\frac{P}{Q}$ wenn $x = a$.

374. Zuſ. Wenn man $x + e$ in P ſtatt x ſetzt, und von dieſem zweyten Zuſtande der Function P, den erſten abzieht, ſo bleiben Gröſſen wie ϕe; Φee übrig, ſo daß in ϕ; Φ; da x ſteht, wo a in f; F; ſteht. Wenn e verſchwindet, ſo iſt $\phi = \frac{dP}{dx}$ (20). Folglich iſt f der Werth von $\frac{dP}{dx}$ für $x = a$. Und eben ſo $\frac{dQ}{dx} = g$ für $x = a$. Alſo läßt ſich die Regel (372) folgendergeſtalt ausdrucken: der Werth von $\frac{P}{Q}$ für $x = a$; iſt $= \frac{dP}{dQ}$ für $x = a$.

375. Ex. Bey $\frac{\sqrt{(2a^3x - x^4)} - a \cdot \sqrt[3]{aax}}{a - \sqrt[4]{ax^3}}$

iſt

iſt überhaupt $\frac{dP}{dx} = \frac{a^3 - 2x^3}{\surd(2a^3x - x^4)} - \frac{7}{3}a$.

$\surd\frac{aa}{xx}$ und überhaupt $\frac{dQ}{dx} = -\frac{3}{4}\sqrt[4]{\frac{a}{x}}$;

Für $x = a$; verwandeln ſich dieſe beyden Gröſſen in $-\frac{4}{3}a$ und $-\frac{3}{4}$; alſo iſt der geſuchte Werth von $\frac{P}{Q} = \frac{-\frac{4}{3}a}{-\frac{3}{4}} = +\frac{16}{9}a$.

376. Zuſ. Wenn bey Anwendung dieſer Regel entweder dP allein oder dQ allein $= 0$ wird, ſo iſt der geſuchte Werth im erſten Falle $= 0$; im zweyten $= \infty$

377. Ex. $\frac{lx}{\surd(1-x)}$ wird dem Scheine nach $\frac{0}{0}$ für $x = 1$; aber $dP = \frac{dx}{x}$ $dQ = + \frac{dx}{2\surd(1-x)}$ alſo kömmt nach der Regel (374) $\frac{dP}{dQ}$ oder $\frac{2\surd(1-x)}{x} = 0$ für $x = 1$. So würde $\frac{\surd(1-x)}{lx} = \infty$ für $x = 1$ ſeyn.

378. Zuſ. Wenn aber bey Anwendung der Regel ſowohl dP als dQ verſchwinden, und ſolchergeſtalt $\frac{dP}{dQ}$ ebenfalls $\frac{0}{0}$ zu geben ſcheint, ſo

darf man nur bedenken, daß eigentlich $\frac{dP}{dx} = \varphi$ mit $\frac{dQ}{dx} = \gamma$ dividirt wird; nach dem man dadurch, daß $x = a$ geſetzt worden, φ und γ in f und g verwandelt hat. Weil alſo nun der Quotient $\frac{\varphi}{\gamma}$ ſich für $x = a$ in $\frac{0}{0}$ verwandelt, ſo kann man nach eben der Regel 374 ſeinen Werth für dieſen Fall aus $\frac{d\varphi}{d\gamma}$ d. i. aus $\frac{ddP}{ddQ}$ finden, wenn man darinnen $x = a$ ſetzt. Und ſollte hier wieder $\frac{0}{0}$ herauskommen, ſo folgt nach eben der Art zu ſchlieſſen, daß man $\frac{d^3 P}{d^3 Q}$ brauchen kann. Und ſo kann man ſo weit fortgehen, biß man auf Differentiale von P und Q kömmt, die nicht $\frac{0}{0}$ geben. Man muß aber auf ſolche kommen, weil $\frac{P}{Q}$ doch für $x = a$ einen gewiſſen Werth haben muß.

379. Ex. Bey $\frac{a.\sqrt[3]{4.(a^3 + x^3)} - ax - aa}{\sqrt{2.(aa + xx)} - x - a}$

kömmt

kömmt $\frac{dP}{dQ} = \frac{axx.\sqrt[3]{4}:\sqrt[3]{(a^6+2a^3x^3+x^6)}-a}{x\sqrt{2}:\sqrt{(aa+xx)}-1}$

welches auch $\frac{o}{o}$ giebt, wenn $x = a$ geſetzt wird.

Alſo ſucht man $\frac{ddP}{dx^2} = \frac{2a^4\ x.\ \sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{(a^3+x^3)^5}}$ und

$\frac{ddQ}{dx^2} = \frac{aa\sqrt{2}}{\sqrt{(aa+xx)^3}}$; wo $x = a$ in $\frac{ddP}{ddQ}$ geſetzt, den geſuchten Werth $= 2a$ giebt.

380. Anm. Dieſe Regeln ſind von Joh. Bernoulli erfunden worden. S. Act. Erud. Lipſ. 1704. M. Aug. op. Io Bern. T. I. n. 71. Wie auch Eul. Inſt. Calc. diff. L. II. c. 15.

381. Ex. Den Werth von $\frac{x^n}{lx}$ für $x = \infty$ zu finden. Hier werden Zähler und Nenner beyde unendlich. Um einen Ausdruck zu bekommen, wo beyde verſchwinden, ſchreibe man $\frac{1:lx}{1:x^n}$ ferner $x = \frac{1}{y}$ ſo kömmt $-\frac{-1:ly}{y^n}$. Endlich ſetze man $y^n = u$ ſo kömmt $\frac{-1:lu^{\frac{1}{n}}}{u}$;

oder $P = \left(l u^{\frac{1}{n}}\right)^{-1}$; $Q = u$; alſo $dP = + \frac{du}{nu}\left(l u^{\frac{1}{n}}\right)^{-2}$; und $\frac{dP}{dQ} = \frac{1}{u\left(l u^{\frac{1}{n}}\right)^{2}}$

welches für $u = 0$; unendlich wird. Aber für $u = 0$ wird auch $y = 0$ und x unendlich, alſo wird $\frac{x^n}{lx}$ für das unendliche x; unendlich. Eul. I. C. D. L. II. §. 360. Ex. 6. löſet dieſes Exempel auf eine andere Art auf.

382. Zuſ. Wenn für $x = a$; $P = 0$; $Q = \infty$; ſo findet man den zugehörigen Werth des Products $P . Q$ folgendergeſtalt: Es ſey $Q = \frac{1}{R}$ alſo $P . Q = \frac{P}{R}$ ſo iſt $R = 0$ wenn Q unendlich iſt, und alſo der geſuchte Werth $= \frac{dP}{dR}$ nach 374.

Ex. Wenn $1 : \pi$ die Verhältniß des Durchmeſſers zum Umkreiſe iſt, ſo wird in $(1 - x) \tang \frac{\pi x}{2}$; $1 - x = 0$ und $\tang \frac{\pi x}{2}$ unendlich für $x = 1$; Man drücke alſo die Tangente durch

die

die Cotangente aus, ſo kömmt $\frac{1-x}{\cot\frac{\pi x}{2}}$.

Wenn aber $\cot\frac{\pi dx}{2} = v$; ſo iſt $\frac{\pi dx}{2} =$
$\frac{-dv}{1+vv}$ alſo $dv = -\frac{1}{2}\pi.(1+vv)$.
dx und $\frac{dP}{dR} = \frac{2}{\pi.(1+vv)}$ welches den
geſuchten Werth $= \frac{2}{\pi}$ giebt.

383. Zuſ. Wenn P und Q beyde für $x = a$ unendlich werden, ſo ſcheint $P - Q = o$ zu werden aber es kann jeden endlichen Werth haben, weil zwo unendliche Gröſſen um eine endliche, die in Vergleichung ihrer für nichts gerechnet wird, unterſchieden ſeyn können. (9) Wenn P und Q algebraiſche Functionen ſind, ſo iſt das Mittel hier $P - Q$ für $x = a$ zu finden daß man $P - Q$ für jeden unbeſtimmten Werth von x berechnet und nach dieſem in dem ſolchergeſtalt gefundenen Ausdrucke von $P - Q$ erſtlich $x = a$ ſetzt. Denn algebraiſche Functionen können, wofern x einen endlichen Werth behalten ſoll, nicht anders unendlich werden, als wenn es Brüche ſind, deren Nenner verſchwindet. Bringt man alſo dieſe Brüche in einen zuſammen,

men, deſſen Nenner als ein Product der vorigen, auch verſchwinden wird, ſo verſchwindet entweder der Zähler auch, und da kann man den Werth des Bruchs nach 374 oder auch auf gleichgültige Arten finden, oder der Zähler verſchwindet nicht, und da iſt P — Q unendlich.

Ex. $\frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-xx}$ für $x = 1$ zu finden, drücke man dieſen Unterſchied durch $\frac{1}{1-x}$

$$\left(1 - \frac{2}{1+x}\right) = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{-(1-x)}{1+x}$$

$= -\frac{1}{1+x}$ aus; welches $-\frac{1}{2}$ giebt.

Für ein unendliches x können P und Q auch unendlich werden, wenn es ſich in ihren Zählern befindet. Hier muß man wiederum P — Q für jedes x finden, und in dem ſo gefundenen Unterſchiede x unendlich ſetzen; ſo findet man den Unterſchied P — Q für ein unendliches x, und nicht den Unterſchied zwoer unendlichen Gröſſen P und Q; als den man nicht finden kann, wenn er endlich iſt.

Ex. Man ſuche $\underline{(x+b)^{1-n}}\ x^{1-n}$; Man verwandele die erſte Potenz in ihre Reihe

$$x^{1-n} + (1-n)\, x^{-n}\, b + \frac{(1-n).-n}{1.2}\, x^{-n-1}\, bb.$$

ſo

ſo hebt ſich das erſte Glied durch den Abzug auf, und man behält für den Werth des Unterſchiedes nur das zweyte Glied $\frac{(1-n)b}{x^n}$ wenn x unendlich wird, weil ſolches ſelbſt zwar unendlich klein iſt, aber doch in Vergleichung ſeiner die übrigen verſchwinden.

Folglich wäre in dieſem Falle

$$x^n.\left((x+b)^{1:n} - x^{1-n}\right) = (1-n)\,b$$

Ein anderes hieher gehöriges Exempel giebt die Art die Aſymptoten zu finden (113)

384. Zuſ. Bey tranſcendentiſchen Functionen verfährt man nach eben den Grundſätzen. Man ſetzt a + e ſtatt x in P und Q; und ſucht daraus einen allgemeinen Werth von P − Q; der ſich alsdenn in den geſuchten verwandelt, wenn e verſchwindet.

Ex. Man ſucht $\frac{x}{x-1} - \frac{1}{lx}$ für = 1; Hier ſetze man x = 1 + e; alſo der erſte Theil P = $\frac{1+e}{e} = \frac{1}{e} + 1$, der andere Q

$$= \frac{1}{l(1+e)} = \frac{1}{e - \frac{1}{2}ee + \frac{1}{3}eee\ldots)}(220)$$

$$= \frac{1}{e.(1-\frac{1}{2}e+\frac{1}{3}ee\ldots} = \frac{1}{e}.$$

(1 −

$(1 - \frac{1}{2}e + \frac{1}{3}ee \ldots)^{-1} = \frac{1}{e} \cdot (1 + \frac{1}{2}e - \frac{1}{12}ee \ldots)$

$(56) = \frac{1}{e} + \frac{1}{2} - \frac{1}{12}e \ldots$ alſo $P - Q =$

$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{12}e \ldots$ und für ein verſchwindendes e; $= \frac{1}{2}$

Integrirung der rationalen Differentiale.

385. Aufg. Wenn M; N; rationale ganze Functionen von x ſind und N höher als M, alſo $\frac{M}{N}$ ein eigentlicher Bruch iſt; $\frac{M}{N}dx$ zu integriren.

Aufl. Man zerfälle N in alle einfache Factoren, welches hier als eine Foderung zum voraus geſetzt wird; und mache aus $\frac{M}{N}$ ſo viel einfache Brüche als Factoren herauskommen (361; 368;) jeder Bruch $\frac{A}{p - qx}$ (361) giebt mit dx multiplicirt das logarithmiſche Differential $\frac{Adx}{p - qx}$ deſſen Integral $\frac{-A}{q} l(p - qx)$ iſt (218) und jeder Bruch wie $\frac{F}{(p - qx)^{n \cdot f}}$ mit dx multipli-

pliciꝛt, das algebraiſche Differential $\frac{F\,dx}{(p-qx)^{n-f}}$
deſſen Integral $\frac{-F}{q.(f+1-n).(p-qx)^{f+1-n}}$
iſt. (203) beyderley Integrale zuſammengerech- net geben alſo $\int \frac{M}{N}\,dx$.

Jedes Exempel, das bey 361. . . 368 u. f. gege- ben worden, kann hier gebraucht werden, ſo iſt aus (371) x ſtatt z geſetzt.

$$\int \frac{dx}{x^3 - x^4 - x^5 + x^6} = -\tfrac{1}{4}\int \frac{dx}{1+x}$$
$$+\tfrac{1}{2}.\int (1-x)^{-2}\,dx + \tfrac{7}{4}.\int \frac{dx}{1-x} + \int x^{-3}$$
$$dx + \int x^{-2} dx + \frac{2\int dx}{x} = -\tfrac{1}{4}.\,l\,(1+x)$$
$$+\tfrac{1}{2}.(1-x)^{-1} - \tfrac{7}{4}\,l\,(1-x) - \tfrac{1}{2}.\,x^{-2} - x^{-1}$$
$$+ 2\,lx = l\,\frac{x^2}{\sqrt[4]{(1+x)\,(1-x)^7}}$$
$$+\frac{1}{2.(1-x)} - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} + \text{Conſt.}$$

286. Zuſ. Für jeden einfachen Factor $p-qx$ iſt des zugehörigen Bruches Zähler $= \frac{M}{S}$ ſo daß $\frac{p}{q}$ ſtatt x geſetzt wird, (361) alſo das daher ent-

entſtehende logarithmiſche Integral $\frac{M}{Sq}$.
$l\frac{1}{p-qx}$ Hier läßt ſich nun S allemahl durch die Diviſion finden, wenn der Factor von N gegeben iſt. Aber dieſe Arbeit würde zuweilen ſehr weitläuftig werden, oder gar S durch eine unbeſtimmte Zahl von Gliedern geben; z. E. wenn $N = 1 - x^n$ welches $1 - x$ zum Factor hat, (Alg. 243.) da S; n Glieder hat, und der Werth von S für $x = \frac{p}{q}$ durch eine weitläuftige Arbeit mühſam gefunden würde. (*). Kürzer erhält man dieſes ſo: $S = \frac{N}{p - qx}$; und hier wird der Werth von S geſucht, der herauskömmt, wenn $\frac{p}{q}$ ſtatt x geſetzt wird. In dieſem Falle aber verſchwinden Zähler und Nenner des Bruches, weil N ſich mit $p - qx$ muß dividiren laſſen, damit S ein Ganzes wird. Alſo iſt für S der gegenwärtig geſuchte Werth $= \frac{dN}{-qdx}$ (374) ſo

(*) Man könnte auch $\frac{dx}{1-x^n}$ nicht nach gegenwärtigen integriren, es muß nach (400) geſchehn.

ſo daß $\frac{p}{q}$ ſtatt x geſeßt wird, und das Integral iſt $+ \frac{Mdx}{dN} . l(p - qx)$ wo in $\frac{Mdx}{dN}$ überall $\frac{p}{q}$ ſtatt x geſeßt werden muß.

Im Exempel 385 iſt $dN = (3xx - 4x^3 - 5x^4 + 6x^5)$. dx welches $- 4dx$ für $x = -1$ wird. Alſo das Integral $= - \frac{1}{4} l(1 + x)$, wie vorhin.

387. Zuſ. Wenn $N = (p - qx)^n . Z$, wo x; iſt was z; in 368; alſo der Factor $(p - qx)^n$ $\frac{Mdx}{N}$ folgende Integrale giebt:

$$A \int \frac{dx}{(p - qx)^n} + B \int \frac{dx}{(p - qx)^{n-1}}$$

$$+ C \int \frac{dx}{(p - qx)^{n-2}} \ldots + F \int \frac{dx}{(p - qx)^{n-f}} \ldots -$$

$$+ \frac{K}{p - qx} + \int \frac{Ldx}{Z}$$ ſo läßt ſich Z nicht durch $p - qx$ dividiren, weil man annimmt, N ſoll keine höhere Potenz von $p - qx$ enthalten als die vom Exponenten n. Nun iſt, hier x ſtatt z in (368) geſeßt, y eine ganze Function die ſich mit $(p - qx)^n$ dividiren läßt. Weil nun Z keinen Factor wie $p - qx$ enthält, ſo wird in dem Quo-

Quotienten $\frac{y}{z}$, der Factor $(p - qx)^n$ um keinen Grad niedriger als in y ſelbſt, folglich läßt ſich nicht nur y ſondern auch $\frac{y}{Z}$ durch $(p - qx)^n$ dividiren.

Das iſt: der Ausdruck $\frac{M}{Z} - A - B (p - qx) \ldots\ldots - K. (p - qx^{n \cdot 1}$ muß n mahl $= o$ werden, wenn man in ihm $\frac{p}{q}$ ſtatt x ſetzt, oder er muß $= o$ geſetzt, eine Gleichung vorſtellen, die n gleiche Wurzeln, jede $= \frac{p}{q}$ hat. Folglich finden ſich von dieſen gleichen Wurzeln noch $n - 1$ in der Differentialgleichung $d\frac{M}{Z} + Bqdx \ldots\ldots + F. f. (p - qx)^{f \cdot 1} qdx \ldots\ldots = o.$ (172) Und alſo noch $n - 2$ in der zweyten Differentialgleichung $dd\frac{M}{Z} - (2 C + 6. D. (p - qx) \ldots\ldots + f. (f - 1) F. (p - qx)^{f \cdot 2} \ldots\ldots) qqdx^2 = o$ und noch $n - 3$ in der dritten, $d^3 \frac{M}{Z} + (6 D + \ldots\ldots + f (f - 1)$

(f

$(f-2)\, F.\, (p-qx)^{f-3} \ldots)\, q^3\, dx^3 = 0$ u. ſ. w. daß alſo nebſt dem erſten Ausdrucke, noch n − 1 nach einander folgende Differentiale deſſelben, verſchwinden, wenn $\frac{p}{q}$ ſtatt x geſetzt wird. Es ſey η der Coefficient zunächſt vor F, und Φ der nächſtfolgende oder $\frac{y}{Z} = \frac{M}{Z} \ldots\ldots - \eta.\, (p - qx)^{f-1} - F.\, (p - qx)^f - \Phi.\, (p - qx)^{f+1} \ldots$ Weil der Exponent von p — qx in jedem Gliede durch jede Differentiation um 1 vermindert wird; ſo wird er durch f — 1 Differentiationen um f — 1 vermindert, und alſo ſey die f — 1 te Differentialgleichung;

$$d^{f-1}\frac{M}{Z} \pm ((f-1).\, (f-2) \ldots 1.\, \eta$$

$$+ f.\, (f-1) \ldots 2.\, F.\, (p-qx) + f.\, (f-1) \ldots\ldots 3.\, \Phi.\, (p-qx)^2 \ldots\ldots)\, (qdx)^{f-1}$$ ſo iſt die f te

$$d^f\frac{M}{Z} \mp (f.\, (f-1) \ldots 2.\, 1.\, F + f.\, (f-1) \ldots 2.\, \Phi.\, (p-qx) \ldots).\, (qdx)^f$$ daß aber die angenommene Form der f — 1 ten wahr iſt, kann man ſich leicht überzeugen, wenn man f — 1 = 1, oder = 2 oder = 3 u. ſ. w. ſetzt: Alſo gilt die Form für die f te überhaupt, weil ſie mit der für die f — 1 te einerley iſt, nur daß f ſtatt f — 1

geſetzt worden, und die Zeichen umgekehrt ſind. Es gelten aber die obern Zeichen für ein gerades, die untern für ein ungerades f; wie daraus erhellt, weil für $f = 2$; das Zeichen — iſt, und die Zeichen allemahl abwechſeln. Wenn man alſo nach der Ordnung 1; 2; 3; u. ſ. w. ſtatt f; und $\frac{p}{q}$ ſtatt z ſetzt, ſo geben ſich die Coefficienten auſer dem erſten A den die Hauptgleichung beſtimmt, folgendergeſtalt:

$$A = \frac{M}{Z}$$

$$B = -\frac{1}{qdx}.\, d\,\frac{M}{Z}$$

$$C = +\frac{1}{2\,qq\,dx^2}.\, dd\,\frac{M}{Z}$$

$$D = -\frac{1}{6.\,(q\,dx)^3}.\, d^3\,\frac{M}{Z}$$

$$F = \pm\frac{1}{f.\,(f-1).\,.\,.\,.\,2.\,1.\,(qdx)^f}.\, d^f\,\frac{M}{Z}$$

das obere Zeichen für ein gerades, das untere für ein ungerades f. Man ſucht dieſe Coefficienten bis an $f = n - 1$ (368).

Im Exempel 371; iſt $z = x$; $p = 1$; $q = 1$; $n = 2$; $Z = x^4 + x^3$; $\frac{p}{q} = 1$; $\frac{M}{Z}$

=

$= (x^4 + x^3)^{-1}$; $d\frac{M}{Z} = -$ $(x^4 + x^3)^{-2} (4x^3 + 3x^2)\, dx$; alſo $A = \frac{1}{2}$; $B = -1. - \frac{1}{4}. 7$ Nimmt man in eben dem Exempel $p = 0$; $q = -1$; $n = 3$; $Z = 1 - x - x^2 + x^3$ (wie in 371. III) ſo iſt $\frac{M}{Z} =$ $(1 - x - xx + x^3)^{-1}$; $\frac{p}{q} = 0$; $d\frac{M}{Z} =$ $+ (1 - x - xx + x^3)^{-2} (1 + 2x - 3x^2)$. $dx = tudx$ alſo $dd\frac{M}{Z} = (tdu + udt)\, dx$; wo $du = (2 - 6x)\, dx$; $dt = - 2. (1 - x - x^2 + x^3)^{-3} - (1 + 2x - 3x^2). dx$. Für $x = 0$ iſt $t = 1 = u$ und $du = 2dx = dt$; alſo; $A = 1$; $B = + 1$; $C = + \frac{1}{2}. (1. 2 + 2)$ alles wie vorhin (371. III.)

388. Anm Dieſe Art, rationale Functionen durch Logarithmen nach Zerfällung ihres Nenners zu integriren, hat Joh. Bernoulli erfunden, und Act. Er. Lipſ. 1703. Mem. de l'Ac. des Sc. 1702. bekannt gemacht. S. Op. Io. Bern. T. I. n. 70. Hr. Euler aber hat ihren Gebrauch dadurch ſehr erleichtert, daß er die 361; 386; gewieſenen bequemern Arten die Zähler der einfachen Brüche zu finden gelehret hat. S. ſeine Meth. facilior. integr. form. diff. Comm. Ac. Petrop. T. XIIII. p. 99. Introd. in Anal. inf. L. I. §. 41. ſequ. woraus ich das bisherige und auch das folgende genommen habe. Wenn die Gleichung $N = 0$ unmögliche Wurzeln enthält; ſo werden Nenner der einfachen

Brüche, in welche $\frac{M}{N}$ zerfällt wird, unmöglich, und folglich kommen auch in das Integral unmögliche Logarithmen. Man weiß aber ſchon, daß dieſe ſich auf die Quadratur des Kreiſes bringen laſſen; (324) und da die unmögliche Factoren allemahl paarweiſe vorhanden ſind, (Alg. 272.) ſo läßt ſich aus zween allemahl ein Product, wie eine quadratiſche Gleichung machen; welches die Rechnung noch verkürzt, und jetzo ſoll gewieſen werden.

Erfindung der dreytheilichten Factore.

389. Aufg. Wenn $pp - 2Qz + qqzz$ zweene unmögliche Factoren haben ſoll, deren jeder in einem Theile z im andern unveränderliche Gröſſen enthält, zu finden, was man zu dieſer Abſicht für einen Werth von Q annehmen muß.

Aufl. Dieſer Ausdruck = o geſetzt, giebt $z = \frac{Q \pm \surd(QQ - ppqq)}{qq}$ welches unmöglich wird, wenn $Q < pq$; Nun iſt jeder Sinus oder Coſinus kleiner als der Sinus totus = 1; und für alle mögliche Bogen von o an, bekommen die Sinus alle mögliche Werthe von o bis 1. Man nenne alſo ϕ einen Winkel und ſetze $Q = pq. \cos\phi$ ſo iſt allemahl Q kleiner als pq. Weil nun $QQ - ppqq = ppqq.(\cos\phi^2 - 1)$ ſo iſt $qz = p(\cos\phi \pm \sin\phi \surd - 1)$ und die beyden unmöglichen Factoren des drey-

thei-

theiliſchten Products $pp - 2pqz.\ \cos\varphi + qqzz$ ſind $qz - p.(\cos\varphi - \sin\varphi\sqrt{-1})$ und $qz - p.(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1})$

390. Aufg. Die ganze Function $\alpha + \beta z + \gamma zz + \delta z^3 \ldots$ in ihre unmögliche Factoren zu zerfällen.

Aufl. I. Man muß zu dieſer Abſicht die Gröſſen p; q; und φ, ſo beſtimmen, daß das dreytheilichte Product (389) ein Factor der Function wird. Denn ſo giebt jede Beſtimmung von p; q; und φ; zweene unmögliche Factoren. (389) Dieſes geſchieht nun, wenn man in die Function einmahl $\frac{p}{q}.(\cos\varphi + \sin\varphi.\sqrt{-1})$ und denn $\frac{p}{q}(\cos\varphi - \sin\varphi.\sqrt{-1})$ ſetzt. Denn ſo giebt jedes dieſer Verfahren eine Gleichung, und man hat alſo zwo Gleichungen, aus denen ſich die angenommenen Gröſſen $\frac{p}{q}$ ſtatt deren ich r ſchreiben will, und φ finden.

II. Aus (337) ſind die erſte; zweyte, dritte, u. ſ. w. Potenzen von z; folgende

für den erſten Factor

$$\frac{p}{q}.(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1})$$

$$\frac{pp}{qq}.(\cos 2\varphi + \sin 2\varphi\sqrt{-1})$$

$\frac{p^3}{q^3}.\cos 3\phi + \sin 3\phi\sqrt{-1})$

u. ſ. w.

Für den zweyten Factor hat der unmögliche Theil nur — vor ſich.

III. Dieſe Werthe alſo ſtatt der Potenzen von z in die Function (I) geſetzt, kömmt folgendes, wo ich e ſtatt $\sqrt{-1}$ ſchreibe.

$$0 = \alpha + \beta r. \begin{cases} +\cos\phi \\ +e\sin\phi. \end{cases} + \gamma rr. \begin{cases} +\cos 2\phi \ldots \\ +e.\sin 2\phi \ldots \end{cases}$$

$$0 = \alpha + \beta r. \begin{cases} +\cos\phi \\ -e.\sin\phi \end{cases} + \gamma rr. \begin{cases} +\cos 2\phi \ldots \\ -e.\sin 2\phi \ldots \end{cases}$$

IIII. Wenn die beyden Gleichungen addirt werden, ſo heben ſich die unmöglichen Theile in ihnen auf, zieht man aber die unterſte von der oberſten ab, ſo heben ſich die möglichen Theile auf, und man kann alles mit 2e dividiren. So entſtehen folgende beyde neue Gleichungen:

$$0 = \alpha + \beta r.\cos\phi + \gamma rr.\cos 2\phi + \delta r^3.\cos 3\phi \ldots .$$

$$0 = + \beta r.\sin\phi + \gamma rr.\sin 2\phi + \delta r^3.\sin 3\phi.$$

Wenn man alſo r und φ aus dieſen beyden Gleichungen beſtimmt, ſo hat man den dreytheilichten Factor, und die beyden unmöglichen.

V. Wie in Alg. 613. wird erwieſen, daß $\cos\phi = \cos(\phi + 2r\pi)$ wenn r eine ganze bejahte Zahl und π den halben Umfang für den Halbmeſ-

meſſer 1; bedeutet. Denn es ſey Alg. 1. Taf. 5 F. der Bogen LM $= \varphi$; ſo gehört ſein Coſinus OE auch zum Bogen LMNHLM $=$ LM $+ 2\pi$; und ſo zu LM $+ 4\pi$ u. ſ. w. Aber Coſ $(\varphi + (2r - 1)\pi) = -\cos\varphi$; (Trig. 3. Erkl. 3. Z.)

VI. Wäre $\varphi = 2r\pi$ wo r auch $= 0$ für $\varphi = 0$ ſeyn kann; ſo wird $\cos\varphi = 1$ und $\sin\varphi = 0$ und ſo für jede ganze bejahte Zahl η; $\cos\eta\varphi = 1$; $\sin\eta.\varphi = 0$. In dieſem Falle werden die beyden unmöglichen Factoren (389) gleich und möglich, jeder nähmlich $= qz - p$; und ihr Product $= (qz - p)^2$. Es folgt aber alsdenn nicht, daß ſich die Function (I) mit dieſem Quadrate dividiren läßt. Denn daß ſie ſich mit dem dreytheilichten Producte (389) dividiren lieſſe, folgte nur daraus, weil man in ſie jeden Factor dieſes Products ſetzen, und dadurch die beyden Gleichungen (III) erhalten konnte, aus denen die beyden (IIII) geſchloſſen wurden, deren eine φ die andere r beſtimmte. In gegenwärtigen Falle nun giebt der (II) gebrauchte Satz auch die Wahrheit $(\cos\varphi)^n = \cos n\varphi$ weil beyde $= 1$ ſind, aber wenn man alſo dieſen $\cos n\varphi$ zweymahl ſtatt z in die Function ſetzet, ſo bekömmt man nicht zwo verſchiedene Gleichungen, ſondern nur eine zweymahl. Man iſt alſo auch nicht berechtiget anzunehmen, daß ein Product aus dieſem einzigen Factor mit ſich ſelbſt in der

Function enthalten iſt, ſondern nur daß er ſelbſt darinnen enthalten iſt.

VII. Für $\phi = (2r + 1)\pi$ iſt coſ $\phi = -1$; ſin $\phi = 0$; und jeder unmögliche Factor verwandelt ſich in den möglichen $p + qz$ der ebenfalls allein zu behalten, und nicht ſein Quadrat zu brauchen iſt.

VIII. Weil Alg. I. T. 5. F. coſ LMNH LM = coſ LMNH; oder coſ $(2\pi + LM)$ = coſ $(2\pi - LM)$ ſo iſt auch (V) coſ $(2r\pi + LM)$ = coſ $(2r\pi - LM)$ oder Bogen, die zuſammen ein Vielfaches des Umkreiſes ausmachen, haben einerley Coſinus.

392. Exempel. $a^n + z^n$ zu zerfällen. Hier ſind die beyden Gleichungen $0 = a^n + r^n$. coſ n ϕ und $0 = r^n$. ſin n ϕ. Die letztere giebt ſin n $\phi = 0$; alſo iſt n ϕ entweder $(2k + 1)\pi$ oder $2k\pi$; wo k eine ganze bejahte Zahl, und π den halben Umfang für den Halbmeſſer 1 bedeutet. In dem erſten Falle iſt coſ n $\phi = -1$ im letzten $= +1$ wie aus Trigon. 3 Erkl. 3. Zuſ. erhellt. Nähme man das letzte, ſo käme $a^n + r^n = 0$ welches bey einem geraden n keinen möglichen Werth für r. und bey einem ungeraden nur einen verneinten gäbe. Man nimmt alſo das erſte; oder $a^n - r^n = 0$ und $r = a$;

oder

oder $p = a$; $q = 1$; $\varphi = \frac{2k+1}{n} . \pi$ und der geſuchte Factor iſt $aa - 2az. \cos \frac{2k+1}{\pi} \pi + zz$. Nun kann man ſtatt k jede ganze bejahte Zahl ſetzen, und ſo bekömmt man verſchiedene Factoren.

Es ſey I) n gerade; und $2k+1$ gröſſer als n; ſo muß es um eine ungerade Zahl gröſſer ſeyn. Dieſe ſey $= rn + 2g + 1$ wo r gerade oder ungerade oder auch $= 0$ ſeyn mag, und $2g+1 < n$ ſeyn muß. So iſt $2k+1 = (1+r) . n + 2g + 1$

und $\frac{2k+1}{n} \pi = (1+r)\pi + \frac{2g+1}{n} \pi$.

und $\cos \frac{2k+1}{n} \pi = \pm \cos \frac{2g+1}{n} \pi$

nachdem $r+1$ gerade oder ungerade iſt. (391; V). Nun muß $g < \frac{1}{2} n - \frac{1}{2}$ ſeyn, alſo iſt der gröſte Werth, den g als eine ganze Zahl haben kann, $= \frac{1}{2} n - 1$ und ſein kleinſter Werth kann $= 0$ ſeyn; alſo hat es $\frac{1}{2} n$ Werthe, und giebt folglich $\frac{1}{2} . n$ Factoren von der Form $aa - 2az. \cos \frac{2g+1}{n} \pi + zz$; Nun kann $a^n + z^n$ nicht mehr als $\frac{1}{2} n$ Factore von dieſer Form haben; weil das Product aus ſo vielen ſchon die Potenz n von z giebt; Folglich darf man für $2k+1$

keine ungeraden Zahlen ſetzen, die gröſſer als die gerade n ſind. Auch würden ſolche Zahlen entweder eben die vorigen Coſinus oder nur ihre entgegengeſetzten geben.

II. n ungerade: Iſt da $2k+1$ gröſſer, ſo kann es um eine ungerade oder um eine gerade Zahl gröſſer ſeyn, als ein Vielfaches von n. Im erſten Falle ſey $2g+1 \lessgtr n$ und $2k+1 = 2rn + 2g + 1$ (denn das Vielfache von n muß gerade ſeyn, daß es mit einen Ungeraden was Ungerades ausmacht,) alſo $\frac{2k+1}{n}\pi$ $= 2r\pi + \frac{2g+1}{n}.\pi$ und $\text{Coſ}\,\frac{2k+1}{n}$ $\pi = \text{coſ}\,\frac{2g+1}{n}\pi$. Es iſt aber $g \lessgtr \frac{n-1}{2}$ alſo der gröſte Werth von g als einer ganzen Zahl; $= \frac{n-1}{2} - 1$; der kleinſte 0; alſo giebt es $\frac{n-1}{2}$ Werthe für g, oder ſo viel dreytheilichte Factoren, die zuſammen $n-1$ zweytheilichte unmögliche enthalten, dazu kömmt noch der zweytheilichte mögliche $a+z$ für $2k+1 = n$ (391. VII;)

Im zweyten Falle iſt $2k+1 = (2r+1)\,n +$ 2g

$2g$ alſo $\frac{2k+1}{n}\pi = (2r+1)\pi + \frac{2g}{n}\pi$

und $Coſ \frac{2k+1}{n}\pi = - Coſ \frac{2g}{n}\pi$. Hier iſt von $2g$ der größte Werth $n - 1$ alſo von g; $\frac{n-1}{2}$; ſo viel verſchiedene Werthe hat alſo g; weil es nicht $= 0$ ſeyn kann; dieſes gibt ſoviel dreytheilichte Factoren; und dazu noch den zweytheilichten $a + z$ für $2k + = n$. Alſo darf man hier ſtatt k nur alle Werthe von 0 bis $\frac{n-1}{2}$ ſetzen; und bekömmt dadurch $\frac{n-1}{2}$ dreytheilichte und einen zweytheilichten Factor.

393. Für gerade n; I) $n = 2$; da kann k nichts anders als $= 0$ ſeyn (392; I) alſo giebt es den einzigen Factor $aa + zz$ weil $\frac{2k+1}{n} = \frac{1}{2}$ und $Coſ \frac{1}{2}\pi = 0$. II) $n = 4$; die Werthe von k; 0; 1; alſo die Factoren $aa - 2az. coſ \frac{1}{4}\pi + zz$; $aa - 2az. coſ \frac{3}{4}\pi + zz$. III) $n = 6$; die Werthe von $g = 0$; 1; 2; alſo die Factoren $aa - 2az. coſ \frac{1}{6}\pi + zz$; $a^2 - 2az. coſ \frac{3}{6}\pi + z^2$; $aa - 2az. coſ \frac{5}{6}\pi + zz$.

394. Für

394. Für ungerade n; I) $n = 1$; kann offenbahr keinen dreytheilichten Factor geben. II) $n = 3$; die Werthe von k; (392. II;) 0; 1; Factoren $aa - 2az. \cos \frac{1}{3} \pi + zz$ und $a + z$. III) $n = 5$; Werthe von k; 0; 1; 2; Factoren $aa - 2az. \cos \frac{1}{5} \pi + zz$; $aa - 2az. \cos \frac{3}{5} \pi + zz$; $a + z$.

395. Zweytes Exempel. Für $a^n - z^n$ giebt eben das Verfahren (392) ſin $n\phi = 0$ alſo $n\phi$ = nun nicht $(2k+1)\pi$ ſondern $2k\pi$ damit coſ $n\phi = +1$ und $a^n - r^n = 0$ und wieder $r = a$ wird. So iſt der Factor $aa - 2az. \cos \frac{2k}{n} \pi + zz$; wo man ſtatt 2k alle gerade Zahlen, die nicht gröſſer als n ſind, ſetzen darf. Für $k = 0$ kömmt der Factor $a - z$. Iſt n gerade, ſo giebt $2k = n$ den Factor $a + z$.

396. Anm. Dieſes (392...395) ſtimmt mit den Sätzen Alg. 237 ... 247 überein. So ſind in 395; für $n = 3$; die Werthe von k; 0 und 1; alſo die beyden Factoren $a - z$ und $aa - 2az. \cos \frac{2}{3} + \pi zz$. Es iſt aber $\frac{2}{3}\pi = 120$ Gr.; alſo $\cos \frac{2}{3} \pi = - \cos$ 60 Gr. $= - \frac{1}{2}$ und der zweyte Factor wird $aa + az + zz$; alles vollkommen wie in 240; wenn man ſtatt des dortigen y; f; hier a; z; ſetzet. Mehr Exempel und Anwendungen der Aufgabe 389; findet man beym Euler Introd. L. I. cap. 9.

Anwen=

Anwendung dieſer Lehren auf die Integrationen.

397. Aufg. Wenn man die dreytheilichten Factore des Nenners von $\frac{Mdx}{N}$ hat; die Integration dieſer Formel zu bewerkſtelligen.

Aufl. I. Es ſey ein ſolcher dreytheilichter Factor nach 389; $pp - 2pqx. \cos\varphi + qqxx$; dieſer in ſeine einfachen zerfällt, giebt folgende beyde Theile des Integrals.

$$+ \int \frac{Adx}{qx - p. (\cos\varphi + \sqrt{-1}. \sin\varphi)}$$

$$+ \int \frac{Bdx}{qx - p. (\cos\varphi - \sqrt{-1}. \sin\varphi)}$$

II) Die beſtändigen Gröſſen der Zähler muß man nach 386. beſtimmen. Es ſey alſo überhaupt $\frac{dN}{dx} = L$ auch $\frac{p}{q} = r$ ſo giebt $\frac{M}{L}$ die Gröſſe A, wenn man darinnen $r. (\cos\varphi + \sqrt{-1} \sin\varphi)$ und die Gröſſe B wenn man darinnen $r. (\cos\varphi - \sqrt{-1}. \sin\varphi)$ ſtatt x ſetzt.

III) Ein unbeſtimmtes Glied von M oder von L heiſſe ηx^k; ſo verwandelt ſich dieſes, wenn man darinnen (337) $r^k. (\cos k\varphi \pm \sqrt{-1} \sin k\varphi)$ ſtatt x^k oder $r (\cos\varphi \pm \sqrt{-1}. \sin\varphi)^k$ ſetzt,

in η.

in $\eta . r^{k} \cos k \phi \pm \eta . r^{k} \sqrt{-1} . \sin \phi$. Jedes Glied dieſer Gröſſen giebt alſo einen möglichen und einen unmöglichen Theil, und ſo verwandelt ſich jede der beyden Gröſſen, L; M; in eine, die aus zwey Stücken, einem möglichen und einem unmöglichen beſteht. Jenes kömmt heraus, wenn man überall $r^{k} \cos k \phi$; und dieſes, wenn man überall $r^{k} \sqrt{-1} . \sin k \phi$ ſtatt x^{k} ſetzt. Man ſetze, jene möglichen heiſſen $\mathfrak{M}$; $\mathfrak{L}$; und dieſe unmöglichen $m \sqrt{-1}$; $l \sqrt{-1}$ Weil nun das obere Zeichen für A, das untere für B gilt (II) ſo iſt $A = \dfrac{\mathfrak{M} + m \sqrt{-1}}{\mathfrak{L} + l \sqrt{-1}}$ und $B = \dfrac{\mathfrak{M} - m \sqrt{-1}}{\mathfrak{L} - l \sqrt{-1}}$

IIII) Nun geben die beyden Theile des Integrals (I) zuſammen gerechnet

$$\int \frac{\left.\begin{matrix} A \\ + B \end{matrix}\right] . (qx - p . \cos \phi) \left.\begin{matrix} + A \\ - B \end{matrix}\right] . p . \sin \phi \sqrt{-1}}{qqxx - 2pqx . \cos \phi + pp} dx$$

V) Des Zählers erſter Theil giebt ſogleich das Integral $\dfrac{A + B}{2q} . l (qqxx - 2pqx . \cos \phi + pp)$ (218)

VI)

VI) Der zweyte Theil (A—B). $p \sqrt{-}\sin\varphi$

$$\frac{dx}{qqxx - 2pqx.\cos\varphi + pp}$$ wird offenbahr ein Element eines Bogens von einen Kreiſe ſeyn, wenn er ſich folgendergeſtalt $\frac{du}{uu+1}$ ausdrücken läßt. (299) Dieſes zu bewerkſtelligen, ſchaffe man wie Alg. 282 das zweyte Glied des Nenners weg. Es ſey $qx = u + p.\cos\varphi$ alſo $dx = du : q$; und

$$\frac{dx}{qqxx - 2p.\cos\varphi\ qx + pp} =$$

$$\frac{du : q}{uu + pp.\sin\varphi^2} = \frac{1}{qp.\sin\varphi} . \frac{du : p.\sin\varphi}{\frac{uu}{pp.\sin\varphi^2} + 1}$$ davon das Integral =

$$\frac{1}{qp.\sin\varphi} . \text{Arc tang} \frac{u}{p.\sin\varphi} = \frac{1}{qp.\sin\varphi}$$

$$\text{Arc tang} \frac{qx - p.\cos\varphi}{p.\sin\varphi}.$$ Folglich iſt das Integral des zweyten Theils (A–B). $p.\sqrt{-1}.\sin\varphi.$

$$\frac{1}{qp.\sin\varphi} . \text{Arc tang} \frac{qx - p.\cos\varphi}{p.\sin\varphi}$$
+ Conſt.

VII) Für x = o giebt dieſes Integral den Bogen Arc tang $-\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$ = Arc (− tang φ) = 180 Gr. −− φ. Soll alſo das Integral für x = o verſchwinden, ſo ſetze man, nachdem der Kürze wegen ein Buchſtabe Q ſtatt des Coefficienten iſt geſchrieben worden; das Integral Q. (Arc tang $\frac{qx - p.\cos\varphi}{p.\sin\varphi}$ — Arc tang — $\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$). Die Tangente des Unterſchiedes dieſer Bogen iſt nach Trig. 19. S. 4. Z.

$$\left(\frac{qx - p.\cos\varphi}{p.\sin\varphi} + \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\right) :$$

$$\left(\frac{p.\cos\varphi - qx}{p.\sin\varphi} \cdot \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} + 1\right) \text{ oder}$$

$$\frac{qx.\sin\varphi}{p - qx.\cos\varphi}.$$

VIII) Nun iſt $A + B = \frac{2.(\mathfrak{L}\,\mathfrak{M} + \mathfrak{l}\,m)}{\mathfrak{L}\mathfrak{L} + \mathfrak{l}\mathfrak{l}}$

und $A - B = 2.\frac{(\mathfrak{L}\,m - \mathfrak{l}\,\mathfrak{M})}{\mathfrak{L}\mathfrak{L} + \mathfrak{l}\mathfrak{l}}.\sqrt{-1}$

alſo das völlige Integral V; VII; VIII;

$$\frac{(\mathfrak{L}.\mathfrak{M} + \mathfrak{l}.m)}{(\mathfrak{L}\mathfrak{L} + \mathfrak{l}\mathfrak{l}).q} \cdot \quad l(qqxx - 2pqx.\cos\varphi + pp)$$

+

$$+\frac{2\,(l\mathfrak{M} - \mathfrak{L}m)}{(\mathfrak{L}\mathfrak{L} + ll).\,q}\ \text{Arc tang}\ \frac{qx.\,\sin\phi}{p - qx.\,\cos\phi}$$

welches ſich für $x = 0$ in $\frac{\mathfrak{L}\mathfrak{M} + lm}{(\mathfrak{L}\mathfrak{L} + ll).\,q} \cdot 2lp$ verwandelt. Dieſe Gröſſe muß alſo noch als Conſt abgezogen werden, wenn das Integral für $x = 0$ verſchwinden ſoll.

VIIII) Dieſe Coefficienten werden ſo beſtimmt:

$$\left.\begin{matrix} M = \mathfrak{M} \\ L = \mathfrak{L} \end{matrix}\right\}\ \text{für}\ x^k = r^k.\ \cos k.\ \phi$$

$$\left.\begin{matrix} M = m \\ L + l \end{matrix}\right\}\ \text{für}\ x^k = r^k.\ \sin k.\ \phi$$

wo $L = \frac{dN}{dx}$ und $r = \frac{p}{q}$ (III)

X. Aus Trig. 19. S. kann man auf die Vermuthung gerathen, daß ſich die Coefficienten durch Sinus von Winkeln ausdrücken laſſen. Es heiſſen zweene gewiſſe Winkel λ; μ und es ſey

$$\frac{\mathfrak{L}}{\sqrt{(\mathfrak{L}\mathfrak{L}+ll)}} = \cos\lambda;\ \frac{l}{\sqrt{(\mathfrak{L}\mathfrak{L}+ll)}} = \sin\lambda$$

$$\frac{\mathfrak{M}}{\sqrt{(\mathfrak{M}\mathfrak{M}+mm)}} = \cos\mu;\ \frac{m}{\sqrt{(\mathfrak{M}\mathfrak{M}+mm)}}$$

$= \sin\mu$ Ferner ſey $\frac{\sqrt{(\mathfrak{M}\mathfrak{M}+mm)}}{\sqrt{(\mathfrak{L}\mathfrak{L}+ll)}} = \mathfrak{K}$ ſo

iſt $\sin(\lambda - \mu) = \frac{l\mathfrak{M} - m\mathfrak{L}}{\sqrt{(\mathfrak{L}\mathfrak{L}+ll)}.\ \sqrt{(\mathfrak{M}\mathfrak{M}+mm)}}$

$$\operatorname{coſ}(\lambda-\mu) = \frac{\mathfrak{L}\mathfrak{M} + \mathfrak{l}m}{\sqrt{(\mathfrak{L}\mathfrak{L} + \mathfrak{l}\mathfrak{l})}\ \sqrt{(\mathfrak{M}\mathfrak{M} + mm)}}$$

Die Winkel λ; μ; aber ſind durch die gegebenen Gröſſen gegeben.

XI. Alſo iſt das Integral (VIII) nur die Coefficienten einfacher ausgedruckt

$$\frac{\mathfrak{K}.\ \operatorname{coſ}(\lambda-\mu)}{q}.\ l\,(qqxx - 2pq.\ \operatorname{coſ}\phi.\ x + pp) + \frac{2.\ \mathfrak{K}.\ \sin(\lambda-\mu)}{q}.\ \text{Arc tang}\ \frac{qx.\ \sin\phi}{p - qx.\ \operatorname{coſ}\phi}$$

398. I. Aufg. $\frac{x^m dx}{\alpha + x^n}$ zu integriren; wo m eine bejahte Zahl, und kleiner als n (357) iſt.

Aufl. Hier iſt $M = x^m$; $\frac{dN}{dx} = nx^{n-1} = L$ und der allgemeine Factor des Nenners aus 392; $\sqrt[n]{\alpha\alpha} - 2x.\operatorname{coſ}\frac{2k+1}{n}\pi.\ \sqrt[n]{\alpha} + xx$; alſo $p = \sqrt[n]{\alpha} = r$ weil $q = 1$; $\phi = \frac{2k+1}{n}\pi$; Folglich $\mathfrak{M} = r^m.\operatorname{coſ} m\phi$; $m = r^m.\ \sin m.\ \phi$; $\mathfrak{L} = n.\ r^{n-1}.\ \operatorname{coſ}(n-1)\phi$; $\mathfrak{l} = n.\ r^{n-1}.$ ſin

$\sin (n - 1). \phi$; $\surd (\mathfrak{M}\mathfrak{M} + mm) = r^m$;

$\surd (\mathfrak{L}\mathfrak{L} + ll) = n. r^{n-1}$; Alſo $\mathfrak{K} = \frac{1}{n. r^{n-m-1}}$

$= \frac{r^{m+1}}{n \alpha}$. Ferner $\cos \lambda = \cos (n - 1) \phi$;

$\cos \mu = \cos m. \phi$ alſo $\lambda - \mu = (n - 1 - m). \phi$. Folglich giebt jeder dreytheilichte Factor des Nenners folgendes Integral

$$\frac{\cos \frac{n - m - 1}{n} (2k + 1). \pi}{n \alpha^{(n - m - 1) : n}} . l(\sqrt[n]{\alpha\alpha}$$

$$- 2x. \sqrt[n]{\alpha}. \cos. \frac{2k + 1}{n}. \pi + xx)$$

$$+ 2. \frac{\sin \frac{n - m - 1}{n}. (2k + 1). \pi}{n. \alpha^{(n - m - 1) : n}}.$$

$$A \tang \frac{x. \sin (2k + 1). \pi : n}{\sqrt[n]{\alpha} - x. \cos (2k + 1). \pi : n}$$

Hier bekömmt man alſo alle Integrale, wenn man ſtatt $2k + 1$ alle ungerade Zahlen, die kleiner als n ſind, ſetzt. (392) Iſt n ungerade, ſo giebt $2k + 1 = n$ das Integral des zweytheilichten Factors (392; II) Da denn $\sin (2k + 1)$

π : n verſchwindet, und alſo der Theil des Integrals, der auf den Kreis ankam, wegfällt.

II Zuſ. Für $\frac{x^{-m}\,dx}{\alpha + x^n}$ ſetze man $x = 1 : y$; dieſes giebt das Differential $= -\frac{1}{\alpha}$. $\frac{y^{m+n-2}\,dy}{\frac{1}{\alpha} + y^n}$ welches ſich nach 398 integriren läßt, nachdem man die ganze Function (357) daraus abgeſondert hat.

III. Aufg. $\frac{x^m\,dx}{\alpha - x^n}$ zu integriren.

Aufl. $M = x^m$; $\frac{dN}{dx}$ oder $L = -\,n x^{n-1}$ und des Nenners allgemeiner Factor aus (395)
$\sqrt[n]{\alpha\alpha} - 2x.\cos\frac{2k}{n}\pi.\sqrt[n]{\alpha} + xx$ alſo

$$q = 1;\ p = r = \sqrt[n]{\alpha\alpha};\ \varphi = \frac{2k}{n}\pi.$$

Folglich $\mathfrak{M} = r^m.\cos m.\varphi$; $m = r^m.\sin m.\varphi$; $\mathfrak{L} = -\,n r^{n-1}\cos(n-1)\varphi$; $l = -\,n.r^{n-1}\sin(n-1)\varphi$; $\sqrt{(\mathfrak{M}\mathfrak{M} + mm)} = r^m$; $\sqrt{(\mathfrak{L}\mathfrak{L} + ll)} =$

— nr

$-nr^{n-1}$; Daß man das Zeichen – gebrauchen muß erhellt folgendergeſtalt: Für $l=0$ iſt $(n-1)\varphi = 2k\pi$ oder $=(2k+1)\pi$ und $\cos(n-1)\varphi = \pm 1$ das obere Zeichen für den erſten, das untere für den zweyten Fall. (391. V. VI.). Alſo iſt alsdenn mit eben der Zweydeutigkeit $\mathfrak{l} = \mp r^{n-1}$; Aber $\sqrt{(\mathfrak{l}\mathfrak{l}+ll)}$ wird hier $\sqrt{nnr^{2n-2}}.\cos(n-1)\varphi^2$ und alſo ein Product aus ± 1 in einen Factor, deſſen Gröſſe nr^{n-1} iſt, deſſen Zeichen aber — ſeyn muß, damit dieſes Product $\mp nr^{n-1} = \mathfrak{l}$ ſeyn kann. Folglich kömmt

$$\mathfrak{K} = -\frac{1}{n.r^{n-m-1}} = -\frac{1}{n.\alpha^{(n-m-1):n}}$$ und

$\lambda = (n-1)\phi$; $\mu = m\varphi$; $\lambda - \mu = \frac{(n-1-m).2k\pi}{n}$ und $\cos(\lambda-\mu) = \cos\frac{m+1}{n}.2k\pi$ (391. VIII.) alſo giebt jeder dreytheilichte Factor, das Integral

$$\frac{-\cos\frac{(m+1).2k\pi}{n}}{n\alpha^{(n-m-1):n}}.\,l\left(\sqrt[n]{\alpha\alpha} - 2x\sqrt[n]{\alpha}.\cos\frac{2k}{n}\pi + xx\right)$$

$$\frac{-2.\sin\frac{m+1}{n}.2k\pi}{n\alpha^{(n-m-1):n}}.\text{Arc tang}$$

$$\frac{x.\sin(2k\pi:n)}{\sqrt[n]{\alpha}-x.\cos\pi:n}$$ wo man ſtatt 2k alle gerade Zahlen von o an (352) ſetzt, die kleiner als n ſind (395) 2k = o giebt den Factor $\sqrt[n]{\alpha}-x$ (395) alſo das Integral $\frac{-1}{n\alpha^{(n-m-1):n}}$. $l(\sqrt[n]{\alpha}-x)$ Iſt n gerade, ſo giebt 2k = n das Integral aus dem zweytheilichten Factor und wegen $\sin\frac{2k}{n}.\pi = o$ fällt der Theil, der auf den Kreis ankömmt, weg. Aber ſtatt des alsdenn herauskommenden $\sqrt[n]{\alpha\alpha}+2x.\sqrt[n]{\alpha}+xx$ ſchreibe man nur (395) $\sqrt[n]{\alpha}+x$; alſo iſt dieſes Integral

$$\frac{-\cos(m+1)\pi}{n\alpha^{(n-m-1):n}}.l(\sqrt[n]{\alpha}+x)$$

IIII. Zuſ. $x^{-m}dx:(\alpha-x^n)$ wird wie in 399; auf $+\frac{1}{\alpha}.\frac{y^{m+n-2}dy}{\frac{1}{\alpha}-y^n}$ gebracht.

V. Anm. Die Integration des Differentials, da der Nenner $\alpha + \beta x^{n} + \gamma x^{2n}$ iſt, findet man beym Euler Comm. Petrop. T. XIIII. (338).

VI. Aus dem bisherigen erhellt, daß ſich rationale Differentiale integriren laſſen, wenn man bey gebrochnen, die Zerfällung des Nenners in Factore vorausſetzt. Imgleichen, daß das Integral entweder blos durch algebraiſche Gröſſen oder, durch tranſcendentiſche, wie Kreisbogen, und Logarithmen, gegeben iſt. Im erſten Falle heißt man es algebraiſch, im zweyten tranſcendentiſch. Nun wird alſo begreiflich werden warum man irrationale rational zu machen ſucht (261) wovon gegenwärtig einiges folgt.

Ueber die Integrirung der Differentiale die eine zweytheilichte Irrationalgröſſe enthalten.

meiſtens nach Hr. Eulers Inſtit. calc. integr. Vol. I. Sect. I. cap. II.

399. Aufg. Die Umſtände zu beſtimmen unter denen ſich das Differential (248) rational machen läßt.

Aufl. I. Dieſes findet nach 248 (III) ſtatt wenn $\frac{m+1}{n}$ eine bejahte ganze Zahl iſt.

II. Aber auch wenn eben daſſelbe eine verneinte ganze Zahl iſt; da verwandelt ſich der Ausdruck

druck in $\frac{z^p\, dz}{(z-a)^{1-\frac{(m+1)}{n}} .\, nb^{\frac{m+1}{n}}}$

wo die Potenz der veränderlichen Gröſſe im Diviſor, einen ganzen bejahten Exponenten hat.

III. Um deutlicher auszudrucken, daß p ein Bruch ſeyn ſoll, ſetze man es $=\frac{\mu}{\nu}$ und

$(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}} = x^{\frac{n\mu}{\nu}} z^{\mu}$; dieſes giebt $x=$

$\frac{a^{\frac{1}{n}}}{(z^{\nu}-b)^{\frac{1}{n}}}$, und das Differential (248) verwandelt ſich in

$$\frac{-\ \nu .\ {an}^{\frac{m+1}{n}+\frac{\mu}{\nu}} .\ z^{\mu+\nu-1}\, dz}{n(z^{\nu}-b)^{\frac{m+1}{n}+\frac{\mu}{\nu}+1}}$$

welches alſo rational iſt, wenn $\frac{m+1}{n}+\frac{\mu}{\nu}$ eine ganze Zahl iſt.

IIII.

IIII. Ein paar eigentliche Brüche, deren jeder in ſeinen kleinſten Zahlen ausgedruckt iſt, machen zuſammen nicht 1 aus, wenn ſie nicht einerley Nenner haben; Hievon kann man ſich leicht überzeugen. Sie machen aber auch gewiß zuſammen nicht 2 aus; alſo überhaupt keine ganze Zahl.

Wenn ein paar uneigentliche Brüche, ebenfalls jeder in ſeinen kleinſten Zahlen ausgedruckt ſind, ſo beſteht jeder aus einer ganzen Zahl und einem eigentlichen Bruche der ſich nicht aufheben läßt. Beyder Summe alſo, iſt die Summe von zwo ganzen Zahlen, und zween eigentlichen Brüchen wie vorhin betrachtet wurden; alſo keine ganze Zahl.

V. Alſo iſt das Differential (III) nicht anders rational als wenn $n = v$ und noch dazu $m + 1 + \mu$ ein vielfaches davon iſt.

VI. Solchergeſtalt läßt ſich das Differential (248) rational machen, wenn entweder I, II; oder III ſtatt findet. Das iſt nicht ſo zu verſtehn, daß das Differential wenn es durch eine der erſten Arten rational wird auch durch die zweyte rational wird. Z. E. das in 250; wo $n = 1$; $\mu = 1$; $v = 2$; bekäme hier nach III keinen rationalen Ausdruck.

VII. Wenn n, α, β, ganze Zahlen ſind, ſo iſt in der Vorausſetzung (III) auch $\frac{m + 1}{n} \pm \alpha$

$n + \frac{\mu}{\nu} \pm \beta$ eine ganze Zahl. Wenn alſo dieſe Vorausſeßung ſtatt findet, ſo läßt ſich auch

$x^{m \pm \alpha n} . (a + bx^n)^{\frac{\mu}{\nu} \pm \beta} . dx$ rational machen.

VIII. Man betrachte alſo nur

$x^m . (a + bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}} dx$ wo $m \lessgtr n$; $\mu \lessgtr \nu$

wenn ſich dieſes nach (III) rational machen läßt, ſo läßt ſich auch das Differential in (VII) rational machen.

VIIII. Läßt ſich nun das Differential (VIII) rational machen, ſo muß es erſtlich ſo ausſehen:

$x^m . (a + bx^n)^{\frac{\mu}{n}} dx$, zweytens muß $m + 1 + \mu = n$ ſeyn. Es läßt ſich alſo folgendergeſtalt ausdrücken

$x^{n - \mu - 1} . (a + bx^n)^{\frac{\mu}{n}} dx$ wo $\mu \lessgtr n$; und ſich daraus noch andere Differentiale rational machen laſſen (VII)

X. Exempel. Es ſey $n = 3$; die Formel $x^{2 - \mu} . (a + bx^3)^{\frac{\mu}{3}} dx$ begreift alsdenn fol-

gen-

gende unter ſich, nach dem man $\mu = 2$ oder $= 1$ ſetzt

$(a + bx^3)^{\frac{2}{3}} dx$; $(a + bx^3)^{\frac{1}{3}} x dx$

XI. Nach Hr. Eulers Urtheile a. a. O. 110 §. läßt ſich das Differential (248) auf keine andere Arten als auf die angeführten rational machen. Aber auch alsdenn, wenn dieſes nicht angeht iſt es vortheilhaft, die Integration anderer Differentiale, wo möglich auf dieſes Integration zu bringen, weil man alsdenn, wenn man dieſes auf irgend einer Art integrirt hätte, auch die andern integrirt wären.

400. Aufg. $\int x^{m+n} (a + bx^n)^p dx$ auf $\int x^m . (a + bx^n)^p dx$ zu bringen.

Aufl. I. Man ſetze $a + bx^n = u$ alſo $nbx^{n-1} = du$. Nun betrachte man $x^{m+1} . u^{p+1}$; davon iſt das Differential $(p + 1). nbx^{m+n} u^p dx + (m + 1). u^{p+1}. x^m dx$. Weil im letzten Theile $u^{p+1} = u^p. (a + bx^n)$, ſo verwandelt ſich das Differential von $x^{m+1} . u^{p+1}$ in $(np + n + m + 1). bx^{m+n} . u^p dx + (m + 1) au^p x^m dx$; Folglich dieſer beyden Differentiale, ihre Integrale zuſammen $x^{m+1} u^{p+1}$ und wenn man hieraus das Inte-

te-

tegral von $x^{m+n} u^p dx$ ſucht, ſo findet ſich

$$\int x^{m+n} u^p dx = \frac{x^{m+1} . u^{p+1}}{(np+m+n+1)b}$$

$$- \frac{(m+1).a}{(np+m+n+1)b} . \int x^m u^p dx$$

II. Zuſ. Es iſt auch

$$\int x^m u^p dx = \frac{x^{m+1} u^{p+1}}{(m+1)a} - \frac{(np+m+n+1)b}{(m+1)a}$$

$$\int x^{m+n} u^p dx$$

Weil nun m ganz willkührlich und durch die übrigen Gröſſen gar nicht beſtimmt iſt, ſo ſchreibe man $m - n$ ſtatt m; dieſes giebt

$$\int x^{m-n} u^p dx = \frac{x^{m+1-n} . u^p}{(m+1)a}$$

$$- \frac{(np+m+1)b}{(m+1-n.)a} \int x^m u^p dx$$

III. In I ſchreibe man $m + n$ ſtatt m; ſo hat man $\int x^{m+2n} . u^p dx$ durch $\int x^{m+n} u^p dx$ und folglich durch $\int x^m u^p dx$; und eben ſo wenn man nach und nach $m + 2n$; $m + 3n$; u. ſ. w. ſtatt m ſchreibt, überhaupt

$\int x^{m \pm \alpha n} . u^p dx$ durch $\int x^m . u^p dx$;

Die

Die Integrale wo der Exponent $m - \alpha n$ iſt, folgen eben ſo aus II.

401. Aufg. $\int x^m . u^{p+1} dx$ auf $\int x^m . u^p dx$ zu bringen.

Aufl. I. aus 400; I; iſt wie daſelbſt gleich im Anfange

$$d(x^{m+1} . u^{p+1}) = (m+1) . x^m . u^{p+1} dx + nb . (p+1) . x^{m+n} . u^p dx$$ daraus folgt

$$\int x^m u^{p+1} dx = \frac{x^{m+1} . u^{p+1}}{m+1} - \frac{nb . (p+1)}{m+1} \int x^{m+n} . u^p dx$$

Setzt man nun hier ſtatt $\int x^{m+n} u^p dx$ ſeinen Werth aus 400; I; ſo kömmt

$$\int x^m . u^{p+1} dx = \frac{x^{m+1} . u^{p+1}}{np+m+n+1} + \frac{n . (p+1) a}{n . (p+1)+m+1} . \int x^m u^p dx$$

II. Weil $p = \frac{\mu}{\nu}$ ſo folgt, dieſen Werth im Exponenten ſtatt p geſetzt, und das Integral geſucht das ſich hier im zweyten Gliede auf der rechten Hand befindet

$$\int x^m . u^{\mu : \nu} . dx = - \frac{\nu . x^{m+1} u^{1+\mu : \nu}}{n . (\mu+\nu) . a}$$

+n

$$+\frac{n(\mu+\nu)+(m+1)\nu}{n.(\mu+\nu).a}\int x^{m} u^{1+\mu:\nu} dx$$

III. Weil nun wiederum hier μ durch die übrigen Gröſſen gar nicht beſtimmt wird, ſo ſchreibe man $\mu - \nu$ ſtatt μ; und der Ausdruck (II) verwandelt ſich in

$$\int x^{m} . u^{-1+\mu:\nu} dx = -\frac{\nu . x^{m+1} . u^{\mu:\nu}}{n\mu a}$$

$$+\frac{n\mu+(m+1)\nu}{n\mu a}\int x^{m} u^{\mu:\nu} dx$$

Und ſo hat man nach einem Verfahren wie in 400; III; durch $\int x^{m} u^{p} dx$ auch die Integrale von $x^{m} u^{p\pm\beta} dx$

IIII. Imgleichen 400; III; und 401; III zuſammen genommen, durch eben das Integral, die Integrale von $x^{m\pm\alpha n} . u^{p\pm\beta}$

402. Exempel Die Integrale von $\frac{x^{m} dx}{\surd(1-x^{2})}$ zu finden, wo m jede bejahte ganze Zahl ſeyn mag.

Aufl. I. In 400; I. iſt

	a	b	μ	ν	p	n
hier	1	-1	-1	$+2$	$-\frac{1}{2}$	2

alſo giebt die dortige Formel, hier

x^{m}

$$\int \frac{x^{m+2}}{\surd(1-x^2)}dx = -x^{m+1}\frac{\surd(1-x^2)}{m+2}$$

$$+\frac{m+1}{m+1}\int\frac{x^m}{\surd(1-x^2)}dx$$

II. Wenn m ungerade ſeyn ſoll, ſo ſetze man zuerſt $m = 1$; Nun iſt $\int\frac{xdx}{\surd(1-x^2)}$ $= (1 - \surd(1-x^2))$ wenn es für $x = 0$ verſchwindet. Solchergeſtalt iſt

$$\int\frac{x^3\,dx}{\surd(1-x^2)} = \frac{-x^2(\surd(1-x^2)}{3} - \frac{2}{3}$$

$\surd(1-x^2) + \frac{2}{3}$ wie in 253; II. Ex. Dieſe algebraiſchen Integrale ſind nähmlich ſchon dorten gefunden worden.

III. Iſt m gerade, ſo iſt ſein kleinſter Werth $= 0$; und $\int\frac{dx}{\surd(1-x^2)} = \mathfrak{B}\sin x$ (281)

Alſo $\int\frac{x^2\,dx}{\surd(1-x^2)} = -\frac{x\surd(1-x^2)}{2}$

$+\frac{1}{2}\mathfrak{B}\sin x$

Setzt man nun $m = 2$ ſo wird

$$\int\frac{x^4\,dx}{\surd(1-x^2)} = \frac{-x^3\surd(1-x^2)}{3}$$

$$+\frac{3}{3}\int\frac{x^2\,dx}{\surd(1-x^2)}$$

=-

$$= -\left(\tfrac{1}{4}x^3 + \frac{1.3}{2.4}x\right)\surd(1-x^2)$$

$$+ \frac{1.3}{2.4}.\,\mathfrak{B}\sin x$$

und ſo kann man dieſe Integrale weiter fortſetzen.

403. Exempel Die Integrale von $\int \frac{x^m dx}{\surd(1-x^2)}$ zu finden, wenn m jede ganze verneinte Zahl bedeutet.

Aufl. I. Weil eine negative Zahl, um was poſitives vermehrt, der o näher kömmt, oder eine kleinere negative Zahl iſt, ſo bedienet man ſich hier des erſten Ausdrucks in 400; II; es iſt

daſelbſt	p	a	n	b
hier	$-\frac{1}{2}$	1	2	-1

und der Ausdruck wird hier:

$$\int\frac{x^m dx}{\surd(1-x^2)} = \frac{x^{m+1}.\surd(1-x^2)}{m+1} + \frac{m+2}{m+1}\int\frac{x^{m+2}.dx}{\surd(1-x^2)}$$

II. Für m = o käme was 402; III; gefunden worden. Für m = − 1 würden die Coefficienten rechter Hand, unendlich, weil nun dieſes anzeigt daß die Integration auf Logarithmen ankömmt (219; I) ſo findet man $\int \frac{dx}{x\surd(1-x^2)}$

fol=

folgendergeſtalt: $d(\sqrt{(1-x^2)}) = -\frac{xdx}{\sqrt{(1-x^2)}}$ alſo iſt das Differential das integrirt werden ſoll $= -\frac{d\sqrt{(1-x^2)}}{x^2}$; ſetzt man alſo $\sqrt{(1-x^2)} = z$; ſo iſt es $= \frac{-dz}{1-z^2}$

Davon iſt das Integral aus (359) ſo genommen daß es für $z = 0$ verſchwindet, $\frac{1}{2}\log\frac{1-z}{1+z}$, und alſo $\int\frac{-d\sqrt{(1-x^2)}}{x^2}$ oder $\int\frac{dx}{x\sqrt{(1-x^2)}}$ ſo genommen daß es für $x = 1$ verſchwindet

$$\tfrac{1}{2}\log\frac{1-\sqrt{(1-x^2)}}{1+\sqrt{(1-x^2)}} = \tfrac{1}{2}\log\frac{x^2}{(1+\sqrt{(1-x^2)})^2}$$

$$= -\log\frac{1+\sqrt{(1-x^2)}}{x}$$

III. Auf dieſes logarithmiſche Integral werden alle gegenwärtigen Integrale gebracht, wo m eine verneinte ungerade Zahl iſt. So iſt für $m = -3$

$$\int\frac{dx}{x^3 dx} = \frac{-\sqrt{(1-x^2)}}{2x^2} + \tfrac{1}{2}\int\frac{dx}{x\sqrt{(1-x^2)}}$$

IIII. Wenn $m = -2$; ſo wird (I)

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{(1-x^2)}} = -\frac{\sqrt{(1-x^2)}}{x}.$$

V. Auf dieſes algebraiſche Integral laſſen ſich alſo alle die bringen, wo m eine verneinte gerade Zahl iſt. So iſt für $m = -4$

$$\int \frac{dx}{x^4 \sqrt{(1-x^2)}} = \frac{-\sqrt{(1-x^2)}}{3x^3}$$

$$+ \frac{2}{3} \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{(1-x^2)}}$$

Dieſe Integrale ſind alſo alle algebraiſch.

404. Man findet dieſer Formeln mehr, und auch allgemeine Geſetze für ſie, die nicht ſchwer zu entdecken ſind beym Euler a. a. O. Irrationalgröſſen die noch mehr zuſammengeſetzt wären, laſſen ſich nicht wohl auf einfachere und rationale Geſtalten bringen, oder wenn dieſes angeht entdeckt ſich die Reduction leicht von ſich ſelbſt.

In der erſten Ausgabe dieſer Analyſis hatte ich an dieſen Stellen die Integration von $x^m . (a + bx^n)^p dx$ ſo vorgetragen, daß ich das Integral durch eine algebraiſche Reihe und einen ſummatoriſchen Theil ausgedrückt. Ich hatte darinnen des Bougainville Traité du calcul integral P. I. ch. V... VIII mit einigen Verbeſſerungen gefolgt. Weil aber gegenwärtiges bequemer und brauchbarer iſt, ſo habe ich demſelben lieber dieſe Stelle einräumen wollen.

Integrirung der Differentialgleichungen, wo die veränderlichen Gröſſen vermengt ſind.

405. Erkl. Wenn in einer Differentialgleichung, wo y; x; mit ihren Differentialen vorkommen, Glieder ſind, die Producte aus einer Function einer veränderlichen Gröſſe in der andern Differential enthalten, ſo heißt die veränderlichen Gröſſen voneinander ſondern (ſeparare indeterminatas;) aus dieſer Gleichung eine andere machen, in deren jedem Gliede, jeder veränderlichen Gröſſe Function nur in ihr Differential multiplicirt wird, oder daß die Gleichung nun ſo ausſieht $Xdx = Ydy$; wo X eine Function von x; Y eine von y iſt.

406. Zuſ. Wenn X; Y rationale Functionen ſind, läßt ſich jeder Theil dieſer Gleichung nach 385; 397; integriren, oder $\int Xdx = \int Ydy$ finden, welches eine Gleichung zwiſchen x und y giebt. Bey irrationalen Functionen, wie 404 muß zuweilen die Integration auf die Quadratur einer krummen Linie gebracht werden.

407. Zuſ. Wenn die Integrale von Xdx und Ydy, beydes zugleich lauter mögliche Logarithmen, oder lauter unmögliche, das iſt, Kreisbogen ſind, ſo giebt ſich zwiſchen x und y eine algebraiſche Gleichung. Wenn ſie aber zum Theil algebraiſch, oder zum Theil mögliche, zum Theil unmögliche Logarithmen ſind, geht ſolches nicht an.

408. Ex. $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{1 - x^2}$ giebt $\log y =$ $\frac{1}{2} \log \frac{1 + x}{1 - x}$ (403; II) wenn $y = 1$ für $x = 0$ ſeyn ſoll. Daraus wird $y = \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}$

409. Ex. $\frac{dx}{1 + xx} = \frac{dy}{\sqrt{(1 - yy)}}$ giebt $\mathfrak{B} \tang x = \mathfrak{B} \sin y$ (299; 281) $= \mathfrak{B} \tang \frac{y}{\sqrt{(1 - yy)}}$; alſo $x = \frac{y}{\sqrt{(1 - yy)}}$ oder $xx. (1 - yy) = yy.$

Befände ſich bey jedem der Exempel (408; 409) noch rechter Hand xdx; ſo würde bey dem erſten $\log y = \frac{1}{2} \log \frac{1 + x}{1 - x} + \frac{1}{2} x^2$ bey dem zweyten $\mathfrak{B} \tang x = \mathfrak{B} \sin y + \frac{1}{2} x^2$ aus deren keinem ſich eine algebraiſche Gleichung machen läßt.

Hätte man aber $\frac{dx}{1 + x^2} = \frac{dy}{1 - y^2}$ ſo käme $\frac{1}{2} \log \frac{1 + y}{1 - y} = \mathfrak{B} \tang x = \frac{\sqrt{-1}}{2} . \log \frac{1 - x\sqrt{-1}}{1 + x\sqrt{-1}}$ (328), wo man zwar die Zeichen der Logarithmen wegbringen könnte, aber eine Po-

tenz deren Exponent unmöglich wäre machen müßte, welches wieder keine algebraiſche Gleichung giebt.

411. Aufg. **Wenn** in einer Gleichung nicht y ſelbſt, ſondern nur deſſelben erſtes Differential, ferner Functionen von x und deſſelben erſtes Differential vorkommen, die veränderlichen Gröſſen von einander zu ſondern.

Aufl. I. Erſter Fall. Wenn ſie nur die erſten Potenzen der Differentiale enthält, ſo muß ſie ſo ausſehen: $Pdx = Qdy$; wo P und Q, Functionen von x allein ſind. Da iſt alſo die Abſonderung der veränderlichen Gröſſen ſogleich geſchehen, weil $\frac{Pdx}{Q} = dy$.

II. Zweyter Fall. Wenn die Differentiale auf höhere Potenzen ſteigen, ſo enthält die Gleichung Producte aus Functionen von x; 1) in Potenzen von dx allein; 2) in Potenzen von dx mit Potenzen von dy multiplicirt; 3) in Potenzen von dy allein; die Exponenten der Differentiale müſſen aber zuſammen allemahl eine Summe ausmachen, weil ſonſten dieſe Producte von verſchiedenen Graden des Unendlich kleinen wären, und alſo nicht zuſammen eine Gleichung geben könnten. Alſo läßt ſich eine ſolche Gleichung folgendergeſtalt vorſtellen:

(☉) $P dx^n + Q dx^{n-\alpha} \cdot dy^\alpha + R dy^n = 0$ da P; Q; R; Functionen von x ſind; α kan andere und andere Werthe bekommen und für jeden Werth bekömmt Q auch einen andern Werth.

Hier ſey nun $dy = u dx$ ſo iſt $P + Qu^\alpha + Ru^n = 0$ alſo u vermittelſt einer algebraiſchen Gleichung durch x gegeben. Folglich kann in der Gleichung $dy = u dx$; u als eine Function von x angeſehen werden, und alſo kann man die veränderlichen Gröſſen als von einander geſondert anſehen. Betrachtet man in der algebraiſchen Gleichung zwiſchen u und x; u als die Wurzel, ſo läßt ſich entweder dieſe Gleichung ſo auflöſen, daß man die verſchiedenen Wurzeln derſelben durch endliche Ausdrückungen findet, wie es allemahl angeht, wenn u nur auf die erſte oder auf die zweyte Potenz ſteigt, oder man kann auch durch das newtoniſche Parallelogramm, ſoviel unendliche Reihen finden, als es Wurzeln giebt. (Alg. 667.). In jedem Falle läßt ſich jede dieſer endlichen Ausdrückungen oder unendlichen Reihe ſtatt u ſetzen, und y wird alsdenn durch die vorhin gelehrten Regeln zu integriren gefunden.

III. Ein leichter Fall hievon iſt, wenn x nur von der erſten Abmeſſung in der Differentialgleichung vorhanden iſt; denn da ſteigt es nur auf eben die Abmeſſung in der algebraiſchen Gleichung zwiſchen x und u und man kann alſo daraus

aus dx nur durch u und du ausgedruckt finden, welcher Werth von dx in udx geſetzt, $dy = udx = Udu$ giebt, wo U eine Function von u iſt, und zwar eine rationale, wenn die algebraiſche Gleichung zwiſchen x und u rational iſt, da denn Udu ſich allemahl nach 385; 397; integriren läßt, wenn es ein rationaler Bruch iſt, oder ohne dieſe Kunſtgriffe, wenn es eine ganze Function iſt.

Ex. $xdx^3 dy - ady^4 - 2ady^2 dx^2 - adx^4 = 0$. Hier iſt in 407; $P = -a = R$; $n = 4$; und nachdem $\alpha = 1$ oder 2; iſt $Q = x$ oder $-2a$. Folglich bedeutet Qu^{α} zwey Glieder xu und $-2auu$; und die algebraiſche Gleichung zwiſchen u und x iſt $-a + xu - 2auu - au^4 = 0$; alſo $x = \frac{a}{u} + 2au + au^3$; und $dx = \left(-\frac{a}{uu} + 2a + 3auu\right) du$; und dy oder $udx = -\frac{adu}{u} + 2audu + 3au^3 du$ alſo $y = -a \log u + auu + \frac{3au^4}{4}$

IIII. So findet man in III. eine Gleichung zwiſchen y und u. Iſt ſolche blos algebraiſch, ſo kann man ſie mit der vorigen algebraiſchen zwiſchen x und u verbinden, und aus beyden eine

zwiſchen y und x machen. (Alg. 199.) Kommen aber Logarithmen hinein, ſo geht dieſes nicht an. Man kann aber aus der algebraiſchen zwiſchen x und u, weil x nur eine Abmeſſung hat, für jedes angenommene u das zugehörige x finden, und wenn man für eben das u das y berechnet, ſo ſieht man, was für x und y zuſammengehören. Alſo nimmt man hier eigentlich nicht x nach Gefallen an, das zugehörige y zu berechnen, ſondern man nimmt u nach Gefallen an, und berechnet daraus zuſammengehörige x und y.

V. Es ſey 20 F. LK die krumme Linie, welche der algebraiſchen Gleichung zwiſchen x und u (III) zugehört, ſo daß CM = x, MK = z = au. Man nehme MN = $\frac{CMKL}{a}$; ſo iſt es = ſudx = y. Dieſes heißt die Differentialgleichung ⊙ durch die Quadratur der krummen Linie CMKL conſtruiren; oder eine krumme Linie NB finden, deren Coordinaten CM = x; MN = y ſind.

Exempel. $a^3 dx^5 - aaxdxdy^4 - x^3 dy^5 = 0$ giebt $n = 5$; $P = a^3$; $\alpha = 1$; $Q = -aax$; $R = -x^3$; alſo $a^3 - a^3 x z^4 - x^3 z^5 = 0$ für die Gleichung der krummen Linie IK; deren Quadratur BN giebt.

412. Aufg. a; b; n ſind unveränderliche Gröſſen, und zwar bedeutet n jede Zahl; p, q, ſind Functionen von x; Man ſoll in der

Glei-

Gleichung $ady = ypdx + by^n qdx$ (H) die veränderlichen Gröſſen von einander ſondern.

Aufl. I. Man ſetze $y = zu$ wo $z; u;$ zwo neue veränderliche Gröſſen ſind. Alſo $dy = zdu + udz$; und wenn man ſtatt $y; dy;$ ihre Werthe ſetzt, verwandelt ſich H in (K) $azdu + audz = zupdx + bz^n u^n qdx$. Weil nun $z; u;$ gar nicht beſtimmt ſind, ſo kann man zu ihrer Beſtimmung zwo neue Gleichungen annehmen; Man ſetze alſo $audz = uzpdx$ (L) folglich auch $azdu = bz^n u^n qdx$ (M). Aus L folgt $\frac{dz}{z} = \frac{pdx}{a}$ oder $lz = \int pdx : a$ oder $z = e^{\int (pdx : a)}$ wenn $le = 1$ (232) alſo wird aus M; $\frac{adu}{u^n} = bz^{n-1} qdx$ (N) wo die veränderlichen Gröſſen von einander geſondert ſind, weil z durch x gegeben iſt. Aus ihr wird das Integral

$$c - \frac{a}{(n-1)u^{n-1}} \text{ oder } c - \frac{az^{n-1}}{(n-1)y^{n-1}}$$

$= b\int z^{n-1} qdx$ (O) wo c die beſtändige Gröſſe bedeutet, die bey der Integration addirt wird.

II) Exempel. $ady = \frac{fydx}{x} + y^n x^m dx$;

 Hier

Hier iſt $p = \frac{f}{x}$; $b = 1$; $q = x^m$; alſo

$$\int \frac{p\,dx}{a} = \frac{f}{a}\, lx = lz \text{ oder } z = x^{f:a}.$$

Daraus kömmt in (O) $\int z^{n-1}\, q\,dx = \frac{1}{\mu}$

$$x^{\mu} = c - \frac{a\,x^{f.(n-1):a}}{(n-1)\,y^{n-1}}, \text{ wo}$$

$$\mu = \frac{f.(n-1) + (m+1)\,a}{a}$$

III) Dieſes Exempel begreift unzähliche einzelne unter ſich. Man ſetze $m = 0$; $n = 2$; ſo wird aus $a\,dy = \frac{f\,y\,dx}{x} + y\,y\,dx$ die Integrale

$$\frac{a}{f+a}\, x^{(f+a):a} = c - \frac{a\,x^{f:a}}{y}.$$

Setzt man hier wieder $f = 2$; $a = 1$; ſo wird von $dy = \frac{2\,y\,dx}{x} + y\,y\,dx$ die Integrale: $y\,x^3 = 3\,c\,y - 3\,xx$.

IIII. Wenn $p = h$ einer beſtändigen Gröſſe und q eine rationale ganze Function von x iſt, ſo läßt ſich $\int z^{n-1}\, q\,dx$ aus 242 finden. Z. E. wenn $h = 1 = a$ und $q = xx + x$ ſo iſt $z = e^x$ und

und $\int z^{n-1}.(xx+x)\,dx = \frac{e^{n-1)x}}{n-1}.$

$$\left\{\begin{matrix} xx - \frac{2x}{n-1} + \frac{2}{(n-1)^2} \\ + x - \frac{1}{n} \end{matrix}\right\}$$

die oberſte Zeile des zweyten Factors kömmt nähmlich heraus, wenn man 2; und die untere, wenn man 1 ſtatt ſ in 242 ſetzt.

Dieſes Product mit b multiplicirt und $= c - az^{n-1} : (n-1).\ y^{n-1}$ geſetzt giebt die Integrale O der Differentialgleichung $dy = ydx + b.\ y^n.(xx+x)\,dx.$

V. Wenn $(\int pdx : a)$ nur durch Logarithmen gegeben iſt, ſo iſt z algebraiſch durch x gegeben und alſo kann $\int z^{n-1}\,qdx$ algebraiſch, und folglich die Gleichung O zwiſchen x und y algebraiſch ſeyn, wie in (II.) Iſt aber $\int(pdx : a)$ ganz, oder zum Theil algebraiſch, ſo findet zwiſchen z und x folglich auch zwiſchen x und y keine algebraiſche Gleichung ſtatt, wie in (IIII).

VI. Wenn $n = 1$ ſcheint die Integrale (I) was unendliches zu enthalten. Aber alsdenn iſt ypdx mit yqdx einerley, weil p ſowohl als q jede Function bedeuten kann. Die Gleichung verwandelt ſich alſo in $a\,dx = ypdx$ deren Integral $a \log y = \int pdx$ iſt.

VII.

VII. Wenn y nicht höher als von der erſten Potenz vorhanden iſt ſo iſt $n = o$ oder

$$c + \frac{ay}{z} = b \int \frac{qdx}{z}$$

VIII. Dieſe Differentialgleichung iſt faſt die einzige etwas allgemeine, wo ſich die veränderlichen Gröſſen von einander ſondern laſſen, ſagt Hr. Euler Inſt. Calc. Int. Vol. I. Sect. 2. Cap. 1. ſonſt kann man ſolches nur in einzelnen Fällen verrichten dergleichen er da ebenfalls anführt. Doch iſt nachfolgendes auch etwas allgemeines.

413. Aufg. Man ſoll die gleichartige Gleichung (Alg. 529)

$$(ax^m + bx^{m-1}. y. \ldots + k y^m dx = o$$

$$+ (px^m + qx^{m-1}. \; y \ldots + \omega y^m \; dy$$ integriren, wo nichts als x und y veränderlich iſt.

Aufl. I. Man ſetze $y = zx$; $dy = zdx + xdz$ wo alſo noch z veränderlich iſt. Alſo

$$(a + bz \ldots + kz^m). \; x^m \; dx$$

$$+ (p + qz \ldots + \omega z^m) \, x^m \, zdx = o$$

$$+ (p + qz + \omega z^m) \; x^{m+1} \, dz$$

II. Alſo

$$-\frac{dx}{x} = \frac{p + qz \ldots + \omega z^m}{a + (b + p) z \ldots + \omega z^{m+1}} . dz$$

Und dieſes auf 385 u. f. zu bringen

$$-\frac{\omega dx}{x} = \frac{p + qz \ldots + \omega z^m}{\frac{a}{\omega} + \frac{b+p}{\omega}z \ldots + z^{m+1}} . dz$$

wo des rationalen Bruchs der in dz multiplicirt iſt, ſein Zähler = M; ſein Nenner = N. Man kann alſo dieſes nach a. O. integriren, und im Integrale $\frac{y}{x}$ ſtatt z ſetzen.

III. Es iſt alſo N = (z – A). (z – B). z – C). .. welche Factoren an der Zahl m + 1 ſeyn werden. Wenn man α, β, γ, . . . die Zähler der m + 1 Brüche heißt die nach (360) herauskommen, ſo iſt

$$\frac{-\omega dx}{x} = \frac{\alpha dz}{z-A} + \frac{\beta dz}{z-B} + \frac{\gamma dz}{z-C} \ldots$$

und

$$\omega . l \frac{Const}{x} = \alpha . \log(z-A) + \beta . \log(z-B) \ldots$$

oder

$$\frac{Const^{\omega}}{x^{\omega}} = \frac{(y-Ax)^{\alpha}}{x^{\alpha}} . \frac{(y-Bx)^{\beta}}{x^{\beta}} \ldots$$

und

$$Const^{\omega} = x^{\omega-\alpha-\beta\ldots} . (y-Ax)^{\alpha} . (y-Bx)^{\beta} \ldots$$

IIII.

IIII. Exempel. $m = 1$; oder

$$(ax + ky)\,dx + (px + \omega y)\,dy = 0$$

$$M = p + \omega z;\; N \frac{a}{\omega} + \frac{k + pz}{\omega} + z^2$$

Wenn man $N = 0$ ſetzt, und die alsdenn herauskommende quadratiſche Gleichung auflöſet, ſo erhält man

$$z = \frac{-(k + p) \pm Q}{2\omega}$$

wo $Q = \sqrt{((k + p)^2 - 4a\omega)}$

Alſo ſind die beyden Factore, in die ſich N zerfällen läßt

$$z + \frac{k + p - Q}{2\omega} = z - A$$

$$z \frac{+ k + p + Q}{2\omega} = z - B$$

Daher iſt

in 361	p	q	S	A
hier	$-A$	-1	$z - B$	α

und hernach

361	p	q	S	A
hier	$-B$	-1	$z - A$	β

Daraus findet ſich nach dortigem Verfahren

$$\alpha = \frac{p + \omega . A}{A - B};\; \beta = \frac{-p - \omega B}{A - B}$$

und $\alpha + \beta = \omega$

Daher in III;

Conſt$^{\omega}$

$$Const^{\omega} = (y - Ax)^{\alpha} . (y - Bx)^{\beta}$$

wo A, B, α, β, durch die beſtändigen Gröſſen gegeben ſind.

V. In (I) ſetze man dz = o ſo kömmt

$$\begin{matrix} a + bz \ldots + kz^m \\ + p \qquad\qquad + \omega z^{m+1} \end{matrix} = o$$

eine beſtimmte Gleichung für z; die m + 1 Wurzeln hat. Nun iſt $z = \frac{y}{x}$ eine Zahl, alſo giebt dieſes m + 1 beſtimmte Zahlen, und jede ſolche Zahl giebt eine Gleichung y = zx für eine gerade Linie. Auſer der krummen Linie alſo, welche die Integration nach (IIII) giebt, thun der gleichartigen Gleichung, auf m + 1 gerade Linien genug.

VI. Exempel. Für m = 1, kömmt in (V) $a + (k + p) z + \omega z^2 = o$ woraus alſo die beyden Werthe von z folgen, die in (IIII) aus N = o hergeleitet wurden.

414. Zuſ. $(ax^m \ldots + kx^{m-n}y^n)^e = x^{me}.(a \ldots + kz^n)^e = x^{me}.Z$ wo der andere Factor kein x ſondern nur z enthält. Wenn e ein Bruch iſt, bedeutet dieſes eine Wurzelgröſſe.

415. Zuſ. F ſey eine gleichartige Function der beyden veränderlichen Gröſſen, die aber auch irrationale Theile enthalten mag, ſo muß erſtlich jeder ſolcher Theil für ſich gleichartig ſeyn, das iſt,

iſt, die Glieder, welche zuſammen unter einem Wurzelzeichen ſtehen, müſſen eines ſoviel Abmeſſungen der veränderlichen Gröſſen haben als das andere; zweytens, müſſen dieſe Wurzelgröſſen mit ſolchen Producten der veränderlichen Gröſſen multiplicirt ſeyn, daß ſie lauter gleichartige Theile geben. So iſt $x \sqrt{(x^4 + y^4)} + y^2 \sqrt[3]{(y^3 + xyy)}$ eine gleichartige Function; weil die erſte Wurzelgröſſe für zwo, die andere für eine Abmeſſung gerechnet wird. Alſo muß ſich jeder Theil von F ſo ausdrücken laſſen. $x^{\alpha} y^{\varepsilon} . (ax^m . . . . + kx^{m-n} y^n)^e$ ſo daß $me + \alpha + \varepsilon = \lambda$ einer Zahl, die für einen Theil ſo groß als für den andern iſt. Dieſer Theil läßt ſich aber auch ſo ausdrucken $x^{me + \alpha + \varepsilon} . Z$ (414). Alſo beſteht F aus lauter Theilen, deren jeder ein Product aus einer Function von z, in eine Potenz von x iſt, die in einem Theile wie in dem andern bleibt. Man kann alſo dieſe Potenz von x als einen gemeinſchaftlichen Factor abſondern, und F ſo ausdrucken $x^{\lambda} . T$ wo T eine Function von z iſt.

416. Zuſ. Wenn F, G, gleichartige Functionen von x; y; ſind, die auch mit aus irrationalen Theilen beſtehen, und $F dx + G dy = 0$; ſo giebt z ſtatt y, und $z dx + x dz$ ſtatt dy geſetzt,

ſetzt, $x^{\lambda}.Tdx + x^{\lambda}.V.(zdx + xdz) = 0$; wo V auch eine Function von z iſt, wie T (415); daraus folgt $\frac{-dx}{x} = \frac{Vdz}{T + Vz}$ eine Gleichung wie die 413; nur daß T und V auch Irrationalgröſſen enthalten können.

Ex. $(x \sqrt[5]{y^4 x} + \sqrt{(x^4 + x^3 y)})\, dx + y \sqrt[3]{xyy}.\, dy = 0$. Hier iſt

	für F		für G
$e =$	$\frac{1}{5}$;	$\frac{1}{2}$;	$\frac{1}{3}$
$\alpha =$	1	0	0
$\varepsilon =$	0	0	1
$m =$	5	4	3
$\lambda =$	2	2	2

alſo $T = \sqrt[5]{z^4} + \sqrt{(1 + z)}$; $V = z.\sqrt[3]{zz}$. Wenn alſo $dz = 0$ ſo giebt $T = -Vz$ wieder eine Gleichung für z zu Beſtimmung der geraden Linien $y = zx$ die der Differentialgleichung genug thun.

417. Anm. Ich habe hievon in einer Vorleſung in der K. Soc. d. Wiſſ. umſtändlicher gehandelt. Sie iſt die 4; in den diſſertat. math. & phyſ. Soc. R. S. 1756. . 1766 exhibitis. Joh. Bernoulli hat dieſe Gleichungen integriren gelehrt, ohne die veränderlichen Gröſſen von einander zu ſondern, wovon ich in der Ausübung keinen Vortheil ſehe. Op. T. III. n. 136. T. IIII. n. 156. Daß ſich die veränderlichen Gröſſen von einander ſondern laſſen, hat er nicht erinnert, welches aber Dna Maria Gaetana Agneſi, Inſtituzioni Analitiche L. IIII.

c. 2; §. 14. bemerkt hat, wo dieſe Gleichungen ausführlich betrachtet werden, und §. 18. gewieſen wird, wie man Gleichungen, die nicht gleichartig ſind, zuweilen in gleichartige verwandeln kann. Folgendes iſt ein Exempel davon.

418. Aufg. Die Umſtände zu beſtimmen, unter denen die Gleichung

$$(ay^n x^m + by^q x^p).\, dx + cx^r y^s\, dy = 0$$

ſich in eine gleichartige verwandeln läßt.

Aufl. Man ſetze $y = z^t$; dieſes giebt

$$(az^{tn} x^m + bz^{tq} x^p)\, dx + tcx^r z^{st+t-1} dz = 0$$

Soll dieſe Gleichung gleichartig ſeyn, ſo iſt $tn + m = tq + p = r + (s+1)\, t - 1$; die erſten beyden gleichen Werthe geben $t = \frac{p-m}{n-q}$ welches in dem dritten und zweyten ſtatt t geſetzt, $(s - q + 1).(p - m) = (p - r + 1).(n - q)$ giebt. Dieſe Vergleichung muß unter den Exponenten ſtatt finden, wenn ſich die gegebene Gleichung ſoll auf eine gleichartige bringen laſſen.

In zween Fällen geht es nicht an z^t ſtatt y zu ſetzen, 1) wenn $p = m$; alsdenn aber verwandelt ſich die vorgegebene Gleichung ſelbſt in $x^{m-r} dx = -\frac{cy^s\, dy}{ay^n + by^q}$ 2) wenn $n = q$ da verwandelt ſie ſich in $\frac{(ax^m + bx^p)\, dx}{x^r} = -cy^{s-n}\, dy$.

Integrirung der Differentialgleichungen, durch Reihen vermittelſt des Newtoniſchen Parallelogramms, und anderer Methoden.

419. Aufg. Aus der Differentialgleichung zwiſchen x und y; y durch eine Reihe auszudrucken, die nach den Potenzen von x ſteigt oder fällt.

Aufl. Man nehme dx unveränderlich an, und ſetze $y = Ax^m + \ldots$ alſo $dy = mAx^{m-1}dx + \ldots$ ſo verwandelt ſich die Differentialgleichung in eine zwiſchen x urd y die lauter endliche Gröſſen enthält; mit dieſer kann man alſo nach Alg. 665. verfahren.

Ex. $abdy + axdy - by - yx - aa = 0$ Hier verſtehe ich, daß in die Glieder, welche kein dy enthalten; dx multiplicirt iſt. Ich ſehe nähmlich dx als die Einheit der Differentiale an, daher man in dieſer Bedeutung auch ſagen kann, es ſey $dx = 1$ Nun kömmt alſo

$$mabAx^{m-1} + maAx^m - bAx^m - Ax^{m+1} - aa$$

die Exponenten in die Fächer geſetzt, geben

$$\begin{matrix} * & m+1 \\ 0 & m \\ * & m-1 \end{matrix}$$

Für eine ſteigende Reihe ſetze ich $m - 1 = 0$; alſo $m = 1$; die Werthe 0; 1; 2; geben den Unterſchied der Exponenten, oder $\delta = 1$; alſo

$$y = Ax + Bx^2 + Cx^3 \ldots\ldots + Mx^{n-1}$$
$$+ Nx^n + Ox^{n+1} \ldots\ldots$$

und

$$
\left.\begin{array}{lcl}
abdy & = & abA + 2aBx + 3abCx^2 \ldots\ldots + (n+1)\,abQx^n \\
axdy & & \quad + aA \quad + \quad 2aB \ldots\ldots + naN \\
-by & = & \quad - bA \quad - bB \ldots\ldots \quad - \quad bN \\
-xy & = & \qquad\qquad + \; A \qquad\qquad - \quad M \\
-aa & = & -aa
\end{array}\right\} C
$$

folglich $A = a : b$; $B = (b - a) A : 2ab$; $C = (A + (b - 2a). B) : 3ab$, und überhaupt $O = (M + (b - na). N) : (n + 1) ab$ ſo daß jeder Coefficient durch die beyden nächſtvorhergehenden gegeben iſt.

Für eine fallende Reihe iſt $m + 1 = 0$; oder $m = - 1$ die Werthe ſind $0; - 1; - 2$; alſo $\delta = - 1$ und $y = Ax^{-1} + Bx^{-2} + \ldots + Lx^{-n+2} + Mx^{-n+1} + Nx^{-n}$ wo $A = - aa$; $B = - (b + ab) A$; $C = - (b + 2a). B - abA$; $N = - (b + na) M - (n - 1) abL$.

420. Zuſ. Wenn y nur von der erſten Abmeſſung, und nicht mit dy multiplicirt vorhanden iſt, ſo läßt ſich das Geſetz des Fortganges meiſtens leicht allgemein darthun, wie das Exempel zeigt. Sonſt würde es etwas ſchwerer fallen, doch aber nach dem 56 gebrauchten Verfahren ebenfalls zu bewerkſtelligen ſeyn.

421. Zuſ. Wenn man ſtatt y die Reihe $Ax^{m} + Bx^{m+\delta} \ldots + Rx^{m+r\delta} \ldots$ ſetzt, die ich wie Alg. 645 nennen will; daß ſich die Differentialgleichung in die Reihe ☾ verwandelt, ſo wird aus jedem Theile der Differentialgleichung wie $x^{\varkappa}y^{\varepsilon}\,dy$ eine Reihe ♂; in welcher R zuerſt bey dem Exponenten $m(\varepsilon + 1) + r\delta - 1 + \varkappa$

$+ \varkappa$ vorkömmt. Denn in der Reihe, die aus $y^{\varepsilon} x^{\varkappa}$ wird, kömmt R zuerſt bey dem Exponenten $m\varepsilon + r\delta + \varkappa$ vor, (Alg. 656.) und in der Reihe dy bey $m + r\delta - 1$. Jener Reihe Glied alſo, in welchem R zuerſt vorkömmt, mit der Reihe dy erſten Gliede multiplicirt, bekömmt den Exponenten $m\varepsilon + r\delta + \varkappa + m - 1$. Und jener Reihe erſtes Glied, mit der Reihe dy Gliede, wo R zuerſt vorkömmt, multiplicirt bekömmt den Exponenten $m + r\delta - 1 + m\varepsilon + \varkappa$, welche beyden Exponenten mit dem vorhin genannten einerley ſind; Eher aber kann R in δ nicht vorkommen.

Ich nehme allemahl r für eine ganze bejahte Zahl an. Iſt $m + r\delta < m$ ſo muß δ verneint ſeyn.

Wenn im Exempel 419; δ aus axdy wird, ſo iſt $\varepsilon = 0$; $\varkappa = 1$; $m = \delta = 1$; Es ſey R = B ſo iſt $r = 1$; und B kömmt zuerſt beym Exponenten 2 vor.

422. Zuſ. Wenn $m = 0$ kömmt R zuerſt bey den Exponenten $r\delta - 1 + \varkappa$ vor. In dieſem Falle verſchwindet der Reihe dy eigentliches erſtes Glied mAx^{m-1} und das, welches nun ihr erſtes wird, $\delta Bx^{\delta - 1}$ giebt mit dem Gliede der Reihe $y^{\varepsilon} x^{\varkappa}$ das zuerſt R hat multiplicirt, den

Exponenten $\delta - 1 + \varkappa$: Aber das erſte Glied der Reihe dy das R enthält, hat den Exponenten $r\delta - 1$ und giebt mit der Reihe $y^{\varepsilon} x^{\varkappa}$ dy erſtem Gliede multiplicirt den Exponenten $\delta r - 1 + \varkappa$.

423. Zuſ. Eine Reihe ♃ entſtehe aus einem Gliede der Differentialgleichung, daß kein dy enthält, und $y^{\lambda} \varkappa^{\tau}$ heiſſe, ſo kömmt in ihr R zuerſt bey dem Exponenten $m\lambda + r\delta + \tau$ oder wenn $m = 0$ bey $r\delta + \tau$ vor.

424. Zuſ. Eine andere Reihe wie die in 421 die aus x^{ν} y^{π} dy entſtehe, heiſſe ☿, und fange ſich nicht in der Reihe ☾ erſtem Gliede, ♂ aber im erſten an, und ſey alſo eine Anfangsreihe (Alg. 650) da ☿ keine iſt. Wenn δ eine bejahte Zahl iſt, ſo wird der erſte Exponent der Reihe ♂ eine kleinere bejahte oder gröſſere verneinte Zahl ſeyn, als der erſte Exponent der Reihe ☿; oder es iſt $m(\varepsilon + 1) + \varkappa - 1 \lessgtr m.(\pi + 1) + \nu - 1$, gröſſer und kleiner, in der zweyten Bedeutung 153 genommen. Addirt man alſo auf beyden Seiten $r\delta$ ſo iſt der Exponent, bey welchem R zuerſt in der Anfangsreihe vorkömmt, kleiner, als der Exponent, bey dem es zuerſt in ☿ vorkömmt, oder R kömmt in jener Reihe eher als in dieſer vor, und iſt folglich aus jener ſchon beſtimmt, ehe es in dieſer vorkömmt, imgleichen ehe es in ♃ (423) vorkömmt, wenn ♃ auch keine Anfangsreihe, oder derſel-

derſelben erſter Exponent gröſſer iſt als der erſte der Anfangsreihe.

Iſt δ eine verneinte Zahl, ſo erhellt eben dieſes, man darf nur abziehen ſtatt addiren, und kleiner ſtatt gröſſer ſetzen.

425. Zuſ. Wenn δ oder m verneint, und $m + r\delta = 0$ iſt, ſo findet ſich R gar nicht in der Reihe dy; Aber in der Anfangsreihe (424) kömmt es in dem Producte aus dem erſten Gliede von dy in das Glied der Reihe $y^{\varepsilon} x^{\varkappa}$ das zuerſt R enthält, zuerſt bey dem Exponenten $m\varepsilon + r\delta + \varkappa + m - 1 = m\varepsilon - 1 + \varkappa$ vor.

426. Zuſ. Wenn ſich bey dem Exponenten $m.(\varepsilon + 1) + r\delta - 1 + \varkappa$ noch kein Glied der Reihen (424) die keine Anfangsreihen ſind befindet, ſo iſt $R = 0$ (Alg. 657.).

427. Zuſ. Wenn wegen 425; R in einer Anfangsreihe, die aus einem Gliede der Gleichung entſtanden iſt, das dy enthält, nicht bey demjenigen Exponenten vorhanden iſt, wo es zuerſt vorkommen ſollte, und wenn unter den Gliedern der Gleichung, die dx enthalten, keines eine Reihe giebt, in der ſich R bey dieſem Exponenten befindet, ſo iſt der Coefficient der Gleichungsreihe (Alg. 649.) bey dieſem Exponenten nur durch ſchon zuvor beſtimmte Coefficienten der Reihe ⊙ gegeben: Wenn dieſe alſo nicht von ſich

ſelbſt = o geben; ſo kann der Coefficient der Gleichungsreihe nicht verſchwinden, und die Gleichungsreihe findet alſo nicht ſtatt.

Exempel. $xxdy - y - pxx - 2x^3 - rx = 0$ giebt

$$\begin{matrix} 3 & & \\ 2 & & \\ 1 & m+1 & \\ & m & \end{matrix}$$

Man ſetze $m + 1 = 3$ oder $m = 2$ und $y = Ax^2 + Bx + C + Dx^{-1} \ldots$ alſo

$$xxdy = 2Ax^3 + Bx^2 \ * \ - D$$
$$-y = \quad - A - Bx - C$$
u. ſ. w. $= -2 - p - r$

Hier iſt $A = 1$; $B = 1 + p$; und im dritten Gliede ſoll $1 + p + r = 0$ ſeyn: Wenn dieſes ſo zutrifft, ſo bleibt C oder D unbeſtimmt, und das Uebrige hat alles ſeine Richtigkeit; wo aber nicht, ſo kann man dieſe Reihe nicht brauchen.

Dieſes kann ſich alſo nur ereignen, wenn m und δ einander entgegengeſetzte Gröſſen ſind, und $\frac{m}{\delta}$ eine ganze verneinte Zahl iſt.

428. Zuſ. Es ſey $R = A$ und alſo $r = 0$; über dieſes auch $m = 0$; ſo iſt der Reihe dy erſtes wirkliches Glied; $\delta Bx^{\delta - 1}$. Die Glieder der

der Gleichung nun, die Anfangsreihen (424) geben, können I) theils dx theils dy; II) nur dy; III) nur dx enthalten. Im Iten Falle befindet ſich B zugleich mit A ſchon im erſten Coefficienten der Gleichungsreihe, und folglich kann man A oder B unbeſtimmt laſſen, und dadurch B oder A, und die folgenden beſtimmen. Im IIten Falle wird A beſtimmt, denn B iſt ein Factor in allen Theilen, die den erſten Coefficienten der Gleichungsreihe zuſammen ausmachen, alſo kann man dieſen Coefficienten, der = o geſetzt wird, mit B dividiren, und eine Gleichung für A erhalten. Wollte man es nicht ſo machen, ſo könnte man auch in dieſem Coefficienten B = o ſetzen, da denn A unbeſtimmt bliebe, und da man alſo auch A und C zugleich = o ſetzen könnte. Im IIIten Falle wird wiederum A beſtimmt, und wenn alle Glieder, die dx enthalten, Anfangsreihen geben, ſo findet man ein A das ſtatt y geſetzt, die Gleichung auf o bringt, wenn dy = o oder y = A. Dieſer Werth kann zwar für die ganze Gleichung nicht richtig ſeyn, weil y - 1 eine veränderliche Gröſſe ſeyn ſoll, er iſt aber doch richtig, wenn man die Glieder, die dy enthalten, aus ihr wegläßt.

429. Ex. Ein Exempel ſey die Gleichung, welche die Columme linker Hand ausmacht; wo

$$
\begin{array}{rlll}
y = & A & + Bx & + Cx^2 \ldots \\
ydy = & AB & + BBx & \\
 & & + 2AC & \\
dy = & B & + 2C & \\
yyx = & & A^3 & \\
x = & & 1 & \\
-f = & -f & & \\
\hline
0 = & & &
\end{array}
$$

Dieſes Exempel giebt für den I. Fall $A = \frac{f - B}{B}$ oder $B = \frac{f}{A + 1}$. Will man es für den zweyten Fall brauchen, ſo ſetze man $f = 0$; alſo $A = -1$ oder $B = 0$.

Ein Exempel des IIIten Falles wo die Reihe für y eben die Geſtalt hat, iſt

$$
\begin{array}{rlll}
+x^2 ydy = & & + ABx^2 & + 2ACx^3 \\
 & & & + BB \\
 & & & + 2AC \\
+x^3 dy = & & & + B \\
+ fxy^2 = & + fAAx & & \\
+ gxy^2 = & + gA & & \\
+ hx = & + h & & \\
+ kxx = & & + k & \\
\hline
0 = & & &
\end{array}
$$

wo $fAA + gA + h = o$. Der hieraus gefundene Werth von A thut der Differentialgleichung völlig genug, wenn $dy = o$ und $k = o$. Es iſt nähmlich klar, daß ſie ſich alsdenn durch xdx dividiren läßt.

430. Zuſ. Weil R wo es zum erſtenmahle vorkömmt, nur die erſte Abmeſſung hat, (Alg. 647; 656;) ſo wird es wie Alg. 657. $= o$, wenn ſich da, wo es zuerſt vorkömmt, nur Gröſſen, die von den Anfangsreihen herrühren befinden, und dieſe Gröſſen nicht für ſich ſelbſt verſchwinden, in welchem Falle es unbeſtimmt bliebe.

431. Zuſ. Der Anfangsreihe (421) Glied, das den Exponenten $m(\varepsilon + 1) + r\delta - 1 + \varkappa$ hat, beſteht aus Producten, die R von der erſten Abmeſſung enthalten, und aus andern, in denen ſich die Coefficienten der Reihe ⊙ befinden, die vor R vorhergehen.

432. Aufg. Von $(ay + bx^n + cx^{n-1} \dots + hx^{n-\lambda} \dots + k)\,dx - dy = o$ die Integrale zu finden.

Aufl. Die Exponenten geben

$$\begin{array}{ll} & n \\ & n - 1 \\ & \vdots \\ \rho & m \\ & m - 1 \end{array}$$

Um

Um nun eine fallende Reihe zu haben; ſetze man $m = n$, alſo $\delta = -1$, und

$$ay = aAx^{n} + aBx^{n-1} \ldots + aLx^{n-\lambda} \ldots + aRx^{-1} + aSx^{-2}$$

$$-dy = -nAx^{n-1} \ldots - (n - \lambda + 1) Kx^{n-\lambda}$$

$$* - nRx^{-2} \text{ u. ſ. w.} = + bx^{n} + cx^{n-1} . + hx^{n-\lambda}$$

Wo $A = -b : a$; $B = (nA - c) : a$; $L = \frac{(n - \lambda + 1) K - h}{a}$ alſo $R = o = S$ und allen folgenden Coefficienten der Reihe y daß alſo dieſer Reihe letzter Coefficient für $\lambda = n$, iſt, und die Reihe endlich wird.

Goldbach hat dieſe Reihe aus andern Gründen gefunden. Comm. Ac. Petrop. T. I. p. 209. Ob aber gleich $y = \frac{-bx^{n}}{a} + \frac{nA - c}{a} x^{n-1} \ldots + Q$ der Differentialgleichung genug thut, und alſo als die Integrale davon angeſehen werden kann; ſo läßt ſich doch eine andere Integrale finden, wo y nicht durch eine endliche Reihe auszudrucken iſt. Man findet dieſes aus (412. I.) denn

das dortige	a;	b;	p;	n;	q
iſt hier	1	1;	a;	o;	bx^{n} . . .

alſo das dortige $\int p dx : a$ hier ax und $z = e^{-ax}$ alſo Conſt $+ ye^{-ax} = \int e^{-ax} q dx$. Dieſes

Integral

Integral findet man hier ſo. Die gefundene Reihe für y heiſſe T, und es ſey $y = T + u$ ſo iſt

$$\begin{aligned} aydx &= aTdx + audx \\ -dy &= -adT - du \\ +k\ldots &= +k \\ \hline o &= o \end{aligned}$$

Nun iſt das, was ſich in der erſten Columme zur rechten Seite des Gleichheitszeichens befindet, wie man nur gefunden hat $= 0$; alſo auch $adx = \frac{du}{u}$ und $e^{ax} + \text{Conſt} = u$ wo ſich u durch eine unendliche Reihe giebt. (239) Eine ſteigende Reihe durch das Parallelogramm geſucht, wird auch unendlich.

Daß die endliche Reihe nicht die völlige Integrale dieſer Gleichung ſey, hat auch Nicolaus Bernoulli erinnert Comm. Ac. Petrop. T. I. p. 207. Man ſ. auch Op. Iac. Bern. T. II. n. 82. p. 733. und daſelbſt Cramers Noten.

433. Aufg. z in $\alpha z + (\beta + \gamma x)\, dz - (\varepsilon + \theta x) = 0$ zu finden.

Aufl. I. Wenn $m = 1$, $\delta = 1$ kömmt

1	
o	m
.	m − 1

$$\begin{array}{rcl} \alpha z & = & \alpha Ax + \alpha Bx^2 \ldots + \alpha Mx^{n-1} \\ +\beta dz & = & +\beta A + 2\beta B + 3\beta C \ldots +n\beta N \\ +\gamma x dz & = & +\gamma A + 2\gamma B \ldots + (n-1)\gamma M \\ -\varepsilon & = & -\varepsilon \\ -\theta x & = & -\theta \end{array}$$

alſo $A = \varepsilon : \beta$; $B = -\frac{(\gamma+\alpha).\,A+\theta}{2\beta}$;

$C = -\frac{(\alpha+2\gamma)\,B}{3\beta}$; $N = -\frac{(\alpha+(n-1)\gamma)\,M}{n\beta}$;

Iſt alſo $\alpha = -(n-1.\,\gamma$ ſo wird N mit allen folgenden Coefficienten der Reihe, welche z ausdrückt, $= 0$; oder dieſe Reihe bricht ab, wenn $\frac{-\alpha}{\gamma}$ eine ganze bejahte Zahl iſt. Man nenne dieſe Reihe T und ſetze

$$\begin{array}{rcl} \alpha z & = & \alpha T + \alpha w \\ +\beta dz & = & +\beta dT + \beta dw \\ +\gamma x dz & = & +\gamma x dT + \gamma x dw \\ -\varepsilon - \theta x & = & -\varepsilon - \theta x \end{array}$$

ſo iſt wiederum $\alpha w + (\beta+\gamma x).\,dw = 0$ und $\frac{dw}{\alpha w} = -\frac{dx}{\beta+\gamma x}$ woraus ſich wieder w giebt.

II. Man ſetze $\beta+\gamma x = u$; alſo $dx = \frac{du}{\gamma}$ und $\alpha z du : \gamma + u dz - \varepsilon du : \gamma - \theta u du : \gamma\gamma$

$\gamma\gamma + \theta\beta du : \gamma\gamma = o$. Wenn man hier z durch u ſuchet, findet ſich

$$\frac{\alpha}{\gamma} . zdu = \frac{\alpha}{\gamma} A + \frac{\alpha}{\gamma} Bu \ldots + \frac{\alpha}{\gamma} Nu^n$$

$$udz = \quad + B \quad + nN$$

$$\text{u. ſ. w.} = \frac{\theta\beta - \varepsilon\gamma}{\gamma\gamma} \quad \frac{-\theta}{\gamma\gamma}$$

alſo $A = (\varepsilon\gamma - \theta\beta) : \alpha\gamma$; $B = \theta : (\alpha + \gamma)$. γ ferner $-\alpha : \gamma = n$ da N unbeſtimmt bleibt; oder $N = o$; wenn man das erſte annimmt; ſtatt u ſeinen Werth ſetzt und denn N ſo beſtimmt, daß x und z zugleich verſchwinden, ſo findet man nach gehöriger Rechnung die Integrale ſo, wie ſie Joh. Bernoulli Hydraul. P. I. art. 14. Op. T. IIII. n. 186. gegeben hat.

Wollte man hier wieder dieſen gefundenen endlichen Ausdruck T; heiſſen, und $z = T + w$ ſetzen, ſo käme

$$\frac{\alpha}{\gamma} zdu = \frac{\alpha}{\gamma} . T + \frac{\alpha}{\gamma} . wdu$$

$$+ udz = + udT + udw$$

$$\text{u. ſ. w.} = \text{u. ſ. w.}$$

alſo müßte $\frac{\alpha}{\gamma} . \frac{du}{u} + \frac{dw}{w} = o$ ſeyn.

Dieſes gäbe, wenn $\varkappa$ eine willkührliche beſtändige Gröſſe bedeutet; $w = \varkappa^{-n} . u^n$ und alſo wä-

$^{r}e\,x^{-n}$ was vorhin N war; daher hier die vorhin gefundene Integrale vollſtändig iſt.

III Nach (412) kann man dieſe Differentialgleichung wie ſie in der Aufgabe ausgedrucket worden iſt auch ſo integriren.

412	y	n	a	p	b	q
hier	z	0	1	$\frac{-\alpha}{\beta+\gamma x}$	1	$\frac{\varepsilon+\theta x}{\beta+\gamma x}$

alſo das dortige $\frac{p\,dx}{a}$ hier $\frac{-\alpha\,dx}{\beta+\gamma x}$; davon das Integral $-\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\log(\beta+\gamma x)$, daher das dortige z hier $(\beta+\gamma x)^{-\alpha:\gamma}$ und aus 412. VII.

$$c + a z.\,(\beta+\gamma x)^{+\alpha:\gamma} = \int \frac{\alpha+\theta x}{(\beta+\gamma x)^{1-\alpha:\gamma}}.\,dx$$

434. Aufg. y durch x in der Gleichung $yy + (\tfrac{1}{2}x^3 y + \tfrac{1}{2}xy - \tfrac{1}{2}x^3)\,dy - xxy = 0$ auszudrücken.

Aufl. m + 2   2m + 2

*   *

m   2m

$m = 2m$ giebt (Alg. 644.) $m = 0$; $\delta = 2$; da wird aber der Reihe $A + Bx^2 + Cx^4 \ldots$. jeder

jeder Coefficient = 0. Setzt man $y = \mathfrak{A}x^{-2} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C}x^2 \ldots$ ſo bleibt $\mathfrak{A}$ unbeſtimmt, aber $\mathfrak{B}$ wird $= \mathfrak{A} - 1$; $\mathfrak{C} = (\mathfrak{A}\mathfrak{B} - \mathfrak{B}\mathfrak{B}) : 2\mathfrak{A}$ u. ſ. w. Daß dieſe Reihe auch im Parallelogramm enthalten iſt, erhellt ſo: die äuſſerſten Fächer werden deswegen gleich geſetzt, weil ſie den erſten Exponenten der Gleichungsreihe enthalten; (Alg. 650) wenn man nun $m = 2m + 2$ ſetzt, woraus $m = -2$ folgt, ſo ſind dieſe Fächer zwar nicht die äuſſerſten, weil $2m$ unter der Linie durch ſie liegt, aber der Coefficient der Gleichungsreihe, der dem Exponenten $2m$ oder -4 zugehört, verſchwindet von ſich ſelbſt, weil er aus den erſten Coefficienten der Reihen yy und $\frac{1}{2}xydy$ beſteht, die hier $\mathfrak{A}\mathfrak{A}$ und $-\mathfrak{A}\mathfrak{A}$ ſind, daß man alſo das Glied der Gleichungsreihe, das den Exponenten $2m + 2$ oder -2 hat, als das erſte, und ſeinen Exponenten als den erſten anſehen kann. Dieſes kömmt alſo auf die beſtändigen Gröſſen in der Gleichung an. Hätte das Glied, das $\frac{1}{2}xydy$ heißt, z. E. $\frac{1}{3}xydy$ geheiſſen, ſo wäre es nicht angegangen. Man darf hier nicht $\mathfrak{A} = 0$ ſetzen, wodurch ſich die letztere Reihe in die erſte verwandeln würde; denn dadurch würde A oder $\mathfrak{B} = -1$; da doch $A = 0$ iſt, und B oder $\mathfrak{C} = \frac{-1}{2.0}$ unendlich; u. ſ. w. Die letzte Reihe kann ſich nähmlich deswegen nicht in die erſte verwandeln, weil für $x = 0$ der Werth

von y in der letztern unendlich, in der erſtern = A wird.

435. Aufg. Durch die Fächer $\lambda m + l$; $\varphi m + f$ (Alg. 636 wo $b = 1$) gehe eine gerade Linie, ſo daß zwiſchen beyden in dieſer geraden Linie kein anders Fach fällt. Eben dieſe Linie gehe auch durch das Fach $\tau m + t$. Man ſucht τ; t; durch λ; φ; l; f;

Aufl. In Alg. 636. iſt $A = \lambda m + l$; $C = \varphi m + f$ alſo das dortige n; r; $n + \delta$; $r - d$;
hier λ; l; φ; f;
Nun erhellt aus demjenigen, was dorten bey dem Werthe von B gezeigt worden iſt, daß ſich jedes Fach, das in eben die gerade Linie fällt, ſo ausdrücken läßt: $(n + k\delta)\ m + r - kd$ wo k eine ganze Zahl bedeutet. Dieſer Ausdruck giebt in den hier gebrauchten Buchſtaben $(\lambda + k.\ (\varphi - \lambda))\ m + l - k.\ (l - f)$.

Ex. Wenn das Linial zugleich durch $- m + 1$ und 3 geht, ſo iſt $\lambda = -1$; $l = 5$; $\varphi = 0$, $f = 3$, und jedes Fach in dieſer Linie heißt $(-1 + k).\ m + 5 - k.\ 2$. Setzt man ſtatt m nach der Ordnung 0; 1; 2; 3, 4, 5, ſo werden dieſe Fächer $- m + 5$; 3; $m + 1$; $2m - 1$; $3m - 3$; $4m - 5$, . .

436. Zuſ. Wenn alle in einer wagrechten Linie liegen, alſo $m = 0$; ſo iſt $l = f$ (Alg. 644) alſo ihr allgemeiner Ausdruck $(\lambda + k.\ (\varphi - \lambda))\ m + l$.

437. Zuſ. Fallen alle in eine lothrechte Linie, ſo iſt $m = \infty$ und ihr Ausdruck $m\lambda + l - k. (l - f)$ weil $\lambda = \varphi$.

438. Zuſ. In den Theilen einer Differentialgleichung welche dy enthalten, habe y die Exponenten $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$; x die Exponenten a; b; c; ..

ſo daß dieſe Theile ſo ausſehen $y^{\alpha} x^{a} dy$ u. ſ. w. Setzt man nun hier Ax^m ſtatt y; ſo verwandeln ſich die Exponenten in $m. (\alpha + 1) + a - 1$; $m. (\beta + 1) + b - 1$; $m. (\gamma + 1) + c - 1$; u. ſ. w. Man ſetze alſo in 435; $\lambda = \alpha + 1$; $l = a - 1$; $\varphi = \beta + 1$; $f = b - 1$; ſo iſt für jeden andern Exponenten, der mit jenen beyden in eine gerade Linie fällt; $\gamma = \alpha + k. (\beta - \alpha)$; $c = a - k. (a - b)$ und die Reihen der Exponenten ſind folgende, wo die in einem Theile der Gleichung beyſammen ſind, die hier untereinander ſtehen:

Bey y; α; β; $2\beta - \alpha$; $3\beta - 2\alpha$ ....
x; a; b; $2b - a$; $3b - 2a$ ....

439. Zuſ. In den Theilen der Gleichung, welche dx enthalten, ſeyn die Exponenten von y; π, ϱ, σ, von x; p, r, ſ, daß die Glieder

ſo ausſehen, $y^{\pi} x^{p} dx$... Dieſe verwandeln ſich in $m\pi + p$; $m\varrho + r$; $m\sigma + ſ$; und man findet eben ſo, daß für jeden Exponenten, der mit den erſten beyden in eine gerade Linie fällt, $\sigma = (\pi + k. (\varrho - \pi))$. m und $ſ = p - n. (p - r)$.

440. Zuſ. I) $m. (\alpha + 1) + a - 1 = m. (\beta - a) + b - 1$ giebt $m = (b - a) : (\alpha - \beta)$; II) $m (\alpha + 1) + a - 1 = m \pi + p$ giebt $m = (p - a + 1 : (\alpha - \pi + 1)$; III; $m \pi + p = m \rho + r$ giebt $m = (r - p) : (\pi - \varrho)$.

441. Zuſ. Wenn $m. (\alpha + 1) + a - 1$; $m. (\beta + 1) + b - 1$; $m \pi + p$; in eine gerade Linie fallen, ſo iſt in 435; $\lambda = \alpha + 1$; $l = a - 1$; $\varphi = \beta + 1$; $f = b - 1$; alſo $\pi = \alpha + 1 + k. (\beta - \alpha)$ und $p = a - 1 - k. (a - b)$.

Ex. Es ſey $\alpha = 3$; $a = 2$; $\beta = 5$; $b = 7$; ſo iſt $\pi = 4 + 2 k$; $p = 1 + 5. k$, und alſo fallen folgender Glieder Exponenten in eine gerade Linie $y^3 x^2 dy$; $y^6 x^7 dy$; $y^4 x$; $y^6 x^6$; $y^8 x^{11}$ . . . .

442. Zuſ. Fallen aber $m \pi + p$; $m \varrho + r$; $m (\alpha + 1) + a - 1$ in eine gerade Linie, ſo iſt $\alpha = \pi - 1 + (\varrho - \pi). k$ und $a = p + 1 - (p - r). k$.

443. Zuſ. In 436 iſt für (442) $r = p$; und $a = p + 1$; oder alle Exponenten von x in den Theilen der Gleichung, die dy enthalten, ſind unter ſich gleich, und um 1 gröſſer als die auch unter ſich gleichen Exponenten der Theile der Gleichung, welche dx enthalten.

444. Zuſ. In 437. iſt $\alpha = \beta$; $\pi = \varrho$ (440) und $\alpha = \pi - 1$ (441).

445. Zuſ. Wenn man die Reihe ⊙ (421. und Alg. 645.) in $x^a y^\alpha dy$ ſetzt, ſo entſteht daraus eine Reihe, die folgende Coefficienten hat:

$$\text{I)}\; mA^{\alpha+1};\; \text{II)}\; (m+\delta+m\alpha A)^{\alpha} B;$$

$$\text{III)}\; (m+2\delta+m(\alpha-1)).\, A^{\alpha} C + \left((m+\delta)\alpha + \frac{\alpha.(\alpha-1)}{1.\,2}.\, m\right) A^{\alpha-1} BB$$

Die Potenzen von x zu denen dieſe Coefficienten gehören, haben die Exponenten $m\alpha + m - 1 + a$; $m\alpha + m - 1 + a + \delta$; $m\alpha + m - 1 + a + 2\delta$. Aus $x^p y^\pi$ aber wird auf eben die Art eine Reihe, deren Coefficienten I) A^π; II) $\pi A^{\pi-1} B$; III) $\left(\frac{\pi.(\pi-1)}{1.\,2} BB + (\pi-1).\, A.\, C\right) A^{\pi-2}$ zu den Exponenten $m\pi + p$; $m\pi + p + \delta$; $m\pi + p + 2\delta$ gehören. Iſt nun $m\pi + p = m\alpha + m - 1 + a$ ſo haben beyde Reihen einerley Exponenten, und ihre erſten Coefficienten kommen zuſammen in den erſten Coefficienten der Gleichungsreihe, die zweyten in den zweyten, die dritten in den dritten u. ſ. w. Die erſte Reihe ſtellt alle Reihen vor, die aus den Theilen der Gleichung entſtehen, welche dy enthalten, und die zweyte, alle die aus den Theilen der Gleichung entſtehen, welche dx enthalten.

446. Zuſ. Geſetzt, es fallen alle Exponenten, die Ax^m ſtatt y geſetzt giebt, in eine einzige gerade Linie, ſo geben alle Theile der Gleichung, Anfangsreihen; und der erſte Coefficient der Gleichungsreihe = o geſetzt giebt Werthe von A, die ſo beſchaffen ſind, daß $y = Ax^m$ ein völliger Werth von y iſt, welcher der Gleichung genug thut.

Gleichwohl erhellt, daß ſich auch hier eine unendliche Reihe erhalten läßt. Denn wenn man O in die Gleichung ſetzt, ſo bekömmt man Reihen wie ♂ und ♃ (421; 423) deren erſte Exponenten erwähnter maaſſen alle gleich ſind; weil nun die Exponenten jeder Reihe eines Theiles der Gleichung eine arithmetiſche Progreßion ausmachen, (Alg. 645) ſo ſind alle zweyten Exponenten dieſer Reihen unter ſich gleich, und ſo auch alle dritten, alle vierten, u. ſ. w. was auch δ ſeyn mag. Daher geben alle zweyte Glieder der Reihen der Theile zuſammen das zweyte Glied der Gleichungsreihe, alle dritten Glieder der Reihen der Theile zuſammen das dritte der Gleichungsreihe, u. ſ. w. wo man auch die Glieder rechnen muß, die nach dem Geſetze des Differentiirens durch o multiplicirt werden und verſchwinden, ſo wäre im Exempel 427; Bxx der Reihe xxdy zweytes; aber — D ihr viertes Glied. Hieraus alſo beſtimmt ſich δ durch das Parallelogramm nicht.

Aber

Aber der zweyte Coefficient der Gleichungsreihe beſteht aus lauter ſolchen Theilen wie die beyden Coefficienten II in 445 ſind; und iſt alſo ein Product, deſſen einer Factor B iſt, der andere aus gegebenen Gröſſen der Gleichung, wie auch den ſchon beſtimmten A und m; und endlich mit aus δ beſteht. Soll alſo dieſer Coefficient = 0 ſeyn, ſo kann man den nur erwähnten Factor = 0 ſetzen: da bleibt B unbeſtimmt, aber δ wird durch die übrigen Gröſſen beſtimmt. Nunmehro beſtimmen ſich C; D; . . . aus den folgenden Coefficienten, weil C nicht ein gemeinſchaftlicher Factor aller Theile des dritten iſt (445) und eben ſo wenig D alle Theile des vierten, u. ſ. w.

447. Zuſ. Man hätte auch können B = 0 ſetzen; weil alsdenn im dritten Coefficienten der Gleichungsreihe alles wegfiele, was mit B multiplicirt iſt, ſo würde er ſich in ein Product verwandeln, deſſen einer Factor C wäre, und man würde δ dadurch beſtimmen, daß man den andern Factor = 0 ſetzte. Wollte man aber auch C = 0 ſetzen, ſo würde ſich wiederum dieſes Verfahren mit D bey dem vierten Coefficienten der Gleichungsreihe auf eine von beyden Arten vornehmen laſſen, u. ſ. w.

Man ſetze $Ax^m + Rx^{m+n}$ ſtatt y in die Gleichung, ſo iſt klar, daß wenn R unbeſtimmt

bleiben ſoll, η ſich von eben der Gröſſe beſtimmt wie δ in 446; weil der ganze Unterſchied darinnen beſteht, daß man hier η ſchreibt, wo vorhin δ ſtunde. Nun ſey $\eta = r.\ \theta$ und r eine ganze bejahte Zahl, ſo bedeutet θ hier den Unterſchied der Progreßion der Exponenten der Reihe C welcher Alg. 645; d hieſſe, und R iſt das dortige R. Ferner nehme man an, es ſollen B; C; u. ſ. w. alle bis auf die Gröſſe unter ihnen, die zunächſt vor R hergeht, $= 0$ ſeyn; ſo iſt klar, daß man alsdenn $Ax^{m} + Rx^{m + r\theta}$ ſtatt der beyden erſten Theile von y in die Gleichung ſetzen darf, und alſo $r\theta = \delta$ wird. Die Coefficienten der Reihe C die nach R folgen, werden nun durch R eben ſo beſtimmt wie in 446 die, welche nach B folgen, durch B beſtimmt werden. Alſo giebt dieſes Verfahren einerley Reihe mit 446.

448. Zuſ. Das Parallelogramm giebt hier eigentlich $\delta = 0$ weil alle Fächer deſſelben die Exponenten enthalten, in einer geraden Linie liegen, und alſo nicht verſchiedene Werthe haben, wie doch Alg. 665. VIII. fodert. Die andere Beſtimmung von δ, beruhet auf der Natur der Differentialgleichungen, bey denen δ durch dy allein in die Coefficienten kommen kann, und läßt ſich daher bey algebraiſchen nicht anbringen.

449 Ex. In der gleichartigen Gleichung (413)

$\left(ax^{\varepsilon} \ldots\ldots + kx^{\varepsilon-n} y^{n} \ldots\right) dx + \left(px^{\varepsilon} \ldots + tx^{\varepsilon-r} y^{r} + ux^{\varepsilon-r-1} y^{r+1} \ldots\right) dy =$

ſchreibe man 445; ſtatt a; α; p; π;
hier $\varepsilon - r$; r, $\varepsilon - n$; n;
ſo werden die 445 gefundenen Progreßionen der Exponenten, hier

$(m-1).(r+1)+\varepsilon$; $(m-1).(r+1)+\varepsilon+\delta$; ....
$(m-1).n+\varepsilon$; $(m-1).n+\varepsilon+\delta$; .....

Beyder Progreßionen erſte Exponenten werden gleich, was auch n iſt, wenn $m = 1$; und folglich findet hier 446; ſtatt, und man darf nur $Ax + Bx^{1+\delta} + Cx^{1+2\delta}$ ſtatt y ſetzen, um δ und A; C; . . . nach 446 zu beſtimmen. Man nehme zur Erläuterung die einfachſte dieſer Gleichungen $(ax + by).\, dx + (px + qy)\, dy = 0$ ſo kömmt

$$ax = ax$$

$$by = bA \qquad + bBx^{1+\delta} \ldots\ldots$$

$$pxdy = pA + (1+\delta)\, pB \ldots\ldots$$

$$qydy = qAA + q.\,(2+\delta)\, AB \ldots$$

alſo gäbe der erſte Coefficient $= 0$; A

$$= \frac{-(b+p) \pm \surd\left((b+p)^2 - 4aq\right)}{2q}$$

für einen vollſtändigen Werth von $y = Ax$ für die Fortſetzung der Reihe aber iſt $b + (1+\delta).\, p + q.\,(2+\delta).\, A = 0$ oder $\delta = -(b + p + 2qA) : (p + qA)$.

Die=

Dieſes wird unendlich, wenn $p + qA = 0$; alsdenn aber iſt, wegen des erſten Coefficienten auch $bA + a = 0$; folglich $A = -\frac{a}{b} = -\frac{p}{q}$ oder $q = \frac{bp}{a}$ und die Differentialgleichung verwandelt ſich in $(ax\,by).\left(dx + \frac{p}{a}dy\right) = 0$ wo entweder $y = -\frac{a}{b}$ oder $ax + py = Const.$

450. Zuſ. Die Progreßionen der Exponenten (449) werden auch einerley, was m auch ſeyn mag, wenn $n = r + 1$. Damit nun hier die Exponenten $(m - 1)(r + 1) + \varepsilon$; $(m - 1)n + \varepsilon$ zugleich die erſten der Gleichungsreihe werden, ſo müſſen die Glieder, von denen ſie herrühren, jenes unter denen die dy, dieſes, unter denen, die dx enthalten, das erſte oder das letzte ſeyn. So laſſen ſich wenigſtens in manchen Fällen noch andere Reihen finden. Man ſetze $n = 1$ alſo $r = 0$; und $a = 0$ ſo iſt

$$
\begin{array}{lll}
bx^{\varepsilon-1}y = & bAx^{m+\varepsilon-1} + & \left.\begin{array}{r} bB \\ +(m+\delta)\,pA \end{array}\right\} x^{m+\varepsilon-1+\delta} \\
px^{\varepsilon}dy = mpA & & \ldots \\
cx^{\varepsilon-1}y^2 = & & \left.\begin{array}{r} +cAA \\ +mqAA \end{array}\right\} x^{2m+\varepsilon-2} \ldots \\
qx^{\varepsilon-1}ydy = & &
\end{array}
$$

Hier

Hier kann man nun m und δ nach Gefallen beſtimmen. Man ſetze z. E. $(mp + b)A = o$ oder $m = - b : p$ auch $m + \varepsilon - 1 + \delta = 2m + \varepsilon - 2$ oder $\delta = m - 1 = -(b + p) : p$ ſo bleibt A unbeſtimmt, aber B u.ſ.w. werden beſtimmt.

451. Zuſ. Die rationalen Gleichungen, die unter 443 ſtehen, laſſen ſich ſo ausdrücken: $(a + by + cy\ldots)\,dx + (p + qy + ryy\ldots)\,xdy = o$ oder $Pdx + Qxdy = o$ daraus folgt $\frac{-dx}{x} = \frac{Qdy}{P}$ wovon ſich die Integrale nach (385) finden läßt. Will man aber ohne dieſe Integrirung, y durch x ausdrücken, ſo geht ſolches nach 446 an, wenn nur ſo wohl Q als P aus einer endlichen Menge von Theilen beſtehen.

Denn wenn man $y = A + Bx^{\delta} + Cx^{2\delta} \ldots$ ſetzt, ſo findet man

$+ bA^{a}$	$+ bBx^{\delta}$	$+ bCx^{2\delta}$.
$+ cAA$	$+ 2cAB$	$+ cBB$
.	.	
.	.	$+ 2cAC$
.	.	
	$+ p\delta B$	$+ 2p\delta C$
	$+ qA\delta B$	$+ 2qA\delta C$
		$+ q\delta BB$
	$+ r\delta AAB$	$+ 2r\delta AC$
	.	
	.	$+ 2r\delta ABB$
	.	

In

Im erſten Coefficienten der Gleichungsreihe ſteigt A auf den Grad auf den y in P ſteigt. Im zweyten befinden ſich alle beſtändigen Gröſſen aus P und Q. Man kann auch in Fällen, die den in 450 angezeigten ähnlich ſind, nach der daſelbſt gegebenen Anweiſung verfahren.

452. Anm. Es iſt nicht unnütz dieſe Art y durch x auszudrücken zu wiſſen, ob man gleich dieſe Gleichungen völlig integriren kann. Denn wenn Q aus ſehr vielen Theilen beſteht, ſo iſt ſeine Zerfällung in Factoren, welche bey der ordentlichen Integration vorausgeſetzt wird, (385) der Auflöſung einer ſehr hohen Gleichung gleichgültig und alſo ſchwer, oft nicht einmahl in unſerer Gewalt, dagegen kann A hier durch eine niedrige Gleichung gegeben ſeyn, und δ wird aus dem zweyten Coefficienten durch eine einfache Gleichung gefunden. Wenn man auch durch die ordentliche Integration eine algebraiſche Gleichung zwiſchen x und y findet, ſo kann man zu gewiſſen Abſichten y in x durch eine Näherung ausdrücken wollen, und müßte alsdenn doch das Parallelogramm auf die Integralgleichung anwenden. Auch wird die Integralgleichung nicht allemahl algebraiſch werden, wo ſich die Schwürigkeit y aus x zu finden noch mehr vergröſſert.

453. Zuſ. Die allgemeine Formel rationaler Gleichungen, die unter 444 gehören, iſt
$(a + bx + cxx\,..)\,ydx + (p + qx + rxx\,..)\,dy = 0$ oder $Tydx + Sdy = 0$ wo ſich die vollkommene Integrale aus $\frac{Tdx}{S} =$

$\frac{-dy}{y}$ finden läßt. Setzt man hier $y = Ax^m + Bx^{m+\delta} \dots$ ſo kömmt

$$\begin{array}{rll}
pdy = & mpAx^{m-1} & + (m+\delta).\ pBx^{m+\delta-1} \\
ay = & \left.\begin{array}{r} a \\ +mq \end{array}\right\} Ax^m & \left.\begin{array}{r} +\ a \\ +(m+\delta)\ q \end{array}\right\} Bx^{m+\delta} \\
qxdy = & & \\
bxy = & \left.\begin{array}{r} +b \\ +mr \end{array}\right\} Ax^{m+1} & \left.\begin{array}{r} +\ b \\ +(m+\delta)\ r \end{array}\right\} Bx^{m+\delta-1} \\
rxxy = & & \\
& \text{u. ſ. w.} &
\end{array}$$

Hier laſſen ſich nun in manchen Fällen wenigſtens Reihen wie in 450 finden. Es ſey z. E. $p = 0$ ſo kann man $a + mq = 0$ und $m + 1 = m + \delta$ ſetzen, wo A unbeſtimmt bleibt, das übrige aber gefunden wird.

454. Aufg. In allen Differentialgleichungen, die nur zwey Glieder haben, von welchem Grade ſie auch ſeyn mögen, y durch x zu finden.

Aufl. Für ein beſtändiges $dx = 1$; iſt der allgemeine Ausdruck dieſer Differentialgleichungen $y^n . dy^{\pi-\varepsilon} . d^{\varepsilon} y - ax^{\varkappa} dx^{\pi} = 0$. Nun ſey $y = Ax^m + Bx^{m+\delta}$ ſo iſt

$$d^{\varepsilon} y = m.(m-1) \dots (m-\varepsilon+1).\ Ax^{m-\varepsilon}$$

+

$+ (m+\delta).(m+\delta-1)\ldots.(m+\delta-\varepsilon+1)\,A x^{m+\delta-\varepsilon}$

und nach gehöriger Rechnung kömmt, λ ſtatt $mn + (m-1).(\pi-\varepsilon) + m - \varepsilon$ geſetzt

$$m^{\pi-\varepsilon} . m.(m-1)\ldots(m-\varepsilon+1)\,A^{n+\pi-\varepsilon+1}\,x^{\lambda}$$
$$- a x^{\kappa}$$
$$\left.\begin{array}{l} +\left.\begin{array}{l}(m+\delta-1)\ldots\ldots(m+\delta-\varepsilon+1)\\ +(m-1)\ldots\ldots(m-\varepsilon+1)\end{array}\right](m+\delta) \\ + m.(m-1)\ldots(m-\varepsilon+1).\,n\end{array}\right\} . \; m^{\pi-\varepsilon} . A^{\pi-\varepsilon+n} . B x^{\lambda+\delta}$$

daraus folgt $m = \dfrac{\kappa+\pi}{n+\pi-\varepsilon+1}$;

$A = \sqrt[n+\pi-\varepsilon+1]{a : m^{\pi-\varepsilon} . m.(m-1)\ldots(m-\varepsilon+1)}$ und um δ zu beſtimmen; wo B unbeſtimmt bleibt.

$$\left.\begin{array}{l}(m+\delta-1)\ldots\ldots(m+\delta-\varepsilon+1)\\ +(m-1)\ldots\ldots(m-\varepsilon+1)\end{array}\right] . (m+\delta) + m(m-1)\ldots(m-\varepsilon+1).\,n = 0.$$

455. Zuſ. Wenn m eine ganze bejahte Zahl iſt, die nicht gröſſer iſt als $\varepsilon - 1$ ſo iſt A unendlich. Nähmlich alsdenn verſchwindet in irgend einem Differentiale von y der erſte Theil, der A allein enthält, weil ſein Coefficient = 0 wird, alſo fällt die Vorausſetzung weg, daß der erſte Theil des Products $y^n . dy^{\pi-\varepsilon} . d^{\varepsilon}y$; A allein enthalte.

456. Zuſ. Für $\varepsilon = 2$, oder alle Differentialgleichungen des zweyten Grades von zwey Gliedern iſt

$$m = \frac{\varkappa + \pi}{n + \pi - 1}\,;\quad A = \sqrt[n+\pi-1]{a : m^{\pi-2} \cdot m.(m-1)}\,;$$

und $\left.\begin{matrix}(m+\delta-1)\\ +(m-1)\end{matrix}\right]. (m+\delta) + m(m-1).n = 0$ woraus man $m + \delta = -\frac{(m-2)}{2} \pm \sqrt{\left(\left(\frac{m-2}{2}\right)^2 - m.(m-1).n\right)}$ erhält.

457. Ex. Wäre hier $n = 1$ und $\varkappa = 0$ und $\pi = 2$ oder $y\,ddy - adx^2 = 0$ ſo käme $m = 1$ aber A unendlich. Alsdenn nähmlich wäre $y = Ax + Bx^{1+\delta}$ folglich $ddy = * + (1+\delta).\delta.Bx^{\delta-1}$; und das erſte Glied von $y\,ddy$ wäre $(1+\delta).\delta.ABx^{\delta}$ alſo nicht durch A allein gegeben; wie die Auflöſung annimmt. Dieſes erläutert 435.

458. Ex. Für $\varepsilon = 2$; $n = 1$; $\pi = 3$ kömmt $m = \frac{\varkappa + 3}{3}$; $A = \sqrt[3]{a : mm.(m-1)}$;

$$m + \delta = -\frac{(\varkappa - 3)}{6} \pm \sqrt{\left(\left(\frac{\varkappa - 3}{6}\right)^2 - \frac{(\varkappa - 3).\varkappa}{9}\right)}$$

459. Zuſ. Der Werth $y = Ax^m$ (454) thut der Differentialgleichung völlig genug.

460. Zuſ. Hier kann δ unmöglich werden. Z. E. die Gröſſe unter dem Wurzelzeichen in 458 iſt $\frac{-(\varkappa - 3).(\varkappa + 1)}{12}$; ſind nun beyde Factoren zugleich bejaht oder verneint, ſo iſt dieſe Wurzelgröſſe unmöglich.

461. Zuſ. Wenn $n + \pi - \varepsilon + 1 = 0$ ſo ſcheint $m = \infty$ zu werden. (454) Eigentlich kömmt alsdenn $m.0 - \pi = \varkappa$: Soll ſich alſo die Methode anbringen laſſen, ſo muß $\varkappa = -\pi$ ſeyn; und alsdenn giebt ſich m aus der Gleichung $m^{\pi-\varepsilon}$ $m.(m-1)\ldots(m-\varepsilon+1) - a = 0$ und A bleibt unbeſtimmt. Man kann auch nach 446 verfahren, welches nöthig iſt, wenn nicht $\varkappa = -\pi$. Alsdenn ſetzte man nähmlich $m^{\pi-\varepsilon}$. $m.(m-1)\ldots(m-\varepsilon+1) = 0$ welches m gäbe; und $\varkappa = \lambda + \delta$ welches δ gäbe; da bliebe A oder B unbeſtimmt, und eines von beyden beſtimmte ſich, wenn man das, was in die Potenzen $\lambda + \delta$; und $\varkappa$; von x multiplicirt wird, zuſammen = 0 ſetzte.

461. Anm. Differentialgleichungen wie (456) auf welche des erſten Grades zu bringen, und alsdenn wenigſtens zuweilen zu integriren, lehret Joh. Bernoulli Op. T. IIII. n. 162. und das hier gebrauchte Verfahren ſteht bey ihm daſ. am Ende. Eben das lehret von

dieſen und andern Differentialgleichungen Euler Comm. Ac. Petrop. T. III. p. 124.

462. Aufg. z in $aa\,ttddz - cczdt^2 + aaddz = 0$ zu finden.

Aufl. I. Wenn $z = At^m + Bt^{m+\delta} \ldots$ und $dt = 1$; ſo fallen die Exponenten m; $m-2$ in eine lothrechte Reihe (437) alſo giebt das Parallelogramm hier keine Reihe. Die drey Glieder der Gleichung geben aber nach der Ordnung, wie ſie von der linken nach der rechten gehen, folgendes:

$$\begin{array}{ll} m.(m-1).\,aa.\,At^m & +(m+\delta).(m+\delta-1)\,aa\,Bt^{m+\delta} \\ -ccA & \quad -ccB \\ & +aa.\,m.\,(m-1)\,At^{m-2} \end{array}$$

Hier iſt $m.\,(m-1).\,aa = cc$ alſo $m = \frac{1}{2} \pm \surd\,(\frac{1}{4} + cc : aa)$ und $\delta = -2$.

II. Für eine andere Reihe mache man folgendes

$$\begin{array}{ll} & +m.\,(m-1)\,aaAt^m \\ & -ccA \\ +m.\,(m-1).\,aaAt^{m-2} & +(m+\delta)(m+\delta-1). \\ aaBt^{m+\delta-2} & \end{array}$$

Damit hier das erſte Glied verſchwindet, muß $m = 0$ oder $m = 1$ ſeyn: A bleibt unbeſtimmt, und es iſt $\delta = 2$.

III. Endlich kann man auch die erſten Glieder der Reihen, die aus $-ccz$; und $aattddz$ entſtehen, unter das dritte der Reihe, die aus $aaddz$ entſteht, ſetzen; deſſen Coefficient $(m+$

$2\delta)$

$2\delta)(m+2\delta-1).\ aaC$ und der Exponent $m+2\delta-2$ iſt. So kömmt $m+2\delta-2=m$ oder $\delta=1$ und in der Reihe aus $aaddz$ zweytem Gliede bleibt der Coefficient $(m+\delta).(m+\delta-1).\ aaB$ allein, ohne andere. Dieſer verſchwindet, wenn $m=0$ und $\delta=1$ und B bleibt unbeſtimmt. So bekömmt man $z=A+Bt+Ct^2\ldots+Lt^\varepsilon+Mt^{\varepsilon+1}+Nt^{\varepsilon+2}\ldots$ und die Gleichungsreihe wird

$$\begin{array}{l} *\quad *\ +2aaCt^2\ldots\ +\varepsilon.(\varepsilon-1)\ aaLt^\varepsilon \\ -ccA-ccBt-ccC\ldots\ -\ ccL \\ +2aaC+6aaD+12aaE\ldots+(\varepsilon+2.)\ \varepsilon+1)\,aaN \end{array}$$

Iſt hier $L=0$ ſo verſchwindet N; wird alſo $A=0$ geſetzt, ſo verſchwinden C; E .. alle Coefficienten bey geraden Exponenten, hingegen alle bey ungeraden, wenn $B=0$; daß alſo hierinnen die beyden vorigen Reihen enthalten ſind, welche von $m=0$ und $m-1$ entſtanden. Jede bricht ab, wenn irgend einer ihrer Coefficienten $=0$ geſetzt wird, weil $N=\dfrac{cc-\varepsilon.(\varepsilon-1).\ aa}{(\varepsilon+2).(\varepsilon+1)\ aa}$ .. L. Es ſey l der Coefficient bey dem Exponenten $\varepsilon-2$; ſo iſt $L=(cc-2).(\varepsilon-3).\ aa)\ l:\varepsilon.(\varepsilon-1).\ aa$; Iſt alſo nicht $l=0$ ſo muß $cc:aa=(\varepsilon-2).(\varepsilon-3)$ ſeyn, wenn $L=0$ ſeyn, und die Reihe abbrechen ſoll. Dieſe Differentialgleichung kömmt bey einer Aufgabe vor, die Herr Euler Act. Erud. Lipſ. Iun. 1744. aufgelöſet hat.

463. Aufg. In einer Differentialgleichung des erſten Grades y durch eine nach x ſteigende Reihe wie in Alg. 694. auszudrücken.

I. α) Man richte die Gleichung ſo ein, daß ein Theil von ihr aus dy ganz allein beſteht β) Dieſes iſt allemahl möglich, denn wofern ein ſolcher Theil nicht von Anfange ſchon in der Gleichung enthalten iſt, ſo darf man nur die ganze Gleichung mit dem, was in dy multiplicirt iſt, dividiren. γ) Giebt es verſchiedene Theile, die dy enthalten, ſo kann man zu gegenwärtigem den wählen, wo es nur mit einer beſtändigen Gröſſe multiplicirt wird. δ) Iſt dergleichen nicht vorhanden; ſo muß man einen wählen, der x oder y enthält, und alſo damit die ganze Gleichung dividiren. ε) Kömmt alsdenn ein Theil der Gleichung, deſſen ganzer Diviſor nur x von der erſten Abmeſſung mit einer beſtändigen Gröſſe multiplicirt iſt, der ſo $\frac{adx}{bx}$ ausſähe, ſo ſchreibe man e + u ſtatt x. ζ) So verwandele man die Glieder, deren Diviſor x oder b + x enthält, nach Alg. 6. in unendliche Reihen.

Exempel. Wo dx = 1 (419) zu β; γ; ady — xy — ab = 0 giebt $dy - \frac{xy}{a} - b = 0$; zu δ); ydy = 1 — xyy giebt $dy = \frac{1}{y} - xx;$

xx; zu ε); xdy — xy — 1 = o giebt dy — $\frac{(y+1)}{e+x}$ = o folglich dy — (y+1). $\left(\frac{1}{e} - \frac{x}{ee}\ldots\right)$ = o.

II. Alle Theile der Gleichung, welche y und dy beydes zugleich oder eines allein enthalten, ſchreibe man linker Hand in eine Columne untereinander, ſo, daß der Theil, der aus dy allein beſteht, die oberſte Stelle einnimmt.

III. Mit dieſem Theile ſchreibe man in eine Zeile alle Theile der Gleichung, die nur x enthalten; ſo, daß zur linken Hand zuerſt die niedrigſten ſtehen, das iſt, diejenigen, wo x den größten verneinten Exponenten, oder wenn keine verneinten Exponenten da ſind, den kleinſten bejahten hat.

IIII. Wenn x keine verneinten Exponenten hat, ſo nehme man o für den erſten Theil der Reihe dy an; und alſo c für den erſten Theil der Reihe y, wo c die beſtändige Gröſſe bedeutet, die beym Integriren pflegt hinzugeſetzt zu werden. Dieſe Werthe von y und dy, ſetze man in die übrigen Theile der Columne, und verfahre ferner wie Alg. 694; nur daß man ſtatt des Dividirens integrirt.

V. Ex. xdy + dy + yydx = xxdx + dx; wo man dx = 1 ſetzt. Alſo kömmt

$$\begin{array}{lllll}
dy = & +1 & * & & +x^2 \\
 & -cc & -(2c+1)Bx & & -2C \\
 & & & & -BB \\
 & & & & -2cC \\
xdy = & & +B & & +2C \\
yy = & +cc & +2cB & & +BB \\
 & & & & +2cC \\
\hline
\end{array}$$

$$y = c + (1-cc)x - \frac{(2c+1)}{2}Bx^2 + \frac{1-2C-BB-2cC}{3}x^3 ..$$

Weil von der Reihe dy das erſte Glied = o, ſo ſind die erſten Glieder von xdy; und yy; o und cc. Das zwente Glied der Reihe dy nun muß enthalten was in dx und nicht mit in x multiplicirt iſt. In der Gleichung ſelbſt nun befindet ſich ſchon der Theil dx der hier in einer Zeile mit dy geſchrieben iſt: dazu kömmt hier noch (nach Alg. 694.) der Reihe yy erſter Theil + cc aber mit entgegeugeſetztem Zeichen alſo bekömmt die Reihe dy den zwenten Theil 1 — cc; dieſes giebt für y den zwenten Theil (1 — cc)x. Man nenne deſſelben Coefficienten B; ſo ſind der Reihen xdy; yy; zwente Glieder; + Bx und + 2cBx; die alſo, weil die Gleichung ſelbſt keinen Theil mit x allein von der erſten Abmeſſung enthielte, — (2c + 1) Bx zum dritten Gliede der Reihe dy geben: So wird

$$-\frac{(2c+1).\ B}{2}x^2$$ der Reihe y drittes Glied;

und

und wenn man wiederum den Coefficienten

$\frac{-(2c+1)B}{2} = C$ ſetzt, ſo ſind der Reihen

xdy; yy; dritte Glieder $+ 2Cxx$ und $+ (BB + 2cC).xx$ welches mit entgegengeſetzten Zeichen zu xx das ſchon als ein Theil der Gleichung in der oberſten Zeile ſteht, addirt, $(1 - 2C - 2cC - BB)xx$ für der Reihe dy und folglich

$\frac{1 - 2C - 2cC - BB}{3} x^3$ für der Reihe y

drittes Glied giebt: So läßt ſich die Arbeit immer weiter fortſetzen.

VI. Hat x verneinte Exponenten, ſo nehme man für der Reihe dy erſten Theil, den niedrigſten in der Zeile (III) an, ſo giebt die Integrirung den erſten von y, und ſolchergeſtalt fährt man wie vorhin fort.

VII. Ex. $xxdy + xxy = x - 1$ giebt nach I. δ und III;

$$dy = -x^{-2} + x^{-1}$$
$$y = +1$$
$$+1$$

Aus $-\frac{1}{xx}$ als dem erſten Theile von dy wird

$+\frac{1}{x}$ als der erſte Theil von y; und dieſer mit

entgegengeſetztem Zeichen in die oberſte Zeile zu

 dem

dem ſchon da befindlichen $+ \frac{1}{x}$ geſetzt giebt o für den zweyten Theil der Reihe dy. Alſo wird $y = \frac{1}{x}$ der völlige Werth ſeyn, der der Gleichung genug thut. Man könnte zwar auch aus $dy = - \frac{1}{xx} + o$ ſchlieſſen $y = + \frac{1}{x} +$ o aber die Rechnung wird zeigen, daß $c = o$ ſeyn muß. Der Schluß thut nähmlich nicht dar, daß die beſtändige Gröſſe, die man zu $+ \frac{1}{x}$ addiren kann, von o unterſchieden ſeyn muß, weil die Conſt (204) auch $= o$ ſeyn kann wie in 208.

VII. Eigentlich hätte man in dieſem Exempel nach I ε; verfahren ſollen. Die Urſache von dieſer Regel iſt, weil ſich $\frac{adx}{bx}$ nur logarithmiſch integriren läßt, welches ſich hieher nicht ſchickt. Weil man nun in dem Exempel den Theil $+ \frac{1}{x}$ von dy nicht integrirte, in dem er ſich ſelbſt aufhob, ſo war dieſe Veränderung nicht nöthig.

VIII. Wäre die Gleichung $xxdy + xxy = 3x - 1$ geweſen, ſo wäre der Reihe dy zweytes Glied nach eben dem Verfahren wie in VI; $+ \frac{2dx}{x}$ geworden, das hätte für der Reihe

y zweytes Glied 2 l x gegeben. Dieſes nun kann man hier nicht brauchen, weil die Potenzen von x in der Reihe für y nach ihren Graden folgen ſollen, welche Ordnung durch den Logarithmen unterbrochen wird. Daher hätte man nach I. ε.

$$dy + y = -\frac{1}{(b+u)^2} + \frac{3}{b+u}$$ gemacht,

wo ſich die Theile rechter Hand in eine nach u ſteigende Reihe verwandeln laſſen. Solchergeſtalt erhält man

$$dy = o + \frac{3b-1}{bb} + \frac{3b-2}{b^3}u + \frac{3b-3}{b^4}u^2 \ldots$$

$$\quad\; - c \qquad\quad - B \qquad\quad - C$$

$$y = c + \left(\frac{3b-1}{bb} - c\right)u + \left(\frac{3b-2}{b^3} - B\right).$$

$$\tfrac{1}{2}uu + \left(\frac{3b-3}{b^4} - C\right).\tfrac{1}{3}u^3 \ldots$$

Nähmlich $\frac{3b-1}{bb} + \frac{3b-2}{b^3}u$

$$+ \frac{3b-3}{b^4}u^2 \ldots = \frac{3}{b+u} - \frac{1}{(b+u)^2}$$

und B iſt der Reihe y zweyter Coefficient

$= \frac{3b-1}{bb}. - c$; ſo C ihr dritter =

$\left(\frac{3b-2}{b^3} - B\right).\tfrac{1}{2}$ u. ſ. w. Will man hier

y für

y für ein gegebenes x haben, ſo drücke man x durch einen groſſen Theil b und einen kleinen u aus; z. E. für x = 1001 ſetze man b = 1000; u = 1; ſo findet man y unmittelbar aus der Reihe für u = 1 d. i. für x = 1001.

Eine Reihe aber, die y unmittelbar durch x ausdrückte, läßt ſich ſo nicht finden: denn wollte man x — b ſtatt u ſetzen, ſo müßte man alle Potenzen von u machen, um alle Theile zu haben, die nur b ohne eine beſtändige Gröſſe enthielten und zuſammen in das erſte Glied dieſer neuen Reihe gehörten, u. ſ. w.

Das Parallelogramm gäbe hier für eine ſteigende Reihe $y = Ax^{-1} + B + Cx \ldots$ aber man fande für den erſten Coefficienten zwo Gleichungen $1 - A = 0$ und $A + 3 = 0$ welche nicht zuſammen ſtatt finden können; alſo giebt es keine ſteigende Reihe unmittelbar durch x.

X. Ex. Bey $dy - 1 : y = -xx$ ſetze man

$$\begin{array}{rl} dy = & 0 + c - c^3 x - xx \\ & \qquad\qquad\quad + \tfrac{3}{2} c^5 \\ -1 : y = & - c + c^3 \ldots - \tfrac{3}{2} c^5 \\ \hline \end{array}$$

$$y = 1 : c + cx - \frac{c^3 xx}{2} + \frac{3c^5 - 2}{2} x^3 \ldots$$

Wenn man nähmlich $\frac{1}{2}$ für das erſte Glied von y annimmt, ſo kömmt — c für das erſte von y^{-1} und alſo + c für das zweyte von dy; daher + cx für

für das zweyte von y; folglich von $\left(\frac{1}{c}+cx\right)^{-1}$ das zweyte Glied $+ c^3 x$ welches mit entgegengeſetzten Zeichen das dritte von dy und folglich $-\frac{c^3 xx}{2}$ zum dritten von y giebt. Ferner wird von $\left(1 : c + cx - \frac{c^3 xx}{2}\right)^{-1}$ das dritte Glied $- \frac{3}{2} c^5 xx$, dieſes mit entgegengeſetzten Zeichen zu dem ſchon oben befindlichen geſetzt, giebt das vierte Glied von dy und alſo von y u. ſ. w.

XI. Das bisherige iſt Newtons Regel Meth. of Flux. Prob. 2. nur habe ich ſie etwas anders und ſo vorgetragen, daß man den Grund davon leichter einſehen kann. Wie ſie bey dem Newton ausſieht, wird folgendes zeigen: Er ſetzt zum voraus, daß man auf der einen Seite des Gleichheitszeichens; $\frac{dy}{dx}$ auf den andern den Werth dieſes Bruches in endlichen Gröſſen ausgedrückt hat. Es ſey $\frac{dy}{dx} = 1 - 3x + y + xx + xy$; ſo iſt ſein Verfahren folgendes:

	$1 - 3x + xx$
y	$* + x - xx + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{30}x^5$
$+ xy$	$* \quad * \quad + 1 \quad - 1 \quad + \frac{1}{3} \quad - \frac{1}{6}$
Summe	$1 - 2 + 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{6} - \frac{4}{30}$

Die

Die Theile der Gleichung, welche nur x enthalten, ſchreibt er in die horizontale Zeile, und die, welche y enthalten, in die verticale Columne. Nun nimmt er für der Reihe y erſtes Glied, den erſten Theil linker Hand in der Zeile, mit x multiplicirt, und mit dem Exponenten, den er nach dieſer Multiplication hat dividirt, mit einem Worte, ſein Integral, welches hier x iſt. Dieſes erſte Glied braucht er, die erſten Glieder der Reihen zu erhalten, welche aus den Theilen der ſenkrechten Columne werden, und hier x und xx ſind. Der Reihe y erſter Theil x, zu — 3x in der oberſten Zeile geſetzt giebt — 2x; daraus folgt durch die Integration der Reihe y zweytes Glied — xx und der Reihe xy zweytes Glied — x^3. Nun hebt ſich der Reihe y zweytes Glied, mit dem erſten der Reihe xy auf, das eben den Exponenten hat, und bleibt nur xx im dritten Theile der oberſten Zeile übrig, daraus durch die Integration der Reihe y drittes Glied $\frac{1}{3}x^3$ und alſo der Reihe xy drittes Glied $\frac{1}{3}x^4$ folgt. Die Glieder, welche den Würfel von x enthalten, betragen zuſammen — $\frac{2}{3}x^3$ alſo wird durch die Integration der Reihe y viertes Glied; — $\frac{1}{6}x^4$ u. ſ. w.

Man ſieht leicht, daß Newtons Verfahren nur der äuſerlichen Geſtalt nach von dem meinigen unterſchieden iſt. Ich hätte die gegebene Gleichung ſo eingerichtet: dy — y — xy = 1 — 3x + xx und die Glieder zur linken des Gleichheits-

heitszeichens, hätten die Columne ausgemacht. Newton läßt dy weg, und ſchreibt die übrigen Theile der Columne mit dem Zeichen, das demjenigen, das ſie bey mir hätten, entgegengeſetzt iſt; das ſie nähmlich bekämen, wenn ſie auf die rechte Seite, zu den Theilen die nur x enthalten, wären gebracht worden. Aus dem erſten Theile ſeiner oberſten Zeile aber, findet er das erſte Glied der Reihe für y eben ſo, wie ich es nach IIII gefunden hätte, wenn ich $c = o$ angenommen hätte, wie Newton thut, ob er wohl auch lehret, wie man die beſtändige Gröſſe zu addiren hat. So erhält er daraus die Glieder der Reihen, welche den Theilen der Columne zugehören; dieſe Glieder aber addirt er mit den Zeichen, welche ſie durch die Rechnung bekommen, nicht mit den entgegengeſetzten, zu den Theilen der Zeile, die eben die Exponenten haben; dieſe Glieder haben nähmlich, nur erwähntermaſſen, in Newtons Rechnung Zeichen, die denen entgegengeſetzt ſind, welche ſie in der meinigen hätten. Alſo iſt meine Regel der newtoniſchen vollkommen gleichgültig.

464. Zuſ. Man kann auch ſo eine fallende Reihe erhalten. Z. E. aus $dy - y : xx = 2x + 3 - 4 : x + 1 : 2x$ folgendergeſtalt:

$$
\begin{array}{l}
dy = 2x + 3 - 4 \cdot x^{-1} + 1 \cdot x^{-2} \\
\qquad\quad +1 \quad +4 \qquad +c \qquad -(c+1)x^{-2} \\
-y : x^2 = -1 - 4 \qquad -c \qquad +c+1 \\
\hline
y = xx + 4x + c - (c+1) : x + (c+1) : 2xx \ldots
\end{array}
$$

Hätte ſich hier, was in $1 : x$ multiplicirt iſt, nicht von ſich ſelbſt aufgehoben, ſo wäre das Verfahren auf dieſe Art nicht fortzuſetzen geweſen. (463; VII. VIII.)

465.

465. Anm. Was von 419 bis hieher enthalten iſt, habe ich in einer 1745. zu Leipzig gehaltenen Diſputation: De reſolutione aequationum differentialium per ſeries; ad Newt. meth. flux. Prob. II. meditata vorgetragen. Der Gebrauch des Parallelogramms, den ich in einer vorhergehenden gezeigt, (Alg. 311.) brachte mich darauf. Ich habe indeſſen ſchon damahls in der Vorrede erinnert, daß man den Reihen keinen ſo hohen Werth beylegen dürfe, darüber die andern Methoden, Integrale durch endliche Ausdrückungen zu finden, zu vernachläßigen. Ich zeigte auch damahls an, was ich in Cramers Anmerkungen zu Jac. Bernoullis Werken, n. CI. not. a. geleſen hatte, daß Herr Nicolaus Bernoulli eine allgemeinere Methode als das Parallelogramm erfunden hätte. Ich hatte damahls auf mein Befragen dieſerwegen von Herr Eulern keine Nachricht erhalten können; als ich aber meine Schrift Herrn Daniel Bernoulli nach Baſel ſchickte, hat derſelbe die Gewogenheit gehabt, mir einen Auszug aus Briefen von 1733; und 1736; an Stirlingen und Cramern zu überſenden, welche dieſe Methode enthalten. Sie beſteht kürzlich in Folgendem:

466. Aufg. Alle mögliche Reihen, durch die ſich eine Gleichung auflöſen läßt, zu finden.

Aufl. Man ſetze $y = Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} \ldots$ wo jeder Exponent kleiner oder gröſſer als der folgende iſt, nachdem die Reihe ſteigen oder fallen ſoll. So verwandelt man die Gleichung in eine Reihe, wo die Glieder, die einerley Exponenten haben, folgendergeſtalt erkannt und die Exponenten und Coefficienten beſtimmt werden:

Für

Für eine ſteigende Reihe erwähle man die Glieder, in welchen x den kleinſten Exponenten hat, wobey man verſchiedene Vorausſetzungen macht, daß α erſtlich eine verneinte Zahl, denn 0; denn eine bejahte, bedeuten ſoll: Man nimmt nähmlich α nach jeder dieſer Vorausſetzungen zu beſtimmen, wenn es nöthig iſt, Theile der Gleichung mit zu Hülfe, in deren Exponenten α nicht iſt. A beſtimmt man wie gewöhnlich, wofern es nicht unbeſtimmt bleibt. So verhält man ſich mit den folgenden Gröſſen β; γ; . . . ſo daß α, β; γ; eine ſteigende Reihe ausmachen.

467. Er. Für $rrdy^2 - rr + yy = 0$ kömmt

$$yy = Ax^{2\alpha} + 2ABx^{\alpha+\beta} + 2ACx^{\alpha+\gamma} + 2AD^{\alpha+\delta} + 2AEx^{\alpha+\varepsilon}$$
$$+ BBx^{2\beta} + 2BCx^{\beta+\gamma} + 2BDx^{\beta+\delta} + 2BEx^{\beta+\varepsilon}$$
$$+ CCx^{2\gamma} + 2CDx^{\gamma+\delta} \ldots$$

$$rrdy^2 = \alpha^2 A^2 r^2 x^{2\alpha-2} + 2\alpha\beta ABr^2 x^{\alpha-\beta-2} + 2\alpha\gamma ACr^2 x^{\alpha+\gamma-2} + 2\alpha\delta ADrrx^{\alpha+\delta-2} \ldots$$
$$+ \beta\beta BBr^2 x^{2\beta-2} + 2\beta\gamma BDrrx^{\beta+\gamma-2}$$
$$+ \gamma\gamma CCrrx^{2\gamma-2} \ldots$$

$$-rr = -rr$$

Man ſuche eine ſteigende Reihe.

I. Fall.

I. Fall. Wenn α eine verneinte Zahl ſeyn ſoll, ſo kann nur der Exponent $2\alpha - 2$ der kleinſte unter allen ſeyn, alſo müßte der Coefficient deſſelben, folglich entweder α, oder A; $= 0$ ſeyn, welches beydes nicht ſtatt findet, und alſo zeigt, daß dieſe Vorausſetzung nicht gemacht werden darf.

II. Fall. Wenn $\alpha = 0$ ſo ſo iſt wieder, eben der vorige Exponent der kleinſte unter allen, und ſein Coefficient wird $= 0$ weil $\alpha = 0$; alſo findet dieſe Vorausſetzung ſtatt, und A bleibt unbeſtimmt; die Gleichungsreihe aber ſieht nun ſo aus.

$$\left.\begin{array}{l} AA - rr \\ + \beta\beta BBrrx^{2\beta - 2} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} + 2ABx^{\beta} \\ + 2\beta\gamma BCr^2 x^{\beta + \gamma - 2} \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} + 2ACx^{\gamma} \\ + BBx^{2\beta} \\ + 2\beta\delta BDrrx^{\beta + \delta - 2} \\ + \gamma\gamma CCrrx^{2\gamma - 2} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} + 2ADx^{\delta} \\ + 2BCx^{\beta + \gamma} \\ + 2\beta\varepsilon BErrx^{\beta + \varepsilon - 2} \\ + 2\gamma\delta CDrrx^{\gamma + \delta - 2} \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} + 2\beta\zeta BFrrx^{\beta + \zeta - 2} \\ + 2\gamma\varepsilon CErrx^{\gamma + \varepsilon - 2} \\ + \delta\delta DDrrx^{2\delta - 2} \end{array}\right\}$$

Die Theile, welche mit Klammern zuſammenhän-
gen, bekommen, wie die Folge zeigen wird, ei-
nerley Exponenten, wo ſich in den Coefficienten
griechiſche Buchſtaben befinden, da rühren die
Theile von $rrdy^2$ her.

Um nun β zu beſtimmen, nimmt man den Ex-
ponenten $2\beta - 2$, deſſen Coefficient allein oder
zuſammen mit $AA - rr$; $= 0$ ſeyn muß.
Wenn er allein $= 0$ ſeyn ſollte, ſo müßte entwe-
der β; oder B; $= 0$ ſeyn. Jenes findet nicht
ſtatt, weil $\beta > \alpha$ ſeyn ſoll. Wäre $B = 0$; und
β nicht $= 0$ ſo hätte man keinen andern Theil
der Gleichungsreihe mit $AA - rr$ in ein Glied
zu bringen, als den deſſen Exponent $2\beta - 2$ iſt.
Denn der, deſſen Exponent β iſt, geht alſo nicht
dazu an, und die andern enthalten alle noch γ u.
ſ. w. auſer β, daß ſich alſo β durch ſie nicht be-
ſtimmte, wenn man einen von ihnen $= 0$ ſetzte.
Alſo wäre $2\beta - 2 = 0$ oder $\beta = 1$; und weil B
$= 0$; auch $AA - rr = 0$; und $A = \pm r$ und
$B; C; D; \ldots = 0$ oder $y = \pm r$ und $dy = 0$;
welches allerdings der Gleichung auch genug
thut: Aber weil man einen veränderlichen Werth
von y ſucht, ſo läßt ſich nicht $B = 0$ ſetzen.
Folglich behält man nur $2\beta - 2 = 0$ und ſetzt
$AA - rr + BB\beta\beta rr = 0$ oder $BB = (rr - AA) : rr$.

Die Gröſſe γ zu beſtimmen, nimmt man den
Theil, deſſen Exponent $\beta + \gamma - 2$ oder $\gamma - 1$.
Wenn die vorhergefundenen Werthe von B; β;

α;

α; beybehalten werden, und A nicht $= o$ ſeyn ſoll, ſo kann des Theiles, deſſen Exponent $\gamma - 1$ iſt, Coefficient für ſich allein nicht $= o$ ſeyn. Sonſt müßte $C = o$ ſeyn, und daraus folgte, daß der Theil, welcher $\beta = 1$ zum Exponenten hat, auch $= o$ folglich A oder $B = o$ ſeyn müßte, welches doch nicht angeht. Alſo nehme man zu dem Theile, deſſen Exponent $\beta + \gamma - 2 = \gamma - 1$ iſt, noch den Theil, deſſen Exponent $\beta = 1$ iſt, damit beyde zuſammen ein Glied der Gleichungsreihe ausmachen; oder man ſetze $\gamma - 1 = 1$ und $\gamma = 2$ auch $2\gamma BCrr + 2AB = o$ und $C = - A : 2rr$.

Eben ſo beſtimmt ſich δ aus dem Theile, deſſen Exponent $\beta + \delta - 2 = \delta - 1$ iſt, und der mit den Theilen, deren Exponenten $\gamma = 2 = 2\beta = 2\gamma - 2$ ſind, zuſammen $= o$ ſeyn muß. Alſo iſt $\delta = 3$ und $D = - (2AC - BB - \gamma\gamma CCrr) : 2\delta BBr$ d. i. $= - B : 6rr$ weil $2AC + \gamma\gamma CCrr = o$. Wie vorhin bey C ſo wird hier auch erwieſen, daß D nicht $= o$ ſeyn kann, und eben ſo verhält es ſich mit E; F; u. ſ. w.

So findet man bey den folgenden Gliedern $\beta + \varepsilon - 2$ oder $\varepsilon - 1 = \delta = \beta + \gamma = \gamma + \delta - 2 = 3$ alſo $\varepsilon = 4$; und $E = - C : 12rr$; Ferner $\zeta = 5$; und folgendes Geſetz der Coefficienten $B = (rr - AA) : rr$; $C = - A : 1.2. rr$; $D = - B ; 2.3rr$, $E = - C : 3.4rr$; $F = - E : 4.5.rr$.

Ein Bogen, deſſen Sinus A iſt, heiſſe $\mathfrak{B}$ ſin A; und es ſey $y = \sin (x + \mathfrak{B} \sin A)$ ſo iſt

$$\frac{r dy}{\sqrt{(rr - yy)}} = dx;$$ (281) ferner ſey auch $y = \cos (x + \mathfrak{B} \sin A)$ oder $\pm \sqrt{(rr - yy)} = \sin (x + \mathfrak{B} \sin A)$ oder $-\frac{\mp r y dy}{y . \pm \sqrt{(rr - yy)}} = dx$ alſo $\frac{- r dy}{\sqrt{(rr - yy)}} = dx$. Die vorgegebene Gleichung $\frac{rrdy^2}{rr - yy} = dx^2$ begreift beyde unter ſich, und alſo bedeutet y entweder den Sinus, oder den Coſinus des Bogens, der $= x + \mathfrak{B} \sin A$ iſt. Nachdem alſo $A = 0$ oder $= r$ iſt, begreift dieſe Reihe die beyden 286; 297; unter ſich.

III. Fall. Wenn α bejaht ſeyn ſoll, ſetze man nur in der gefundenen Reihe $A = 0$ da die Reihe von Bx anfängt, welches ſoviel iſt, als wäre $\alpha = 1$;

Fallende Reihen giebt es nicht, denn in der Gleichungsreihe hätte der erſte Theil der Reihe, die aus yy entſteht, allein den höchſten Exponenten α; alſo müßte $A = 0$ ſeyn.

468. Anm Man könnte dieſe Reihe leichter folgendergeſtalt finden: Man nehme der vorgegebenen Gleichung ihre Differentialgleichung $2 rrdyddy + 2ydy = 0$ oder $rrddy + y = 0$. Dieſe giebt für $r = 1$;

α

$$\alpha(\alpha-1)Ax^{\alpha-2}+\beta(\beta-1)Bx^{\beta-2}+\gamma.(\gamma-1).Cx^{\gamma-2}\ldots$$
$$+Ax^{\alpha}\ \ldots\ldots$$

oder $\alpha=0$; $\beta=1$; $\gamma=\alpha+2=2$; $\delta=\beta+2=3$; $\varepsilon=\gamma+2=4$ u. ſ. w. wo A; B; unbeſtimmt bleiben, und $C=-\frac{A}{\gamma(\gamma-1)}$ $D=-\frac{B}{\delta.(\delta-1)}$ u. ſ. w. Dieſe Reihe iſt allgemeiner als die vorige (467) wo B beſtimmt war; denn jede höhere Differentialgleichung begreift mehr unter ſich als eine, die nicht ſo hoch iſt, weil man bey ihr mehrmahl integriren, und alſo auch mehr beſtändige Gröſſen addiren kann. (204)

469. **Ex.** Aus $xxddy - ny = 0$ wird $(\alpha(\alpha-1)-n)Ax^{\alpha}+(\beta(\beta-1)-n)Bx^{\beta}+(\gamma.(\gamma-1)-n)Cx^{\gamma}\ldots\ldots$ Setzt man hier jeden Coefficienten $=0$ ſo iſt $\alpha\alpha=\alpha+n$ alſo $\alpha=\frac{1}{2}\pm\surd(\frac{1}{4}+n)$ und weil eben die Gleichung für β herauskömmt, ſo ſetze man $\beta=\frac{1}{2}\mp\surd(\frac{1}{4}+n)$ da alsdenn bey beyden Exponenten die obern Zeichen für eine fallende, die untern für eine ſteigende Reihe gelten. Nun kömmt eben die Gleichung für γ, welches alſo entweder α oder β ſeyn müßte, und weil es keines von beyden ſeyn ſoll, gar nicht vorhanden ſeyn kann: alſo muß C u. ſ. w. $=0$ ſeyn; und der Werth von

y beſteht nur aus den gefundenen beyden Theilen, da A und B unbeſtimmt bleiben.

470. Zuſ. Dieſe Methode (466) iſt in der That allgemeiner als das newtoniſche Parallelogramm, beſonders deßwegen, weil ſie die Exponenten aus den Coefficienten der Differentiale beſtimmt; daher ſie Reihen geben kann, wo das Parallelogramm keine gäbe, und ſelbſt wenn ſie Reihen giebt, deren Exponenten mit den Exponenten der Reihen des Parallelogramms in einer Progreßion ſind, doch dieſe Reihen vollſtändiger, nähmlich mit mehr Gliedern giebt als das Parallelogramm. Das Parallelogramm kann z. E. $y = Ax + Bx^3 + Cx^5 \ldots$ geben, und dieſe Methode $y = \mathfrak{A}x + \mathfrak{B}x^2 + \mathfrak{C}x^3 + \mathfrak{D}x^4 + \mathfrak{E}x^5 \ldots$ wo $\mathfrak{B}$; $\mathfrak{D}$; unbeſtimmt bleiben, und wenn ſie $= 0$ geſetzt werden, die Reihe des Parallelogramms herauskömmt. Bey Gleichungen zwiſchen zwo veränderlichen Gröſſen aber, die keine Differentialgleichungen ſind, kann dieſe Methode, ſoviel ich einſehe, nichts anders geben als das Paralleogramm und das Parallelogramm iſt ihr da vielleicht noch vorzuziehen, weil man die Ordnung bey dem Verfahren nach demſelben leichter überſieht. Man vergleiche hiemit Alg. 737 . . 739. Vielleicht hat Newton ſeine Regel zuerſt die Gleichungen zwichen endlichen Gröſſen aufzulöſen erfunden, und nachgehends auf Differentialgleichungen erweitert. Daß mir übri-

rigens, ehe ich Unterricht von dieſer Methode erhalten habe, nicht unbekannt geweſen iſt, daß man die Exponenten aus den Coefficienten beſtimmen kann, wird aus 450; 453; 454; u. ſ. w. erhellen. Von der Integration durch Reihen handelt Euler Inſt. calc. Int. Vol. I. S. I. c. 3.

Von den Differentialen für gewiſſe Werthe der veränderlichen Gröſſe.

471. Aufg. Wenn y eine Function von x iſt, das Differential von y ſo vollſtändig auszudrücken, daß die höhern Differentiale nicht weggelaſſen werden.

Aufl. In dem Werthe von ym (151) ſey c = dx oder er ſey der nächſte nach dem Werthe y ſelbſt, ſo iſt $ym - y = dy = dy + \frac{d^2 y}{1.2} + \frac{d^3 y}{1.2.3} + \frac{d^4 y}{1.2.3.4} \ldots$ oder wenn $dy = pdx$; $dp = qdx$; $dq = rdx \ldots$ ſo iſt $dy = pdx + \frac{1}{2} qdx^2 + \frac{1}{6} rdx^3 \ldots$

472. Zuſ. Bey den gewöhnlichen Regeln des Differentiirens werden die folgenden Glieder dieſer Reihe weggelaſſen, weil $\frac{dy}{dx} = p + \frac{1}{2} qdx + \frac{1}{6} rdx^2 \ldots$ ſich in p verwandelt, wenn dx verſchwindet; daß alſo $dy = pdx$ die Differentialgleichung für ein verſchwindendes dx iſt (20).

Aber wenn für einen beſondern Werth von x; die Gröſſe $p = 0$ würde, ſo wäre dafür $dy = \frac{1}{2} q dx^2 + \frac{1}{6} r dx^3 \ldots$ und alſo für ein verſchwindendes dx; $\frac{dy}{dx^2} = \frac{1}{2} q$ oder $dy = \frac{1}{2} q dx^2$. Machte einerley Werth von x, zugleich p und $q = 0$; ſo erhellt, daß eben ſo $dy = \frac{1}{6} r dx^3$ ſeyn wird; u. ſ. w. In ſolchen Fällen verſchwindet alſo dy in Vergleichung mit Unendlichkleinen der erſten Ordnung (11). Dieſe Betrachtungen kommen bey den gröߠten und kleinſten vor (155).

473. Ex. Für $y = (a - x) x$ iſt $p = a - 2x$ $q = - 2$; $r = 0 \ldots$ alſo das vollſtändige $dy = (a - 2x) . dx - 2 dx^2$. Für $2x = a$ wird alſo $dy = - 2 dx^2$.

474. Zuſ. Man findet dieſen Werth von dy für einen gewiſſen Werth von x z. E. für $x = a$ auch unmittelbar aus den Regeln des Differentiirens (20) ſo: Man ſetze $x - a = z$; und ſetze $z + dz$ ſtatt z und ziehe den erſten Zuſtand von y vom zweyten ab, wobey man $z = 0$ ſetze.

Ex. Für $y = (x - a)^n . P + C$ wo n eine bejahte Zahl iſt, und P den Factor $x - a$ nicht enthält, wird der zweyte Zuſtand von $y = (z + dz)^n . (P + dP) + C = dx^n . (P + dP) + C$; alſo wird der Werth von dy hier $P dx^n$ wie ſchon (16) vorgekommen iſt. Dieſes Verfahren iſt oft bequemer als die Betrachtung der Reihe (472).

475. Ex. Das Differential von $y = x^x$ für den Fall zu finden, da $x = \frac{1}{e}$ (232). Weil überhaupt $dy = y.(1 + lx).dx$ (236) ſo würde dieſes hier = o. Man brauche alſo die Reihe (472); da iſt $p = y(lx + 1)$; $q = y.(lx + 1)^2 + \frac{y}{x}$. Für $x + \frac{1}{e}$ wird alſo $q =$

$\left(\frac{1}{e}\right)^{(1-e):e}$ und der geſuchte Werth von

$dy = \frac{1}{2} e^{(1-e):e.} dx^2$.

476. Zuſ. Wenn die Gleichung zwiſchen x und y vom erſten Grade $y = \alpha x + b$ iſt, alſo $dy = \alpha dx$; ſo iſt $p = \alpha$ und alſo nie = o, was auch x für einen Werth hat, daher hier dieſe Erinnerungen nicht vorkommen. Wenn man die Sache nach 16 betrachtet wie in 474; ſo erhellt ebenfalls, daß $(x + dx) - x = dx$ auch wenn x in Vergleichung mit dx verſchwindet.

Betrachtungen über die Differentiale der Functionen, die zwo veränderliche Gröſſen enthalten.

477. Lehrſ. Jede gleichartige ganze oder gebrochne Function von x; y; läßt ſich, wenn $y = zx$ geſetzt wird, durch ein Product

duct aus einer Potenz von x in eine Function von z ausdrücken.

Bew. A; B; ſollen zwo ganze rationale oder irrationale gleichartige Functionen von x; y; ſeyn, ſo wird $A = x^{\lambda} . Z$; $B = x^{\varkappa} W$ daß Z; W; Functionen von z ſind (415) alſo $\frac{A}{B} = x^{\lambda - \varkappa} . \frac{Z}{W}$. Nun kann $\frac{A}{B}$ jede Function des Lehrſatzes vorſtellen, und $\frac{Z}{W} = T$ iſt eine Function von z. Es ſey noch $\lambda - \varkappa = n$; ſo iſt $V = x^n . T$.

478. Zuſ. Wenn $dT = R . dz$ wo R eine Function von z iſt, ſo iſt $dV = nx^{n-1} T dx + x^n R dz$. Nun ſoll auch $dV = Pdx + Qdy$ ſeyn. Weil $dy = zdx + xdz$ ſo iſt $dV = Pdx + Qzdx + Qxdz$. Nun müſſen beyde Ausdrückungen von dV noch gleich bleiben, wenn man auch entweder x oder z unveränderlich ſetzte, weil y durch x nicht beſtimmt wird, und ſich alſo ſo verändern könnte, daß z ungeändert bliebe, indem ſich x ändert, oder auch umgekehrt x ungeändert bleiben kann, indem ſich z ändert. Alſo müſſen in beyden Ausdrückungen von dV, die Theile, welche dx enthalten, unter ſich, und die,

wel-

welche dz enthalten, auch unter ſich, gleich geſetzt werden, und es iſt $x^n R = Qx$; und $nx^{n-1} T = P + Qz$; die letzte Gleichung iſt ſoviel als $\frac{nV}{x} = P + \frac{Qy}{x}$; folglich $nV = Px + Qy$. Eine merkwürdige Eigenſchaft gleichartiger Gleichungen, deren Abmeſſung n iſt.

479. Ex. $V = \frac{\surd(y^e + x^e)}{y - x}$; giebt $dV =$

$$\frac{\frac{1}{2}e.(y^{e-1}dy + x^{e-1}dx).(y-x) - (dy-dx).(y^e + x^e)}{M}$$

wo $M = (y - x)^2.\surd(y^e + x^e)$. Alſo

$$P = \frac{(1 - \frac{1}{2}e)\,x^e + \frac{1}{2}ex^{e-1}y + y^e}{M};$$

$$Q = \frac{(\frac{1}{2}e - 1).\,y^e - \frac{1}{2}ey^{e-1}x - x^e}{M}$$

und der Zähler von $Px + Qy$; den gemeinſchaftlichen Nenner weggelaſſen:

$$(1 - \tfrac{1}{2}e).\,x^{e+1} + \left.\begin{matrix}\tfrac{1}{2}e\\ -1\end{matrix}\right]x^e y + \left.\begin{matrix}1\\ -\tfrac{1}{2}e\end{matrix}\right]y^e x + \left.\begin{matrix}\tfrac{1}{2}e\\ -1\end{matrix}\right]y^{e+1}$$

$$= (\tfrac{1}{2}e - 1).\,(x^e.(y - x) + y^e.(y - x))$$

$= (\frac{1}{2}e - 1).(x^e + y^e).(y - x)$ welches alſo mit M dividirt $Px + Qy = (\frac{1}{2}e - 1).V$ giebt.

Die

Die Abmeſſung der Function iſt nähmlich $\frac{1}{2}$ e im Dividendus, 1 im Diviſor, alſo $\frac{1}{2}$ e — 1.

480. Zuſ. Für n = 0 (483) iſt Px + Qx = 0 wäre im Exempel 484; e = 2 ſo wäre von

$$V = \frac{\sqrt{(y^2 + x^2}}{y - x}$$ die Abmeſſung = 0. und

Px + Qy = (1 — 1). V = 0.

481. Lehrſ. V ſey eine Function von x; y; vermiſcht. Man differentiire V ſo, daß man nur x veränderlich ſetzt, und dieſes Differential wieder, ſo daß man nur y veränderlich ſetzt. Zweytens differentiire man V ſo, daß man nur y veränderlich ſetzt; und dieſes Differential wieder, ſo daß man nur x veränderlich ſetzt. Ich behaupte, die zweyte Differentiation werde in beyden Fällen einerley geben.

Exempel. Es ſey V = xy; ſo iſt

I) erſtes Differ. ydx; zweytes dy dx.

II) erſtes Diff. xdy zweytes dxdy.

Bew. Man ſetze δx; δy; ſind endliche Gröſſen, um welche ſich x; y; verändern; und es verwandele ſich V in ρ wenn man x + δx ſtatt x ſetzt, aber y nicht ändert, in σ wenn man y + δy ſtatt y ſetzt, ohne x zu ändern, und in τ wenn man zugleich x + δx ſtatt x und y + δy ſtatt y ſetzt. Man kann jeden Theil der Function, ſie mag nun rational oder irrational ſeyn, durch dieſe Subſtitutionen vermittelſt des Binomialſatzes in

un-

unendliche Reihen verwandeln, und die Glieder dieſer Reihen, in denen δx; δy; oder beyde zugleich, auf einerley Art vorhanden ſind, zuſammen als eines anſehen. Ferner wird ſich, wenn man V von τ abzieht, in τ alles aufheben, was weder δx, noch δy enthält, weil dieſes eben ſo in V zu finden iſt. Alſo beſteht $\tau - V$ aus folgenden Arten von Theilen: aus ſolchen, die I) nur δx; II) nur δy; III) beyde vermengt enthalten. Es läßt ſich alſo folgendergeſtalt ausdrücken:

$$\begin{aligned}\tau - V = {} & \alpha.\,\delta x + \beta.\,\delta x^2 \ldots \text{(I)} = a\,\delta x \\ & + \varepsilon.\,\delta y + \zeta.\,\delta y^2 \ldots \text{(II)} = b\,\delta y \\ & \left.\begin{array}{l} + \theta.\,\delta x\,\delta y + \eta.\,\delta x\,\delta y^2 \ldots \\ + \varkappa.\,\delta x^2\,\delta y + \lambda.\,\delta x^2\,\delta y^2 \ldots \end{array}\right\}\text{(III)} = c\,\delta x\,\delta y \\ & \quad \vdots \qquad \vdots \end{aligned}$$

wo α; β; ε; ζ; θ; η; $\varkappa$; λ; Functionen von x; y; vermengt ſeyn können; a aber enthält noch über dieſes δx; und b noch δy und c beydes. Nun verwandelt ſich $\tau - V$ für

$\delta y = 0$ in $a\,\delta x = \rho - V$

$\delta x = 0$ in $b\,\delta y = \sigma - V$

Man ſetze ferner $y + \delta y$ ſtatt y in $a\,\delta x$; ſo verwandelt ſich dadurch ρ in τ und V in σ. (Es iſt nähmlich offenbahr einerley, ob man gleich auf einmahl $x + \delta x$ und $y + \delta y$ ſtatt x und y ſetzt V in τ zu verwandeln, oder ob man dieſe beyden Arbeiten eine nach der andern vornimmt, und zu-

erſt V in ρ, nach dieſem ρ in τ verwandelt.) Solchergeſtalt verwandelt ſich $a\,\delta x$ in $\tau - \sigma$ welches als der zweyte Werth von $a\delta x$ angeſehen werden kann, der erſte davon abgezogen giebt $\tau - \sigma - \varrho + V$, für das, was man erhält, wenn man erſt ſucht, um wieviel ſich V verändert, wenn nur x veränderlich iſt, und um wieviel ſich dieſe Veränderung von V verändert, wenn nur y veränderlich iſt.

Nun ſetze man $x + \delta x$ ſtatt x in $b\,\delta y$; ſo verwandelt ſich σ in τ; V in ρ; $b\,\delta y$ oder $\sigma - V$ in $\tau - \varrho$; Von dieſem zweyten Werthe der Gröſſe $b\delta y$ den erſten abgezogen, läßt $\tau - \varrho\ \sigma + V$ für das, was man erhält, wenn man erſt ſucht, um wie viel ſich V verändert, wenn nur y veränderlich iſt, und um wieviel ſich dieſe Veränderung von V verändert, wenn nur x veränderlich iſt. Es kömmt alſo in beyden Fällen einerley heraus, und da dieſes für jede Veränderungen von x und y richtig iſt, ſo gilt es auch für verſchwindende, oder Differentiale.

482. Ex. Wenn $V = ax^2 - bxy + cy^2$ ſo iſt

$$\tau - V = \left.\begin{matrix} 2ax \\ -\ by \end{matrix}\right\}\delta x + a\,\delta x^2 \left.\begin{matrix} +\ 2cy \\ -\ bx \end{matrix}\right\}\delta y + c\,\delta y^2 - b\,\delta x.\,\delta y$$

alſo

alſo $\alpha = 2ax - by$; $\beta = a$; $\varepsilon = 2cy - bx$; $\zeta = c$; $\theta = -b$; $\varrho - V = \left.\begin{matrix} 2ax \\ - by \end{matrix}\right\} \delta x + a\delta x^2$ deſſen zweyter Zuſtand $(2ax - b.(y + \delta y))\delta x + a\delta x^2$ davon der erſte abgezogen $- b\delta y\delta x$ läßt, welches auch herauskömmt, wenn man von $\left.\begin{matrix} 2cy \\ - bx \end{matrix}\right\} \delta y + c\delta y^2$ den zweyten Zuſtand $2cy - b.(x + \delta x)\delta y + c\delta y^2$ macht, und davon den erſten abzieht.

483. Anm. Dieſes Exempel kann 472 zu erläutern gebraucht werden. Wäre $a = c = \frac{1}{2}b$ oder $\frac{V}{a} = x^2 - 2xy + y^2$ ſo wäre zwar überhaupt $\frac{dx}{2a} = (x-y)\,dx + (y-x)\,dy$ aber für $y = x$ würde das Verſchwindende $\tau - V = a.(dx - dy)^2$.

484. Willk. Satz. $\left(\frac{dV}{dy}\right)$ ſoll bedeuten, daß V ſo differentiiret wird, daß man nur y als veränderlich anſieht, und alsdenn das Differential mit dy dividirt, wodurch eine endliche Gröſſe herauskömmt. Eben ſo iſt $\left(\frac{dV}{dx}\right)$ zu verſtehen, nur x ſtatt y geſezt. So iſt in 481. $\left(\frac{dV}{dy}\right) = b$;

 $\left(\frac{dV}{dy}\right)$

$$\left(\frac{dV}{dy}\right) = a$$

485. Zuſ. Wenn $dV = Pdx + Qdy$; ſo iſt $\left(\frac{dV}{dx}\right) = P$; $\left(\frac{dV}{dy}\right) = Q$; und aus 481. $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$

486. Zuſ. Wenn eine Differentialgröſſe vorkömmt, wo x; y; und ihre Differentiale vermiſcht ſind, ſo heiſſe man P; alles, was in dx und Q alles was in dy multiplicirt wird, als, denn mache man $\left(\frac{dP}{dy}\right)$ und $\left(\frac{dQ}{dx}\right)$ Sind beyde nicht gleich, ſo kann die vorgegebene Differentialgröſſe nicht durch Differentiirung einer Function von x; y; entſtanden ſeyn, daß es alſo vergeblich wäre, eine ſolche Function, die ihr Integral ſeyn ſollte, zu ſuchen.

So giebt es keine Function, weder eine algebraiſche noch tranſcendentiſche, deren Differenzial $yxdx + xxdy$ wäre; weil hier $P = yx$; $Q = xx$ und $\left(\frac{dP}{dy}\right) = x$ aber $\frac{dQ}{dx} = 2x$

Von

Von den Differentialen der Functionen, die drey veränderliche Gröſſen enthalten.

487. Lehrſ. V ſey eine Function von drey veränderlichen Gröſſen x; y; z; und $dV = Pdx + Qdy + Rdz$ ſo iſt I) $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dy}\right)$ II) $\left(\frac{dP}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dx}\right)$ III) $\left(\frac{dQ}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dy}\right)$

Bew. Weil keine von den drey veränderlichen Gröſſen, durch die andere beſtimmt wird, ſo kann man welche man will für unveränderlich annehmen. Dieſes ſey erſtlich z; ſo iſt V eine Function von zwo veränderlichen Gröſſen, x; y; und das Differential dieſer Function $Pdx + Qdy$ und $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$ (485). Nun ſey y unveränderlich, alſo V eine Function von x; z; ihr Differential $Pdx + Rdz$ und $\left(\frac{dP}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dx}\right)$. Endlich x unveränderlich, V eine Function von y; z; ihr Differential $Qdy + Rdz$ und $\left(\frac{dQ}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dy}\right)$.

488. Zuſ. Es ſey

$$dP = p\,dx + s\,dy + t\,dz$$
$$dQ = \pi\,dx + q\,\delta y + u\,dz$$
$$dR = \varrho\,dx + \varphi\,dy + r\,dz$$

ſo iſt $\left(\frac{dP}{dy}\right) = s = \left(\frac{dQ}{dx}\right) = \pi$; $\left(\frac{dP}{dz}\right) = t = \left(\frac{dR}{dx}\right) = \varrho$; $\left(\frac{dQ}{dz}\right) = u = \frac{dR}{dy} = \varphi$. alſo

$$dP = p\,dx + s\,dy + t\,dz$$
$$dQ = s\,dx + q\,dy + u\,dz$$
$$dR = t\,dx + u\,dy + r\,dz$$

489. Zuſ. Wenn man V ſo differentiirt, daß man nur eine der drey Gröſſen, deren Function es iſt, veränderlich ſetzt, und dieſes Differential wieder, ſo differentiirt, daß man nur die zweyte dieſer drey Gröſſen veränderlich ſetzt, und dieſes Differential wieder ſo differentiirt, daß man nur die dritte veränderlich ſetzt, ſo kömmt das drittemahl einerley heraus, in was für einer Ordnung man auch die drey Gröſſen nimmt, wie in 481. Den Beweis leichter zu überſehen, dividire man nach jedesmahliger Differentiation durch das Differential der Gröſſe, die man dabey veränderlich geſetzt hat. Dieſe drey Gröſſen haben aber 6 Ordnungen (Alg. 51.) I) xyz II) yxz III) zxy

zxy IIII) xzy V) yzx VI) zyx für I iſt $\left(\frac{dV}{dx}\right)$ $= P$; $\left(\frac{dP}{dy}\right) = s$ und die dritte Arbeit giebt $\left(\frac{ds}{dz}\right)$. Für II) hat man $\left(\frac{dV}{dy}\right) = Q$; $\left(\frac{dQ}{dx}\right) = s$; und drittens wieder $\left(\frac{ds}{dz}\right)$. — Für III) iſt $\left(\frac{dV}{dz}\right) = Q$; $\left(\frac{dR}{dy}\right) = u$; und drittens $\left(\frac{du}{dx}\right)$. Aber wenn y unveränderlich, oder V nur eine Function von den veränderlichen Gröſſen x und z iſt, ſo iſt Q auch nur eine Function von ihnen, und $dQ = sdx + udz$; und $\left(\frac{d}{dz}\right) = \left(\frac{du}{dx}\right)$ alſo giebt die dritte Arbeit in III und in II einerley. Für IIII iſt $\left(\frac{dV}{dx}\right) = P$; $\left(\frac{dP}{dz}\right) = t$ und drittens $\left(\frac{dt}{dy}\right)$. Aber weil $dP = sdy + tdz$ für ein unveränderliches x; ſo iſt $\left(\frac{dt}{dy}\right) = \left(\frac{ds}{z}\right)$. Für V iſt $\left(\frac{dV}{dy}\right) = Q$; $\left[\frac{dQ}{dz}\right] = u$; und drittens $\left(\frac{du}{dx}\right)$.

$\left(\frac{du}{dx}\right)$. Weil aber $dQ = s\,dx + u\,dz$ für ein unveränderliches y iſt, ſo iſt $\left(\frac{du}{dx}\right) = \left(\frac{ds}{dz}\right)$

Für VI iſt $\left[\frac{dV}{dz}\right] = R$; $\left(\frac{dR}{dy}\right) = u$; und drittens $\left(\frac{du}{dx}\right)$ wie vorhin.

Wenn man nicht nach jeder Differentiation mit dem Differentiale der Gröſſe, die bey ihr veränderlich war, dividirt, ſo darf man nur dieſes Differential bey der folgenden Differentiation als einen unveränderlichen Factor anſehen, und ſo bekömmt man bey jeder dritten Differentiation den Factor $dx\,dy\,dz$.

490. Ex. Vom $\frac{xxy}{aa - zz}$ giebt die erſte und zweyte Differentiation, nach den erwähnten Ordnungen folgendes, wo $v = aa - zz$.

I) $\frac{2xydx}{v}$; $\frac{2xdxdy}{v}$; II) $\frac{xxdy}{v}$;

$\frac{2xdxdy}{v}$; III) $\frac{2xxyzdz}{vx}$; $\frac{4xyzdxdz}{vv}$;

IIII) $\frac{2xydx}{v}$; $\frac{4xyzdxdz}{vv}$; V) $\frac{xxdy}{v}$;

2xx

$\frac{2xxzdydz}{vv}$ VI) $\frac{2xxyzdz}{vv}$;

$\frac{2xxzdydz}{vv}$; die dritte Differentiation giebt

allemahl $\frac{4xzdxdydz}{(aa - zz)^2}$

491. Anm Man wird eben ſo überſehn, daß in der vierten Differentiation einerley herauskömmt, in was für einer Ordnung man vier Gröſſen veränderlich nimmt, von denen V eine Function iſt, wo es 24 Ordnungen giebt; u. ſ. w.

492. Zuſ. Wenn 487. nicht ſtatt findet, ſo iſt P dx + Q dy + R dz kein Differential einer Function wie 486. Man ſ. von ſolchen Gleichungen Eul. Inſt. Calc. diff. P. I. c. 9. am Ende.

493. Anm. Den wichtigen Satz (485) haben die Herren Clairaut, Fontaine und Euler jeder für ſich erfunden. S. Herrn Clairaut; ſur l'integration des equat. differentielles &c. Mem. de l'Acad. des Sc. 1740. p. 419. ed. de Holl. Nach Herrn Eulern I. C. D. P. 1 c. 7. hat Herr Prof. Karſten dieſe Lehren (481. . 492) mit vieler Scharfſinnigkeit und Gründlichkeit in zwoen zu Roſtock gehaltenen Diſputationen abgehandelt. De adfectionibus quae omnis generis functionum, praecipue ſi tres vel adeo quatuor inuoluant variabiles differentialibus competunt, ſi eorum integrale ſit poſſibile; 1756. Regulae pro differentiandis functionibus duar. variabil. vniuerſalius & euidentius demonſtratae 1759. Nachgehends iſt eben dieſes von ihm in ſeiner Matheſi theoretica elementari & ſublimiori Sect. 26. vorgetragen worden. Bey verſchiedenen ſchweren Integrationen haben dieſe Sätze ihren Gebrauch.

Anwendung auf die Differentialgleichungen.

494. Lehrſ. P iſt eine Function von x und y. Erſtens Man integrire Pdx ſo daß nur x als veränderlich angeſehn wird, und nehme von dieſem Integrale das Differential ſo daß nur y veränderlich iſt.

Zweytens Man differentiire P ſo daß ſich nur y ändert, und dividire dieſes Differential mit dy.

Was ſo heraus kömmt, werde mit dx multiplicirt, und dieſes Product ſo integrirt daß ſich nur x ändert. Dieſes Integral multiplicire man mit dx. Ich ſage beyde Verfahren geben nerley.

Beweis. I. Pdx ſo integrirt, daß ſich nur x ändert und keine Conſt addirt wird, oder Conſt = o iſt, heiſſe V.

II. Dieſes V iſt nun eine ſolche Function von x und y daß ihr Differential, nur x veränderlich geſetzt, Pdx iſt (201) oder es iſt

$$\left(\frac{dV}{dx}\right) = P \ (484)$$

III. Dieſes V differentiire man nun auf die gewöhnliche Art daß ſich ſo wohl x als y ändern. In dieſer Bedeutung ſey

dV = Pdx + Gdy, ſo iſt Gdy das was beym erſten Verfahren gefunden wird.

IIII.

IIII. Man differentiire P ſo daß ſich nur y ändert, und dividire das Differential mit dy; dieſes, welches ich nach (484) mit $\left(\frac{dP}{dy}\right)$ bezeichne, iſt $= \left(\frac{dG}{dx}\right)$ (485).

V. Wenn man $\left(\frac{dG}{dx}\right)$ mit dx multiplicirt ſo kömmt das Differential von G ſo genommen daß ſich nur x ändert. Dieß iſt ein identiſcher Satz. Und eben ſo identiſch iſt, daß G heraus kömmt, wenn man dieſes Differential ſo integrirt, daß ſich nur x ändert und keine andere beſtändige Grösſe als o addirt.

VI. Nun iſt $\left(\frac{dP}{dy}\right)$ einerley mit $\left(\frac{dG}{dx}\right)$ (IIII) wenn man alſo $\left(\frac{dP}{dy}\right)$ mit dx multiplicirt und das Product ſo integrirt, daß nur x als veränderlich angeſehn wird, auch keine andere beſtändige Grösſe als o addirt, ſo thut man eben das was man in V; that, man muß alſo auch eben das erhalten.

VII. Und ſo geben das zweyte und das erſte Verfahren einerley.

VIII. Exempel. Es ſey
$P = ay + x^2 + xy$ alſo

$Pdx = (ay + x^2 + xy)\,dx$

$V = ayx + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}yx^2$

$dV = (ay + x^2 + xy)\,dx + (ax + \frac{1}{2}x^2).\,dy$

alſo $G = ax + \frac{1}{2}x^2$ für das erſte Verfahren.

$\left(\frac{dP}{dy}\right) = a + x$ dieſes mit dx multiplicirt giebt adx + xdx; und das, ſo integrirt daß ſich nur x ändert, giebt $ax + \frac{1}{2}x^2 = G$

495. Willk. Satz. P ſey eine Function von x und y zugleich, wenn man Pdx ſo integrirt daß man y als unveränderlich, und nur x als veränderlich anſieht, ſo bezeichne ich dieſes folgendergeſtalt $\int(x)$ Pdx. ſo iſt $\int(x)\, yx^3\,dx = \frac{1}{4}yx^4$.

496. Lehrſ. Z ſey eine Function von x und y. Ihr Differential, wie gewöhnlich beyde veränderlich geſetzt, $= Pdx + Qdy$.

Nun ſetze man Pdx ſo integrirt daß ſich nur x ändert, gebe V; dieſes V ſo differentiirt daß ſich beyde ändern, gebe $Pdx + Gdy$

So iſt $dZ = Pdx + Gdy + Hdy$ dergeſtalt $G + H = Q$

Ich ſage dieſes H werde kein x enthalten ſondern nur eine Function von y ſeyn.

Beweis. Aus (485) iſt $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$ und auch $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dG}{dx}\right)$; Folglich $\left(\frac{dQ}{dx}\right) =$

dG

$\left(\frac{dG}{dx}\right)$ Weil nun $Q = G + H$ ſo iſt $\left[\frac{dQ}{dx}\right]$ $= \left[\frac{dG}{dx}\right] + \left[\frac{dH}{dx}\right]$. Soll nun dieſes $=$ $\left[\frac{dG}{dx}\right]$ ſeyn, ſo muß $\left(\frac{dH}{dx}\right) = 0$ ſeyn. Das iſt: H ſo differentiirt, daß nur x veränderlich geſetzt wird, muß ein Differential geben, das mit dx dividirt $= 0$ iſt. Dieſes heißt ohnſtreitig ſoviel als H muß kein x enthalten. Eine Gröſſe die x enthält, ſo differentiirt daß man ihr x veränderlich ſetzt, giebt ein Product aus einer endlichen Gröſſe in dx, und dieſes Product mit dx dividirt iſt alſo nicht $= 0$ wenigſtens nicht für jeden Werth. Allenfalls nur für gewiſſe beſtimmte Werthe dieſer Gröſſe, wie bey den Gröſten und Kleinſten (155)

Ex. $Z = y^3\ xy^2 + x^3$ alſo $P = y^2 + 3x^2$; $Q = 3y^2 + 2xy$; $V = y^2x + x^3$; $dV =$ $(y^2 + 3x^2)\,dx + 2xydy$ alſo $G = 2xy$ folglich $Q - G$ oder $H = 3y^2$ eine Function nur von y.

497. Aufg. Das Integral Z; von $Pdx + Qdy$ zu finden, wenn P und Q ſich nach 486. verhalten.

Aufl. Man mache $\int (x)\, Pdx = V$ (495) iſt nun $G = Q$; ſo iſt $V = Z +$ Conſt weil alsdenn $dV = dZ$; Iſt aber dieſes nicht, ſondern $Q = G + H$ alſo $dZ = dV + Hdy$ ſo wird $Q - G = H$ eine

eine Function von y allein ſeyn, (496) daß alſo $Z = V + \int H dy$ wo das letzte Integral, weil dabey nur eine veränderliche Grösſe vorkömmt, allemahl durch die Quadraturen gegeben iſt.

Ex. Wenn $3x^2 y^2 dx + 2yx^3 dy = dZ$
$+ 4ay^3$
ſo iſt $P = 3x^2 y^2$; $Q = 2yx^3 + 4ay^3$ alſo $\left[\frac{dP}{dy}\right] = 6x^2 y = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$ und $V = x^3 y^2$ und $dV = 3x^2 y^2 dx + 2x^3 ydy$ alſo $G = 2x^3 y$; $Q - G$ oder $H = 4ay^3$ und $Z = x^3 y^2 + ay^4$.

Von den Differentialgleichungen.

498. Aufg. Die Integralgleichung der Differentialgleichung $Pdx + Qdy = 0$ zu finden, wenn ſich P; Q; nach 486 verhalten.

Aufl. Nach 497. findet man Z, welches hier einer beſtändigen Grösſe C gleich ſeyn muß, (22) alſo iſt die Integralgleichung $V + \int H dy = Const$

Im Exempel 497; wenn $dZ = 0$; wäre $x^3 y^2 + ay^4 = C$.

499. Zuſ. Eine Differentialgleichung wo ſich P, Q, nach 486 verhalten, läßt ſich wenn man jeden ihrer Theile mit einer veränderlichen Grösſe multiplicirt, oder dividirt, ſo ändern, daß dieſes Verhalten nicht mehr ſtatt findet.

Die Möglichkeit hievon iſt zulänglich durch ein einziges Exempel dargethan. Bey

$nxy^{n-1} dy + y^n dx = o$ findet dieſes Verhalten ſtatt, und die Integralgleichung iſt $xy^n = Conſt$; Wenn man aber die Differentialgleichung mit y^{n-1} dividirt ſo findet dieſes Verhalten nicht mehr bey $nxdy + ydx = o$ ſtatt.

Die Gleichung $Pdx + Qdy = o$ unterſcheidet ſich nähmlich darinnen von dem Differential $Pdx + Qdy = dZ$, daß man bey ihr alle Glieder mit welcher veränderlichen Gröſſe man will multipliciren oder dividiren darf, welches beym Differentiale nicht angeht. Man bedient ſich zuweilen ſolcher Multiplicationen, aus einer Differentialgleichung ihre Integralgleichung herzuleiten.

500. Lehrſ. Wenn bey einer Differentialgleichung, nicht $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$ iſt, ſo giebt es allemahl eine veränderliche Gröſſe L; mit der man P und Q multipliciren kann ſo daß ſich die Gleichung in $L. P. dx + L. Q. dx = o$ verwandelt, und $\left(\frac{d\,L.\,P}{dy}\right) = \left(\frac{d\,L.\,Q}{dx}\right)$

Beweis. Ich ſetze zum voraus, daß jede Differentialgleichung eine Integralgleichung hat, aus deren Differentiation ſie entſtanden ſeyn kann. Dieſes gründet ſich darauf, weil eigentlich Differentialgleichungen nichts anders anzeigen, als das Verhalten zwiſchen verſchwinden-

den

den Veränderungen, veränderlicher Gröſſen (13) Es giebt alſo keine Differentialgleichung ohne eine Gleichung zwiſchen den veränderlichen Gröſſen ſelbſt.

Indeſſen kann man eine Differentialgleichung haben, ohne daß man weiß wie die Gleichung zwiſchen den veränderlichen Gröſſen ſelbſt beſchaffen iſt; von dem Falle iſt hier die Rede.

Dieſe unbekannte Gleichung nun zwiſchen den veränderlichen Gröſſen ſelbſt, muß ſo beſchaffen ſeyn, daß eine gewiſſe Conſt = einer Function von x und y iſt.

Wenn man dieſe unbekannte Gleichung differentiirte, würde die Conſt aus dem Differentiale weggehen, und $o = Mdx + Ndy$ heraus kommen, wo ich weder M noch N weiß.

Daraus aber folgte $\frac{dy}{dx} = - \frac{M}{N}$

Und aus $Pdx + Qdy = o$ folgt $\frac{dy}{dx} = - \frac{P}{Q}$

Beydes muß einerley ſeyn, wenn $Mdx + Ndy = o$ die Differentialgleichung ſeyn ſoll, die aus der Integralgleichung von $Pdx + Qdy = o$ folgt,

Alſo iſt $\frac{P}{Q} = \frac{M}{N}$

Das heißt nicht etwa $P = M$; $Q = N$; denn man weiß daß ein paar Brüche gleich ſeyn können ohne daß ihre Zähler einerley, und ihre Nen-

Nenner einerley ſind, wenn nur des einen Zähler und Nenner, Vielfache von des andern Zähler und Nenner ſind.

Alſo ſey $M = L.\ P$; $N = L.\ Q$;

Weil aber $Mdx + Ndy$ aus der wirklichen Differentiation einer Function von x und y entſtanden ſeyn ſoll, ſo iſt $\left(\frac{dM}{dy}\right) = \left[\frac{dN}{dx}\right]$ (486)

Folglich $\left[\frac{d\ L.P}{dy}\right] = \left[\frac{d\ L.\ Q}{dx}\right]$

501. Zuſ. Kann man den Factor L finden, ſo läßt ſich die Gleichung $Pdx + Qdy = 0$ unter der Geſtalt $L.\ Pdx + L.\ Qdy = 0$, nach (498) integriren.

502. Aber dieſen Factor zu finden, iſt ſchwer und man hat dazu bisher noch keine allgemeine Methode. Clairaut in der (493) angef. Schrift lehrt 427. S. ein Verfahren das in manchen Fällen zutrifft; erweitert auch ſolches auf Gleichungen die drey oder mehr veränderliche Gröſſen enthalten.

503. Umſtändlich handelt hievon Eul. Inſt. Calc. Integr. Vol. I. §. 459. ſequ. wo er auch §. 458 anzeigt wie man ſich zu verhalten habe, wenn man bey den Vorſchriften die ich (498) gegeben habe, ſ (x) Pdx nicht wirklich darſtellen könnte.

504. Bisher hat dieſer Kunſtgriff einen ſolchen Factor zu finden, kaum bey andern Gleichungen Dienſte geleiſtet, als bey denen wo man (405) die veränderlichen Gröſſen von einander ſondern kann. Eul. a. a. O. 447. §. Indeſſen iſt das Verfahren mit dieſem Factor, der Natur der Gleichungen gemäſſer, und hat andere Vorzüge, deßwegen es Hr. Euler ausführlich erklärt. Hier verſtattet mir der Raum nicht mehr davon beyzubringen.

Fernere Anwendung der Rechnung des Unendlichen auf die krummen Linien.

Quadraturen und Rectificationen, wenn die Ordinate aus einem Puncte gehen.

Ergänzung zu 205.

505. Aufg. Wenn wie in (104) 22. F. eine Gleichung zwiſchen AP = x; CM = y; gegeben iſt, daß Differential der Fläche der krummen Linie, oder den Ausſchnitt MCN unter der Vorausſetzung, daß N; M; ſich unendlich nähern, zu finden.

Aufl. I. Dieſer Ausſchnitt fält zwiſchen zweene Ausſchnitte von Kreiſen, die CM; CN; zu Halbmeſſern hätten, und beyde dem Winkel MCN zugehörten; das iſt zwiſchen $\frac{1}{2}$ CM. MS und $\frac{1}{2}$. CN. $\frac{CN}{CM}$. MS; zwiſchen dieſen beyden Ausſchnitten iſt der Unterſchied = $\frac{CM^2 - CN^2}{2.\ CM}$. MS

 =

$= \frac{(NS.(2CM + MS)}{2CM}$. MS welcher ſich zu dem kleinſten Ausſchnitte wie NS. (2CM + NS) : CM^2 verhält, und alſo in Vergleichung mit demſelben verſchwindet, wenn bey unendlicher Näherung der Puncte M; N; NS in Vergleichung mit 2NM verſchwindet. Alſo iſt das geſuchte Differential $= \frac{1}{2}$ CM. MS $= \frac{yydx}{2r}$ (204) welches ſo integrirt, daß es für x = o verſchwindet, die Fläche der krummen Linie giebt die von des Winkels ACM Schenkeln, und dem Bogen der krummen Linie der zwiſchen dieſe Schenkel fällt, begränzt wird, was alſo hier zwiſchen den Bogen CM 22 F. und die gerade Linie CM fällt.

II. Dieſes hat keine Schwürigkeit, wenn man bey dem erſten Umlaufe einer ſolchen krummen Linie um den Mittelpunct C ſtehen bleibt. Aber wenn ſie ſich zu wiederhohlten mahlen um C windet, wie die archimediſche Spirallinie (Alg. 194.) muß man die Sache folgendergeſtalt betrachten.

III. Von einer ſolchen Linie ſey 24. F. CMBA der erſte Umlauf, A 2 M 2 B 2 A der zweyte; 2 A 3 M 3 B 3 A der dritte; 3 A 4 M ein Bogen von dem vierten; die Puncte M liegen alle in einer Ordinate, und die Puncte m in einer andern ihr unendlich nahen. Wenn man ſich die Erzeugung

der

der krummen Linie wie Alg. 592 vorſtellt, ſo heiſſe u der Bogen mit dem Halbmeſſer r, der des Winkels ACM Maaß iſt. Der Winkel AC 2M iſt = ACM + 4 R (Alg. 593.) alſo ſein Maaß der Bogen u + p; und ſo der Winkel AC 3M = ACM + 2. 4 R und ſein Maaß der Bogen u + 2p; u. ſ. w. Alſo wird für dieſe Winkel, x nach und nach = u; = u + p; = u + 2p u. ſ. w. und weil die Ordinate eine Function von x iſt, ſo iſt CM eine Function von u; und C2M eben die Function von u + p; und C3M eben die von u + 2p u. ſ. w.

IIII. Ferner heiſſe die veränderliche erſte Fläche, was von der geraden Linie CM; und der krummen CM begränzt, und nach I. gefunden wird. Wenn man in dem Integrale, das dieſe veränderliche erſte Fläche ausdrückt, x = p ſetzt, ſo bekömmt man die ganze erſte Fläche CMBAC; was nähmlich von der geraden Linie CA, und der krummen CMBA begränzt wird. An dieſer Gränze CA, fängt ſich die zweyte veränderliche Fläche ACM2M an, ſie iſt zwiſchen den geraden Linien CA; M2M; und den krummen CM; A2M; enthalten; Sie verändert ſich, wenn ſich A2M in A2m verändert, nnd ihr Differential iſt M2M2mm; was zwiſchen den geraden Linien M2M; m2m; und den Elementen der krummen, 2M2m; Mm enthalten iſt. Wenn das Integral dieſes Differentials eine Function

von x iſt, und wenn es blos dieſe zweyte veränderliche Fläche ausdrücken ſoll, ſo muß es eine ſolche Function von x ſeyn, die für $x = p$ verſchwindet, weil ſich dieſe zweyte veränderliche Fläche da anfängt, wo $x = p$; Hat man ſie nun durch ein ſolches Integral ausgedruckt, ſo ſetzt man darinnen $x = 2p$; die ganze zweyte Fläche CA2M 2B2A zu bekommen, die von den geraden Linien CA; A2A, und der krummen CMBA2M2B2A begränzt wird, und ſich um die ganze erſte Fläche herumwindet. An ihrer Gränze A2A fängt ſich die dritte veränderliche Fläche 2AA2M3M an; u. ſ. w.

V. Dieſes allgemein zu machen, ſey 2A3M 3B3A die $(n-1)$te Umwindung der Linie um C; ſo daß jede ihr zugehörige Ordinate C3M; eine Function von $x = u + (n-2)p$ iſt. Aus III nähmlich iſt für jede Umwindung, die Ordinate einer Function von x + einem Vielfachen von p durch eine Zahl, die eins weniger iſt, als die Zahl der Umwindung. So iſt alſo 3A4M, ein Bogen der nten Umwindung, deſſen Ordinate C4M eine Function von $x = u + (n-1)p$; und 2A3A4M3M die nte veränderliche Fläche, deren Differential 3M4M4m3m ſo muß integrirt werden, daß es für $x = (n-1)p$ verſchwindet.

VI. Es

VI. Es bedeute φx die Function von x, durch welche die Ordinate ausgedruckt wird. Weil nun $dx = du$; ſo iſt $4MC4m =$

$$\frac{(\varphi(u+(n-1)p))^2 . du}{2r}$$ und $3MC3m =$

$$\frac{(\varphi(u+(n-2)p))^2 . du}{2r}$$ (I) alſo das Differential $3M4M4m3m =$

$$\frac{(\varphi(u+(n-1)p)^2)^2-(\varphi(u+(n-2)p))^2}{2r}.du$$

das iſt: man muß in dem Ausdruck, der y durch x giebt, x erſtlich $= u + (n-1)p$; denn $= u + (n-2)p$ ſetzen; beyde Werthe quadriren, und das letzte Quadrat vom erſten abziehen. Der Unterſchied mit $\frac{du}{2r}$ multiplicirt, giebt dieſes Differential, welches man ſo integriren muß, daß es für $x = (n-1)p$ verſchwindet. Weil nun in der veränderlichen Gröſſe, welche durch dieſes Integral ausgedrückt wird, $x = u + (n-1)p$ iſt, ſo folgt, daß $u = 0$ für $x = (n-1)p$ iſt, und daß man alſo das Integral ſo nehmen muß, daß es für $u = 0$ verſchwindet. Nachdem man es ſo genommen hat, ſetze man darinnen $u = p$ ſo hat man die ganze nte Fläche.

VI. Die erſte Fläche aber muß man aus I finden, und kann V dabey nicht brauchen. Denn

wollte man $n = 1$ ſetzen, ſo wäre zwar $EM = \varphi u = \varphi (u + (n - 1) p)$ aber es gäbe keine Ordinate, die $\varphi (u + (n - 2) p)$ daß iſt hier $\varphi (u - p)$ wäre.

Exempel.

506. Bey der archimediſchen Spirallinie (Alg. 580.) iſt $y = \frac{rx}{p}$. Folglich das Differential der erſten Fläche $= \frac{rrxxdx}{2rpp}$ welches die erſte veränderliche Fläche $= \frac{rx^3}{6pp}$, und alſo für $x = p$; die ganze erſte Fläche $= \frac{rp}{6} = \frac{1}{3} . \frac{rp}{2} = \frac{1}{3}$ des Kreiſes, in dem die Spirallinie beſchrieben iſt, giebt.

Ferner iſt $\varphi x = \frac{rx}{p}$ alſo das Differential (505; V) $= \frac{rr}{pp} . ((u + (n-1) p)^2 - (u + (n-2) p)^2) . \frac{du}{2r} = (2pudu + (2n-3) p^2 du) . \frac{r}{2pp}$; davon das Integral $= (u + (2n - 3) p)$.

$3)\ p).\ \frac{ur}{2p}$; welches ſich für $u = p$ in $(n-1)$. rp verwandelt.

Die ganze zweyte Fläche iſt alſo $= rp =$ dem Sechsfachen der ganzen erſten, und jede ganze folgende Fläche, iſt ein Vielfaches der zweyten durch eine Zahl, die um eins weniger iſt als die Zahl der Fläche. (Archimed von den Spirallinien 27. Saß.)

507. Bey unzähligen Spirallinien (Alg. 596.) iſt $y = \left(\frac{r}{p}\right)^{n:m} . x$. Dieſes giebt die erſte Fläche $= \frac{x^3}{6} \sqrt[m]{\left(r^{2n-m} : p^{2n}\right)}$, und die Verhältniß der erſten ganzen Fläche zur Fläche des Kreiſes wie $1 : 3 \sqrt[m]{\left(\frac{r}{p}\right)^{2m-2n}}$

Für $m = 2$; $n = 1$ wird ſie $= 1 : \frac{3r}{p}$ Hier iſt $\phi x = \frac{r}{p} x^{n:m} x$ woraus man nach 505; V; die folgenden Flächen finden könnte, nur daß man die Verwirrung zu vermeiden, ſtatt des einen n einen andern Buchſtaben brauchen müßte.

508. Wenn die Abſciſſe x einer paraboliſchen Linie, der die Ordinate $\sqrt[\delta+\varepsilon]{a^{\delta} x^{\varepsilon}}$ zugehört, in einen Kreisbogen gekrümmt wird, ſo entſtehen unzählige paraboliſche Spirallinien, davon die (107) für $\delta = \varepsilon = 1$ ein Exempel iſt. Alſo iſt für ſie

$$y = r - \varkappa x^{e} \text{ wo } \varkappa = \sqrt[\delta+\varepsilon]{a^{\delta}} \text{ und } e = \delta ; (\delta+\varepsilon).$$

Dieſes giebt die erſte Fläche $= \frac{rx}{2} - \frac{\varkappa x^{e+1}}{e+1}$

$$+ \frac{\varkappa\varkappa x^{2e+1}}{2.(2e+1).r}.$$

Für (107) iſt $e = \frac{1}{2}$; $\varkappa = \sqrt{a}$; Es ſey $a = rr : p$ ſo iſt die erſte Fläche $= rx.$

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{x}{p}} + \frac{x}{4p}\right) = \frac{1}{12} rp \text{ für } x = p;$$

Dieſe Fläche iſt alſo der ſechſte Theil der Kreisfläche.

509. Aufg. In (505) das Differential MN des Bogens der krummen Linie zu finden.

Aufl. Die Sehne MN nähert ſich unendlich ihrem Bogen; (68) das Quadrat der Sehne aber beſteht aus den Quadraten eines Perpendikels von M auf CN; und des Stückes der Linie CN, das zwiſchen dieſem Perpendikel und dem Puncte

Puncte N liegt. Wenn ſich nun N; M; einander unendlich nähern, ſo nähert ſich das Perpendikel unendlich dem Kreisbogen MS (96) $= \frac{ydx}{r}$ und das Stück auf der Linie CN; dem Unterſchiede CN − CM = dy; alſo der Bogen MN dem Werthe $ds = \sqrt{(dy^2 + \frac{yydx^2}{rr})}$ welches integrirt, daß das Integral = o für x = o wird, die Länge des Bogens der krummen Linie giebt, der zwiſchen die Schenkel des Winkels ACM fällt.

Exempel.

Die logarithmiſche Spirallinie.

510. I. Wenn der Winkel CMT 22 F. den die Tangente einer krummen Linie mit ihrer Ordinate macht, durch die ganze krumme Linie unveränderlich iſt, ſo ſetze man ſeine Tangente (104) $\frac{ydx}{rdy} = m$ dieſes giebt $\frac{dx}{mr} = \frac{dy}{y}$ daß alſo die Kreisbogen die man hier für Abſciſſen annimmt, Logarithmen der Ordinaten ſind, daher dieſe Linie ihren Nahmen erhalten hat. Aus 105 kömmt für ſie CT = my.

II. Weil $\frac{x}{mr} = l\,y + \text{Conſt}$ und man r gewiß

wiß ſo nehmen kann, daß der Kreis die krumme Linie irgendwo ſchneidet, und folglich ſein Halbmeſſer eine Ordinate von ihr wird; ſo ſey CA dieſer Halbmeſſer in der Lage, da er zugleich eine Ordinate iſt; folglich iſt $x = o$ für $y = r$; und $o =$

$$lr + Const \text{ alſo } \frac{x}{mr} = l\,(y : r).$$

III. Mit dem bejahten x wächſt auch $l\,(y : r)$ und folglich y ohne Ende. Für verneinte x wird $y : r$ ein Bruch, der immer abnimmt, je gröſſer die verneinten x werden, aber nur verſchwindet, indem das verneinte x unendlich wird. (244) Sind nähmlich die bejahten x, Bogen, die von A nach der rechten Hand zu gerechnet werden, wie AP, ſo muß man die verneinten nach der linken Hand zu rechnen wie AQ; beyde aber können ohne Ende fort wachſen, und den Umkreis zu wiederhohlten mahlen enthalten. Weil nun y nicht eher verſchwindet, als wenn das verneinte x unendlich wird, ſo muß ſich die Ordinate, aus der Lage CA nach der linkeu Hand drehen, und auf dieſe Art unzählich vielmahl um C drehen, ehe M in C rückt, das iſt, die krumme Linie kömmt nach unzählich vielen Wendungen, die ſie nach der linken Hand von CA zu anfängt, und immer ſo um C fortſetzt, erſtlich in C.

IIII. Aus (509) wird $ds = dy.\ \sqrt{(1 + mm)}$ folglich $s = y\ \sqrt{(1 + mm)}$ wenn s den Bogen

CM

CM der krummen Linie von C an gerechnet bedeuten ſoll, weil alsdenn s und y zugleich verſchwinden müſſen. Dieſer Bogen alſo, der unzählig viele Wendungen um C macht (III) iſt doch nur einer beſtimmten geraden Linie gleich, nähmlich der Tangente MT wie daraus, daß ſie $= \sqrt{(CT^2 + CM^2)}$ vermöge (510. I.) folgt. Jacob Bernoulli hat dieſes entdeckt. Specimen alterum calc. differentialis; Act. Er. Lipſ. Iun. 1691. Op. Iac. Bern. n. 42.

V. Das Differential der Fläche wird aus 505; $\frac{1}{2}$ mydy alſo die Fläche $\frac{myy}{4} = \frac{1}{2} \triangle CMT$. Die Fläche fängt hier von C an, weil ſie $= 0$ für $y = 0$ iſt, und begreift die unzählichen Wendungen um C (II) in ſich.

Von der Krümmung.

Erkl. Zwo Tangenten einer krummen Linie bey M; N; 21; 22 F. ſchneiden einander in H. Wenn ſich die Berührungspuncte M, N, einander unendlich nähern, ſo verwandelt ſich der ſpitzige Winkel, den dieſe Tangenten mit einander machen MHD in den Krümmungswinkel an dieſer Stelle.

512. Zuſ. Man kann ſich vorſtellen, es ſey der Winkel, den ein paar nächſt auf einander fol-

folgende Elemente der krummen Linie mit einander machen (68).

513. Zuſ. Weil die Puncte M; N; ſich einander unendlich nähern, ſo kann man ſie allemal ſo nahe annehmen, daß zwiſchen ſie in den Bogen MN kein Wendungspunct (112) fällt, wenn ſie nicht ſelbſt in einen Wendungspunct zuſammen gehen.

514. Zuſ. Wenn die Abſciſſe AP um das Stück Pp zunimmt, indem der Punct, welcher die krumme Linie beſchreibt, aus M in N kömmt, ſo muß MHN ein ſtumpfer Winkel ſeyn, der zween rechten unendlich nahe kömmt. Denn in dem Dreyecke MHN, nehmen die beyden andern Winkel NMH; MNH; unendlich ab (68). Der Bogen MN fällt alſo allemahl in den ſtumpfen Winkel der Tangenten, und der Krümmungswinkel MHD als die Summe zweener unendlich abnehmenden Winkel wird unendlich klein.

515. Zuſ. Aber die krumme Linie kann auch eine ſolche Geſtalt haben, daß die Abſciſſe nicht beſtändig zunimmt, indem ein Punct in der krummen Linie aus M in N kömmt. Die 26 F. zeigt dieſes mit MEN; oder MeN; die Abſciſſe wird nähmlich wachſen, ſo lange der Punct aus M in E oder e geht, aber wieder abnehmen, wenn er aus E oder e nach N zu geht.

516. **Erkl.** Eine ſolche Stelle wie E oder e 26 F. heißt eine Spitze oder **Rückkehrpunct** (cuſpis ſ. punctum reflexus, *point de rebrouſſement*) weil daſelbſt die krumme Linie wieder nach der Gegend zugeht, wo ſie hergekommen iſt. Der Unterſchied zwiſchen E und e kömmt darauf an: MeE liegt unter ſeiner Tangente MH; aber NE über ſeiner NH; da ſind beyde Bogen gegen einander erhoben. (110) Ne liegt unter NH; iſt alſo gegen Me hohl, aber Me gegen ihn erhoben. Man kann dieſe Rückkehrpuncte E; e; von der erſten und zweyten Art nennen.

Anm. Der Abt de Gua hatte wieder den Marquis de l' Hopital, geläugnet, daß es Rückkehrpuncte von von der zweyten Art gebe, Herr Euler aber hat den Streit für den Marquis entſchieden. Mem. de l'Ac. Roy de Pruſſe 1749. p. 203.

517. Zuſ. Wenn (Alg. 474; III. Taf. 20. F.) die Abſciſſen auf AB genommen würden, ſo wüchſen ſie, indem der beſchreibende Punct aus M in G geht, obgleich bey D ein Rückkehrpunct wäre. Das wiederſpricht aber der Erklärung nicht, denn für dieſelbe iſt genug, daß man Abſciſſen ſo annehmen kann, wie ſie zum vorausſetzt, und das lieſſe ſich gleich bewerkſtelligen, wenn man die Abſciſſen auf einer Linie nähme, die mit BD parallel iſt.

518. Aufg. **Den Krümmungswinkel an einer Stelle, wo kein Rückkehrpunct iſt, zu finden.**

Aufl.

Aufl. I. Man ſetze erſtlich der Bogen ſey gegen die Abſciſſe AO 21 F. oder den Mittelpunct C 22 F. hohl; das iſt, der Bogen MN falle zwiſchen die Tangenten und die Abſciſſe oder den Mittelpunct (70) die Sehne MN falle zwiſchen die Abſciſſe oder den Mittelpunct; und H.

II. Für parallele Ordinaten (77)

THD = OTH — ODH; Wenn aber die Abſciſſen von P nach p zu wachſen, und M; N; einander unendlich nahe rücken, ſo iſt OTH — ODH dem Differentiale des Winkels entgegengeſetzt, den die Tangente mit der Abſciſſe macht. Denn dieſes Differential wäre OTM als ſein erſter Zuſtand, von den zweyten ODN abgezogen.

(13). Nun iſt $\tan MTO = \frac{MP}{PT} = \frac{dy}{dx}$

(77) alſo nach 299 das Differential von MTP; =

$$\frac{dx\,ddy - dy\,ddx}{dx^2.(1 + dy^2 : dx^2)}$$ alſo (267)

$$THD = \frac{dy\,ddx - dx\,ddy}{ds^2} = -\frac{dp}{1+pp}$$

wenn $p = \frac{dy}{dx}$.

III. Für Ordinaten aus einem Puncte (104) wo $CP = r$; $CM = u$;

MHN

MHN = 4R — CMH — CNH — MCN (G. 13 S. 6. Z.) aber CMH = 2 R — CMT; CNH = CND; folglich MHN = 4R — 2R + CMT — CND — MCN; und 2R — MHN oder THD = CND — CMT + MCN; Wenn ſich nun die Puncte N; M; einander unendlich nähern, ſo verwandelt ſich CND — CMT in dCMT; und MCN in $\frac{dx}{r}$; Es iſt aber alsdenn tang CMT = $\frac{CT}{u} = \frac{udx}{rdu} = \frac{u}{rp}$ wenn du = pdx; alſo THD =

$$\frac{r.(pdu - udp)}{r^2p^2 + u^2} + \frac{dx}{r};$$ wo dp = $$\frac{dxddu - duddx}{dx^2}.$$

Man kann hier welches Differential man will, unveränderlich ſetzen.

Sollte der Winkel MCN = $\frac{dx}{r}$ unveränderlich ſeyn, ſo wäre ddx = 0; dp = $\frac{ddu}{dx}$ und $\frac{du}{dx}$ ſtatt p geſetzt, kömmt der Krümmungswinkel

$$THD = \frac{(r^2.(2du^2 - uddu) + u^2 dx^2) dx}{r.(r^2 du^2 + u^2 dx^2)}$$

IIII. Hier ſey PM = y; alſo CM = r + y ſo iſt dy = du; ddy = ddu; p = dy: dx u. ſ. w. und $THD = \frac{rpdy - r.(r+y)dp}{r^2 p^2 + (r+y)^2} + \frac{dx}{r}$. Wächſt hier r unendlich, ſo verwandelt ſich der Kreisbogen AP; in die Abſciſſenlinie 21 F. (G. 20. S. 20. Z.) auf welche die Ordinaten MP ſenkrecht ſtehen (96) daß alſo MCN oder $\frac{dx}{r}$ wegfällt, und es wird nach (9) $THD = -\frac{dp}{pp+1}$ (wie in II.)

V. Der Krümmungswinkel iſt hier allein dTMC; obgleich derſelbe an ſich (G 6 Erkl.) unendlich klein iſt, ſo verſchwindet doch in Vergleichung mit ihm der unendlich kleinere $\frac{dx}{r}$ welcher herauskömmt, wenn man was unendlich kleines mit was unendlich groſſen dividirt, und alſo ein Unendlichkleines der zweyten Ordnung iſt (u)

VI. Einen erhabenen Bogen (I) ſtellt die 23 F. vor. Das Viereck CMHN hat in derſelben bey H einen Winkel, der auf der Seite, nach welcher C zu liegt, wo nähmlich der kleine Kreisbogen

gen um ihn gezogen iſt, gemeſſen, über 2R beträgt (69). Wenn man dieſen Winkel unter MHN verſteht, ſo iſt wie in III. noch MHN = 4R — CMH — CNH — MCN = 2R + CMT — CND — MCN aber alsdenn iſt nicht THD = 2R — MHN ſondern = 2R — (4R — MHN) = MHN — 2R = CMT — CND — MCN welcher Ausdruck dem vorigen II entgegengeſetzt iſt. Alſo wird THD =

$$\frac{rudp - rpdu}{rrpp + uu} - \frac{dx}{r};$$

der Ausdruck für parallele Ordinaten folgt hieraus (IIII).

VII. So findet man alſo, wie weit die Lage der Tangente an M, von der Lage der Tangente an N unterſchieden iſt, welches ohne Zweifel anzeigt, um wieviel der Weg eines Punctes, der den Bogen MN beſchreibt, in N von ſeinem Wege in N unterſchieden iſt, d. i. wie viel ſich dieſer Weg gekrümmt hat. (S. 6. Erkl.) weil ſich aber dieſer Krümmungswinkel ſelbſt nicht angeben läßt, wenn M; N; ſich einander unendlich nähern, ſo beſteht die Kenntniß, die uns Gegenwärtiges von der Krümmung giebt, darinnen, daß wir auf dieſe Art die Krümmungen an zwo Stellen einer krummen Linie, oder zwoer verſchiedenen krummen Linien mit einander vergleichen können, die Verhältniß dieſer Krümmungen nähmlich wird ſich durch endliche Gröſſen ausdrücken laſſen, wenn man in dem Ausdrucke des

Krümmungswinkels alle Differentiale durch ein einziges ausdruckt, und dieſes Differential in den beyden Werthen, welche der Ausdruck des Krümmungswinkels für die erwähnten beyden Stellen bekömmt, einerley ſetzt, daß man damit dividiren kann.

VIII. Will man alſo, wie natürlich iſt, zweene gleichlange Bogen der krummen Linie mit einander vergleichen, und ſehen, wie vielmahl einer krümmer als der andere iſt, ſo muß man für dieſes Differential ds annehmen. Es iſt aber (aus 509; und 518; III.) $ds = \frac{dx\sqrt{(rrpp + uu)}}{r}$

alſo $\frac{dx}{r} = \frac{ds}{\sqrt{(rrpp + uu)}}$ und pdx oder $du = \frac{prds}{\sqrt{(rrpp + uu)}}$. Weil ferner p allemahl durch x; y; gegeben ſeyn muß, ohne daß ſich dy; dx; darinnen befinden, denn ſonſt beſtimmte es die Verhältniß dy: dx nicht, ſo iſt dp allemahl durch die erſten Differentiale der Coordinaten gegeben, ohne daß man höhere nöthig hat, und läßt ſich alſo allemahl durch ds ausdrücken, daher THD ſich allemahl durch ds ausdrücken läßt.

VIIII. Für parallele Ordinaten iſt (266) $dx = \frac{ds}{\sqrt{(1 + pp)}}$; $dy = \frac{pds}{\sqrt{(1 + pp)}}$.

519. Zuſ. Die Tangenten bey M; N; (518) bleiben allezeit noch verſchieden, ſo nahe auch dieſe Puncte einander rücken. Daher wird ihr Winkel, wenn er ſich in den Krümmungswinkel verwandelt, auch ein unendlich kleines der erſten Ordnung; die Lagen der Tangenten kommen nähmlich einander näher, als die Lagen zwoer Linien, deren Unterſchied ſich angeben läßt, einander kommen können. Aber in dem Rückkehrpuncte 26 F. müſſen die beyden Bogen völlig einerley Tangente haben, weil dieſer Punct beyden Bogen gemein und ein einziger Punct iſt. Wie nähmlich 25 F. E der Punct iſt, wo der Bogen MNE aufhört, und der Bogen E$\mu\nu$ anfängt, und wie es an dieſer gemeinſchaftlichen Gränze beyder Bogen, nur eine einzige Tangente giebt, ſo giebt es auch nur eine bey deren Rückkehrpuncte E oder e 26 F. als der gemeinſchaftlichen Gränze der Bogen ME; EN; oder Me; eN; Stellt man ſich alſo an den beyden Bogen ME; NE; die Tangenten MH; NH; vor, und läßt M; N; in E oder e zuſammenrücken, ſo muß ihr Winkel MHN nicht nur ein Unendlichkleines von der Art des Krümmungswinkels (518) ſondern in Vergleichung mit dieſem ſelbſt unendlich klein, oder = o werden. Giebt es an einem Puncte zwo oder mehr verſchiedene Tangenten, ſo gehören die Bogen daſelbſt zu verſchiedenen Schenkeln, wie bey C Alg. III. Taf. 22. F. S. Alg. (493.)

520. Aufg. Den Rückkehrpunct zu finden.

Aufl. I. Man ſuche einen Ausdruck für den Winkel MHN unter der Vorausſetzung, daß ſich M; N; beyde dem geſuchten Rückkehrpuncte E unendlich nähern, und ſetze dieſen Ausdruck = o (519).

II. Es iſt nähmlich NHM = NMT − MNH; NMT = CMN − CMT; CMN = 2R — CNM − MCN; ferner MNH = CNH − CNM; alſo NHM = 2R — MCN − CMT − CNH = CND − CMT − MCM; Weil nun ein Punct, der die krumme Linie beſchreibt, auf dem Wege MEN oder MeN aus M in N kommen kann, ſo laſſen ſich CM; CN; für zwo nach einander folgende Ordinaten, und MT; ND; für zwo nach einander folgende Tangenten, und CND; CMT; für zweene nach einander folgende Winkel der Ordinaten mit den Tangenten annehmen. Daher, wenn ſich die Puncte M; N; beyde dem Puncte E; und folglich einander ſelbſt unendlich nähern; ſo wird CND − CMT = dCMT; und MCN = $\frac{dx}{r}$; alſo kömmt

$$MHN = \frac{r.(pdu - udp)}{rrpp + uu} - \frac{dx}{r} \quad (518;\ III)$$

welches = o geſetzt (519) rr. (pdu − udp) = (rrpp + uu) dx giebt, wo wegen der gegebenen Gleichung der krummen Linie; du und dp ſich

ſich durch dx ausdrücken laſſen, daß man alſo mit dx dividiren kann, und eine Gleichung zwiſchen lauter endlichen Gröſſen, wo alles veränderliche durch x oder u gegeben iſt, erhält. Dieſe Gleichung, mit der für die krumme Linie, welche auch nur x und u enthält, nach (Alg. 199) verglichen, giebt eine beſtimmte Gleichung für das x oder das u das zum Rückkehrpuncte gehört.

III. Für parallele Ordinaten wird MHN $= -\frac{dp}{1 + pp}$ wie in 518; IIII; weil die erſten Theile der Ausdrückungen für MHN (II) und THD (518); III) einerley ſind, alſo kann man für den Rückkehrpunct dp = o das iſt eigentlich $\frac{dp}{dx} = o$ ſetzen (519).

IIII. Die Bedingung (519) daß MHN in Vergleichung mit andern Krümmungswinkeln verſchwinden ſoll, läßt ſich hier auch erhalten, wenn nicht dp = o aber $p = \infty$ iſt; welches alſo auch den Rückkehrpunct zu finden kann gebraucht werden.

V. In II giebt die Vorausſetzung $p = \infty$ dieſes nicht, weil da noch der Theil $-\frac{dx}{r}$ des Winkels MNH bleibt.

VI. Aus 519. folgt nur ſoviel, daß dieſe Vorausſetzungen beym Rückkehrpuncte ſtatt haben,

aber nicht, daß ſie an keiner andern Stelle einer krummen Linie ſtatt haben: Alſo darf man aus ihnen nicht allemahl ſicher auf einen Rückkehrpunct ſchlieſſen. Wenn man aber durch ſie nach (II) eine gewiſſe Abſciſſe beſtimmt hat, ſo darf man nur den Gang der krummen Linie nach (Alg. 329) ein wenig unterſuchen, um zu ſehen, ob dieſe Abſciſſe einem Rückkehrpuncte zugehört.

521. Aufg. Zu entſcheiden, ob die krumme Linie gegen die Axe 21 F. oder den Mittelpunct 23 F. hohl oder erhaben iſt.

Aufl. I. Weil THD in beyden Fällen 518; III; VI; herauskömmt, wenn man das kleinere von dem gröſſern abzieht, ſo iſt er beydemahl bejaht: Sein Ausdruck aber in 518; VI; iſt dem in 518 III; entgegengeſetzt. Jeder Ausdruck giebt alſo für ſeinen Fall etwas bejahtes, und für den entgegengeſetzten etwas verneintes. Wenn man alſo überhaupt für den Ausdruck des Krümmungswinkels den aus 518; III; annimmt, ſo iſt die krumme Linie gegen C hohl oder erhaben, nachdem dieſer Ausdruck einen bejahten oder verneinten Werth giebt.

II. Bey parallelen Ordinaten 21 F. iſt MN gegen die Axe AP hohl, oder erhaben, nachdem $-dp:(1+pp)$ bejaht oder verneint, (518. IIII) das iſt, nachdem dp verneint oder bejaht iſt. Aber gegen die Axe απ wird eben die krumme Linie erhaben ſeyn. Sind nun die Ordinaten PM; pN;

pN; bejaht, ſo ſind ΠM; πN verneint, weil der Bogen MN unter $\alpha\Pi$ liegt, wenn er über AP liegt; indem alſo die Abſciſſe $\alpha\Pi$ eben wie AP zunimmt, ſo nimmt die verneinte Ordinate ΠM ab; das iſt, p iſt für ΠM bejaht (23) wie für PM; und dp als das Differential von $\frac{NS}{MS}$ bleibt auch einerley für AP und für $\alpha\Pi$. Alſo iſt die krumme Linie gegen die Axe $\alpha\Pi$ erhoben oder hohl, nachdem dp verneint oder bejaht iſt. Hiebey nimmt man dx als bejaht an, weil man AP als die erſte Abſciſſe, und Ap als die zweyte anſieht, oder bejahte Abſciſſen wachſen läßt. Wäre dx verneint, ſo müßte p für einerley dy mit dem, was dem bejahten dx zugehörte, einen entgegengeſetzten Werth bekommen, und eben ſo dp. Mann kann ſich aber die Mühe dieſe Mannichfaltigkeiten zu unterſcheiden erſparen. Denn wenn man die Frage der Aufgabe für verneinte x beantworten ſoll, darf man ſich nur vorſtellen, daß ſie abnehmen, oder das größte verneinte als das erſte, und das kleinere als das zweite anſehen, ſo bekömmt man allemahl bejahte dx. Iſt alſo für bejahte dx.

die Ordinate,	und dp	ſo iſt die krumme Linie gegen die Axe
bejaht	verneint	hohl
	bejaht	erhaben
verneint	verneint	erhaben
	bejaht	hohl

oder die krumme Linie iſt gegen die Axe hohl, oder erhaben, nachdem Ordinate und dp, entgegengeſetzte, oder nicht entgegengeſetzte Gröſſen ſind, oder nachdem $\frac{dp}{y}$ verneint oder bejaht iſt.

522. Zuſ. Wenn dx unveränderlich iſt, wie man hier ohngeachtet 518 VIII annehmen darf, weil die Abſicht nicht iſt, zweene Krümmungswinkel zu vergleichen, ſo iſt in 521 II; bey bejahten Ordinaten — ddy für die hohle krumme Linie bejaht, für die erhabene verneint; folglich ddy für jene verneint, für dieſe bejaht, das iſt, bey der hohlen krummen Linie 21 F. nehmen für zunehmende Abſciſſen, der Ordinaten Differentiale ab, wenn die Ordinaten ſelbſt zunehmen, oder zu, wenn die Ordinaten abnehmen (23). Für die erhabene findet das Gegentheil ſtatt.

523. Anm. CT 19 F. ſey der krummen Linie DMF Aſymptote; die Weiten von der Aſymptote MQ, ER, FT als Ordinaten betrachtet, müſſen unendlich abnehmen; Sie können aber für gleiche Zunahmen der Abſciſſe QR = RT nicht gleich viel abnehmen, oder es kann nicht MQ — ER = ER — FT ſeyn, ſonſt müßte, wenn dieſes beſtändig fortdauerte, die Ordinate MQ in einer endlichen Entfernung von Q, die ſich durch ein Vielfaches der Gröſſe QR ausdrücken lieſſe, bis auf Nichts abgenommen haben, oder gar verneint geworden ſeyn: Noch weniger dürfen die folgenden Ordinaten ſtärker abnehmen als die vorhergehenden, ſo daß ER — FT > MQ — ER wäre: Alſo bleibt nur das übrig, daß die folgenden Ordinaten weniger als die vorhergehenden abnehmen, oder MQ — ER > ER — FT;

das

das heißt; wenn die Puncte M; E; F; ſich einander unendlich nähern; dx iſt beſtändig und die Differentiale abnehmender Ordinaten nehmen ſelbſt auch ab. Folglich iſt nach (516) jede krumme Linie, die eine Aſymptote hat, gegen die Aſymptote erhoben; wie ſchon (110) aus andern Gründen dargethan worden.

Exempel bey parallelen Ordinaten.

524. Für die Kegelſchnitte (Alg. 362; 389) iſt $p = \frac{b.(a \mp 2x)}{2ay}$ (85) folglich

$$dp = \frac{b}{2a}.\left(\frac{\mp 2ydx - (a \mp 2x).dy}{y^2}\right);$$ oder

weil $dy = \frac{b.(a \mp 2bx)}{2ay}dx$; $dp = \frac{b}{2a}$.

$$\left[\mp 2y - (a \mp 2x).\frac{b.(a \mp 2bx)}{2ay}\right].\frac{dx}{y^2}$$

$$= \frac{bdx}{4a^2y^3}.(\mp 4ay^2 - (a \mp 2x).(ab \mp 2bx);$$

wo $-(a \mp 2x) = \pm 2x - a$ aber

$$\mp 4ay^2 = \mp 4a.bx \mp 4a. \mp \frac{bxx}{a}$$

$$= \mp 4abx + 4bxx$$

dazu $\mp 2abx - 4bxx - aab$

$\mp 2abx$

also $dp = \frac{-bbdx}{4y^3} = -\frac{bb}{4y^3}.\frac{ds}{\sqrt{(1+pp)}}$

also

alſo der Krümmungswinkel (518

$$\text{III)} = \frac{+ bb\, ds}{4y^3 . (1 + pp)^{3:2}}$$

525. Der Kreis iſt eine Ellipſe, wo b = a;
alſo $p = \frac{a - 2x}{2y}$ und $1 + pp =$

$$\frac{4yy + aa - 4ax + 4xx}{4yy} = \frac{aa}{4yy}$$

alſo der Krümmungswinkel $= aads : 4y^3$.

$$\frac{a^3}{8y^3} = \frac{2ds}{a} = \frac{ds}{\frac{1}{2}a}$$ = den Winkel am Mittelpuncte, deſſen Maas der Bogen von der Länge ds iſt, (G. 44. S. 11. Z.) wie in (96).

526. Die Normallinie jeder krummen Linie MO 1. F. heiſſe w ſo iſt $w = y \surd (1 + pp)$ (92) alſo der Krümmungswinkel jedes Kegelſchnittes $= \frac{bbds}{4w^3}$.

Bey der Parabel iſt $w = \frac{\surd (4yy + bb}{2}$

alſo ihr Krümmungswinkel $\frac{2bbds}{(4bx + bb)^{3:2}}$

Für die Abſciſſen $\frac{1}{4}$ b; und b; ſind die Krümmungs-

mungswinkel $\frac{2\,bbds}{2\surd 2.\,b^3}$ und $\frac{2\,bbds}{5\surd 5.\,b^3}$ alſo verhalten ſich die Krümmungen wie $5\surd 5 : 2\surd 2 = \surd 125 : \surd 8 =$ ohngefähr $\surd 15,62 : 1 = 3,9 : 1$ oder die Krümmung über dem Brennpuncte iſt ohngefähr 4 mahl gröſſer als über dem Ende der viermahl gröſſern Abſciſſe.

Am Scheitel iſt der Krümmungswinkel $\frac{2ds}{b}$ und verhält ſich zu dem über dem Brennpuncte wie $2\surd 2; 1 = \surd 8 : 1 = 2,8 : 1$. Der Krümmungswinkel für jedes endliche x verhält ſich zum Krümmungswinkel bey einer unendlichen Abſciſſe $= \frac{1}{(b.(4x+b))^{3:2}} : \frac{1}{(b.\infty\alpha)^{3:2}} = 8.\,\infty^{3:2} : (4x+b)^{3:2}$ — oder die Krümmnng der Parabel nimmt unendlich ab, indem die Abſciſſe unendlich zunimmt; der Krümmungswinkel nimmt nähmlich beſtändig ab, indem die Abſciſſe wächſt, und gleiche Bogen der Parabel, ſind deſto weniger krumm, je weiter ſie vom Scheitel liegen; daher wird der Schenkel der Parabel immer weniger und weniger krumm, je weiter er ſich hinaus erſtreckt.

525. Bey jedem Kegelſchnitte iſt $\frac{dp}{y} = -$

bbdx

$\frac{bbdx}{4y^4}$ allemahl für bejahte dx verneint, oder der Kegelſchnitt allemahl gegen die Axe hohl (521. II.)

526. Bey der neiliſchen Parabel (268) iſt

$$p = \frac{2a^{\frac{1}{2}}}{3} \cdot y^{-\frac{1}{2}};\ dp = -\frac{a^{\frac{1}{2}}}{3} \cdot y^{-\frac{3}{2}} dy =$$

$$\frac{-p \sqrt{a}}{3 \sqrt{(y^3 \cdot (1+pp))}} \cdot ds;\ \text{alſo}\ \frac{-dp}{1+pp}$$

$$= \frac{+p \sqrt{a} \cdot ds}{3 (y \cdot (1+pp))^{\frac{3}{2}}} = \frac{6 \sqrt{a} \cdot ds}{\sqrt{(y \cdot (9y+4a)^3)}}$$

$$= \frac{6a^{\frac{1}{3}} ds}{x^{\frac{1}{3}} \cdot \left[4a^{\frac{2}{3}} + 9x^{\frac{2}{3}} \right]^{\frac{3}{2}}}$$

527. $p = \frac{2ax}{3yy} = \frac{2axx}{3yyx} = \frac{2y}{3x}$;

alſo $dp = \frac{2}{3} \cdot \frac{xdy - xdy}{xx} = \frac{2}{3xx}$.

$\left[\frac{2y}{3} - y \right] dx = -\frac{2ydx}{9xx}$; alſo

$\frac{dp}{y} = -\frac{2dx}{9xx}$ und die krumme Linie beſtändig gegen die Axe hohl (521. II.) Wenn man p und

und dp aus 526 brauchen wollte, ſo würden die zweydeutigen Wurzelgröſſen Ungewißheiten verurſachen, die man wenigſtens mit mehr Mühe entſcheiden müßte, daher ich ſie hier zu vermeiden geſucht habe.

528. Weil $\frac{y}{x} = \sqrt[3]{\frac{a}{x}}$; ſo wird $\frac{y}{x}$ unendlich, wenn x unendlich abnimmt, alsdenn aber ſcheinet der Krümmungswinkel unendlich groß zu werden. Man muß aber bedenken, daß ds und x unendlichklein vom erſten Grade und $\sqrt[3]{x}$ vom Grade $\frac{1}{3}$ ſind, folglich der Krümmungswinkel ein Unendlichkleines vom Grade $\frac{2}{3}$ wird. Es ſey $ds = \frac{m}{\infty}$; $x = \frac{n}{\infty}$ ſo iſt der Krümmungswinkel $6\sqrt[3]{a} . \frac{m}{\infty} : \frac{\sqrt[3]{n}}{\infty^{1:3}} . 8a =$

$$\frac{3}{4} . \frac{m}{\sqrt[3]{aan} . \infty^{2:3}}$$

529. Wo ſich ein ſolcher Krümmungswinkel wie 528 findet, da ſagt man, die Krümmung ſey unendlich groß. Der Krümmungswinkel iſt in Vergleichung mit andern Krümmungswinkeln unendlich groß, und doch in Vergleichung mit endlichen Winkeln unendlich klein, wie das Geſetz der Stetigkeit (G. 6. Erkl.) erfodert. Dieſes kann beyſammen beſtehen, wenn er ein Un-

Unendlichkleines einer niedrigern Ordnung als der erſten iſt (11).

Exempel zu 518. bey Ordinaten aus einem Puncte.

530. Bey der archimediſchen Spirallinie ſey die Verhältniß des Durchmeſſers zum Umkreiſe $= 1 : \pi$ und in (Alg. 580.) $y = u$; ſo iſt ihre Gleichung $u = \frac{x}{2\pi}$ alſo in 518; III. $p = \frac{1}{2\pi}$; $dp = 0$; und $THD = \frac{2r\pi du}{rr + xx} + \frac{dx}{r}$

$$= \frac{2rr + xx}{r.(rr + xx)}.dx = \frac{(2rr + xx).2\pi ds}{(rr + x2)^{3:2}}$$

(518; VIII.)

Alſo verhalten ſich die Krümmungen für $x = 0$ und $x = 2r\pi$ oder beym Anfange der Spirale und am Ende ihrer erſten Umwindung, wie $\frac{2rr}{r3}$:

$$\frac{2rr + 4rr\pi\pi}{(rr + 4\pi\pi)^{3:2}} = (1 + 4\pi\pi)^{3:2} : (1 + 2\pi\pi)$$

531. Bey der paraboliſchen Spirale (107) iſt $r - u = \sqrt{ax}$; alſo $p = -\frac{1}{2} a^{1:2}.x^{-\frac{1}{2}}$; $dp = \frac{+\sqrt{a}}{x\sqrt{x}} dx$. Wenn man alles durch u ausdrückt,

drückt, weil ſich die Linie u mit den Linien r; a; leichter vergleichen läßt als der Bogen x, ſo findet man den Krümmungswinkel

$$\left[\frac{r^2\, a.(r - 2u)}{(r - u).(rraa + 4uu.(r - u)^2)} + 1\right].$$

$\frac{dx}{r}$ wo man ſtatt $\frac{dx}{r}$ ſeinen Werth

$$\frac{2ds.(r - u)}{\sqrt{(rraa + 4(r - u)^2.\, uu)}}$$ ſetzen kann.

Soll hier der Krümmungswinkel, bey einem bejahten dx bejaht oder die krumme Linie gegen C hohl ſeyn, ſo iſt (571) für $r > u$; $rraa.(r - 2u) + (r - u).(rraa + 4uu(r - u)^2)$ bejaht, oder wenn $r = 1$ geſetzt wird $u^5 - 3u^4 + 3u^3 - uu + \frac{3}{4}aau - \frac{1}{2}aa > 0$.

Von dem Wendungspuncte. (112)

532. Aufg. Den Wendungspunct einer krummen Linie zu finden.

Aufl. I. Wenn MN 25 F. hohl, und $\mu\nu$ erhoben iſt, ſo liegt der Durchſchnitt der Tangenten, H, über der Sehne MN; und η unter $\mu\nu$. Wenn alſo die Berührungspuncte an dem hohlen Theile M; N; dem erhabenen immer näher und näher rücken, und der Durchſchnitt H alſo nach und nach fortrücken ſoll, bis er auf die andere Seite der Sehne fällt, ſo muß er entweder von der Sehne ſich immer weiter und bis in das Un-

endliche entfernen, oder ihr immer näher und näher kommen. (G. 12 S. 12 Z.) In jenem Falle würde der Winkel MHN immer weniger und weniger ſtumpf und nähme bis auf nichts ab, alſo wüchſe ſein Nebenwinkel MHD bis auf 2 R. Dieſes läßt das Geſetz der ſtetigen Krümmung nicht zu (G. 6. Erkl.) und alſo findet der zweyte Fall allein ſtatt. Da nimmt nun der Winkel MHD immer mehr und mehr ab, und wie er allezeit als ein Krümmungswinkel, in Vergleichung mit andern endlichen Winkeln verſchwindet, ſo muß dieſer Krümmungswinkel hier ſo weit abnehmen, daß er in Vergleichung mit andern Krümmungswinkeln verſchwindet. Alſo muß (nach 518; III) für die Stelle des Wendungspunctes, $rr.(pdu - udp) + rr.(pp + uu).dx = 0$ ſeyn. Beynahe wie (520. II.)

II. Für parallele Ordinaten (518. IIII.) iſt entweder $\frac{dp}{dx} = 0$ oder $p = \infty$; wie (520; III; IIII.)

III. Alſo giebt einerley Verfahren Wendungspuncte, oder Rückkehrpuncte, weil die Vorausſetzung zwar allemahl bey einem Wendungspuncte, aber nicht allein bey ihm ſtatt findet, wie 520 VI; wo man auch ſieht, was man zu Entſcheidung dieſer Zweydeutigkeit zu thun hat. Denn wenn die Stelle kein Rückkehrpunct iſt, ſo iſt ſie eine Wendung, zuweilen auch beydes zugleich wie E 26 F.

Exem-

Exempel für parallele Ordinaten.

533. Bey den paraboliſchen Linien (163) iſt $\frac{dp}{dx} = m.(m-1)x^{m-2} + (m-1).(m-2) px^{m-3} + (m-2).(m-3) qx^{m-4} \ldots + 2s = x$. Alſo hat eine ſolche Linie vom Grade m; m — 2 Beugungspuncte, die durch die Auflöſung dieſer Gleichung gefunden werden.

Wenn m = 3 ſo iſt $6x + 2p = 0$ oder der Beugungspunct befindet ſich bey der Abſciſſe $-\frac{1}{3}p$.

534. Bey der krummen Linie Alg. 474; wird $p = -\frac{2}{3}\sqrt[2]{\frac{a}{a-x}}$; welches = ∞ für x = a wird. Für den daſigen Rückkehrpunct (520. II.)

535. I. Es ſey $y = \sqrt{x} \pm \sqrt[4]{x^3}$ (Eul. Introd. L. II. §. 333.). Hier kann man $\sqrt{x}$ nicht mit dem Zeichen — nehmen, ſonſt würde der andere Theil des Werthes von y; welcher = $\sqrt{(x\sqrt{x})}$ iſt, unmöglich. Alſo findet die Zweydeutigkeit der Zeichen nur vor der Wurzelgröſſe, die dieſen andern Theil ausmacht, ſtatt, und weil x nicht verneint werden kann ohne die Wurzelgröſſen unmöglich zu machen, auch die Biquadratwurzel aus x^3 nur zweene mögliche Werthe hat; ſo gehören jedem x nur zwey y zu,

 de-

deren Unterſchied auf die Zweydeutigkeit der Zeichen vor der Biquadratwurzel ankömmt.

II. Man ſetze $\sqrt[4]{x} = u$ und $x = u$ auch $du = \frac{dx}{4x^{3:4}} = \frac{dx}{4u^3}$ ſo iſt $y = u^2 \pm u^3$

und $dy = (2 \pm 3u).\,u\,du$ alſo $\frac{dy}{dx}$ oder

$p = \frac{1}{2uu} + \frac{3}{4u}$; und $dp = -\frac{du}{u^2}$.

$\left[\frac{1}{u} + \frac{3}{4}\right]$ oder $\frac{dp}{dx} = -\frac{(4 \pm 3u)}{16u^6}$

III; Jedes u giebt nur ein x; Man kann alſo zuerſt die u nach Gefallen annehmen, ſo giebt ſich für jedes u das zugehörige x; und das dieſem zugehörige y.

IIII; Weil in dem Werthe von y (II) nur der Würfel von u ſein Zeichen ändert, wenn u verneint wird, ſo findet man die beyden Werthe, welche y für jedes u oder x bekömmt, aus der Gleichung für y (II) durch den Gebrauch des doppelten Zeichens, ſo daß man u allemahl als bejaht annimmt.

V. Ich will das erſte y nennen, das $= uu(1 + u)$ und das zweyte, das $= uu(1 - u)$ iſt.

Der-

Dergleichen ſollen CE; CD; 27 F. ſeyn. So

iſt für	$u = 0$;	$\frac{2}{3}$;	1;	$\frac{4}{3}$;	2;
	$x = 0$;	$\frac{16}{81}$;	1;	$\frac{256}{81}$;	16;
erſtes	$y = 0$;	$\frac{20}{27}$;	2;	$\frac{112}{27}$;	12;
zweytes	$y = 0$;	$\frac{4}{27}$;	0;	$-\frac{10}{27}$;	-4;

VI. Das erſte y wächſt mit u oder x ohne Ende. Das zweyte muß für einen Werth von u, der zwiſchen o und 1 fällt, ein größtes werden. Es iſt nähmlich für die Reihe der zweyten y; die Gröſſe $p = \frac{1}{2u} \cdot \left[\frac{1}{u} - \frac{3}{2}\right]$ alſo nach (155) $p = 0$ wenn $u = \frac{2}{3} = AC$ 27 F.

VII. Für $n < 1$ oder $x < 1$ ſind beyde Ordinaten bejaht. Für $x > 1$ bleibt es die erſte, aber die zweyte wird verneint, und dieſe verneinten Ordinaten wachſen mit u, oder x; ohne Ende.

VIII. Für die erſte Ordinate iſt $\frac{dp}{dx}$
$= -\frac{(4 + 3u)}{16u6}$ allemahl verneint; und y bejaht; alſo der Schenkel AEF den ſie giebt, gegen die Axe beſtändig hohl (521. II;) Für die andere iſt
$\frac{dp}{dx} = -\frac{(4 - 3u)}{16u^6}$ verneint, ſo lange $u < \frac{4}{3}$ oder $x < \frac{256}{81}$ iſt, für gröſſere u und x aber bejaht; aber die Ordinate CD für jede Abſciſſe von o bis AB = 1 bejaht, und alſo der Schenkel,

den ſie giebt, zwiſchen dieſer beyden Abſciſſen Gränzen A und C hohl; ferner die Ordinate von der Abſciſſe = 1 ohne Ende fort verneint, wie GH und weil von dieſer Abſciſſe an bis an $\frac{256}{81}$ noch dp verneint iſt, ſo iſt der Theil BH dieſes Schenkels, der ſich mit der Abſciſſe 1 oder bey B anfängt, und bis an die $\frac{256}{81}$ = AG geht, erhoben: Weil aber von da dp bejaht wird, da die Ordinate verneint bleibt, ſo iſt alles Folgende dieſes Schenkels HK hohl, alſo in K ein Wendungspunct, wo $\frac{dp}{dx} = 0$ (532)

VIIII. Dieſe krumme Linie FEADBHK hat bey A einen Rückkehrpunct ohne Wendungspunct eine Spitze von der zweyten Art (516).

Exempel für Ordinaten aus einem Puncte.

536. In der paraboliſchen Spirallinie (531) iſt der Wendungspunct da, wo die Gröſſe = 0 wird, die an dem Ende von 531; > 0 geſetzt wurde. Wenn man mit Jacob Bernoulli am (90) angef. O. den Umfang des Kreiſes oder $2r\pi = \frac{rr}{a}$ ſetzt, damit für $x = 2r\pi$; die Ordinate = 0 wird, ſo iſt $a = \frac{1}{2} r . \frac{1}{\pi}$ wo man für r = 1; aus (G. 44 S. 5 Z.) a = 0,

o, 159154943. . . . und aa = o, 02532. . . alſo $u^5 - 3u^4 + 3u^3 - u^2 + o, o1899u - o, o1266 = o$ bekömmt. Setzt man in (531) $r = 1$; $u = 1 - y$; und was herauskömmt = o; ſo bekömmt man $y^5 - 2y^4 + y^3 + \frac{3}{4} a^2 y - \frac{1}{4} a^2$, wenn nun hier $y = \frac{1}{6}$ ſo ſind die drey erſten Glieder dieſes Ausdruckes $\frac{25}{6^5}$ = o, 00322 . . . Die beyden letzten $\frac{1}{4}$ aa. — $\frac{1}{2}$ welches ſich für $a = \frac{r}{2\pi}$ in — o, 00316. . . verwandelt. Alle fünf Glieder zuſammen geben alſo + o, 00006 und da dieſes etwas ſehr geringes iſt, ſo iſt (nach Alg. 319) für den Wendungspunct beynahe $u = \frac{5}{6}$; folglich der Bogen AP 22 F. oder $x = \frac{(r-u)^2}{a}$ beynahe $= \frac{1}{36} : \frac{1}{2\pi} = \frac{2\pi}{36}$ und weil 2π der ganze Umfang iſt, ſo iſt ACM = 10 Gr.

537. Aufg. Bey parallelen Ordinaten zu zu finden, unter was für Umſtänden ein Wendungspunct vorhanden iſt, wenn dy = o.

Aufl. Man ſetze dx unveränderlich, und = 1 (419) ſo iſt der Wendungspunct der Hauptlinie, (127) bey der Abſciſſe, bey welcher dp = o (532) alſo die Ordinote p der erſten Differentiallinie ein Gröſtes oder Kleinſtes wird (155). Wird nun allemahl dy = o angenommen, und es iſt

$ddy = 0$; ſo findet dieſes ſtatt, und der Hauptlinie Ordinate iſt kein Größtes oder Kleinſtes, (155; III) aber es giebt einen Wendungspunct.

Iſt auch $d^3 y = 0$; aber nicht $d^4 y$ ſo iſt der erſten Differentiallinie Ordinate kein Größtes oder Kleinſtes (155. V.) alſo hat die Hauptlinie keinen Wendungspunct; aber ein Größtes oder Kleinſtes (155; VIII.)

Iſt auch $d^4 y = 0$ aber nicht $d^5 y$ ſo hat die erſte Differentiallinie ein Größtes oder Kleinſtes 155; VIII.) alſo die Hauptlinie einen Wendungspunct, aber kein Größtes oder Kleinſtes.

So erhellt überhaupt, daß für $dy = 0$; die Hauptlinie entweder einen Wendungspunct, oder ein größtes hat, nachdem die Anzahl der nächſt folgenden höhern Differentiale von y die für eben die Abſciſſe verſchwinden, 1; 3; . . . ungerade, oder 0; 2. . . gerade iſt. Mac Laurin Treat on Flux. Book I. art. 261. wo man auch gleich darauf Betrachtungen über die Spitzen (516) antrifft.

Vom

Vom Krümmungskreiſe.

538. Erkl. NV = MN 28 F. ſind Sehnen einer krummen Linie, und K iſt der Mittelpunct eines Kreiſes durch M: N; V; Wenn ſich V; M dem Puncte N unendlich nähern, ſo heißt dieſer Kreis der Krümmungskreis (circulus curuaturae ſ. oſculator;) und ſein Halbmeſſer der Halbmeſſer der Krümmung (radius oſculi).

539. Zuſ. Sind NH; MH; Tangenten der krummen Linie wie 22 F. ſo iſt HNW gewiß eine Tangente des Krümmungskreiſes; weil die Puncte M; V; beyde auf einer Seite dieſer geraden Linie liegen. (Alg. 449.)

540. Zuſ. Alſo wenn MKN = $\varkappa$ heißt; MNH = R — MNK und MNK = R — $\frac{1}{2}\varkappa$ folglich MNH = $\frac{1}{2}\varkappa$.

541. Zuſ. HMN; WNV; ſind zweene nächſt nach einander folgende Winkel der Tangenten mit den Sehnen. Wenn die Sehnen anfangs endlich ſind, ſind dieſe Winkel endlich; Es ſey WNV = HMN + δHMN; wo δHMN bedeutet, was zu HMN kömmt, damit WNV daraus wird. Weil ſich nun dieſe Winkel wie alle übrige Gröſſen nach dem Geſetze der Stetigkeit verändern müſſen; ſo nimmt der Quotient $\frac{\delta HMN}{HMN}$ unendlich ab, indem V; N; M; ſich einander unendlich nähern.

542. Zuſ. HNM = 2R — WNV — MNV; aber MNV = 2. MNK = 2. (R — $\frac{1}{2}$ κ) = 2R — κ alſo HNM = κ — WNV = κ — HMN — δHMN folglich

$$\frac{HNM + HMN}{HMN} + \frac{\delta HMN}{HMN} = \frac{\kappa}{HMN};$$

Aber HNM + HMN = THD; alſo nähert ſich (542) der Quotient $\frac{THD}{HMN}$ unendlich dem Quotienten $\frac{\kappa}{HMN}$ oder es wird THD = κ.

543. Aufg. Den Halbmeſſer der Krümmung zu finden.

Aufl. I. Aus Trig. 8. S. iſt MK = $\frac{\frac{1}{2} MN}{\sin \frac{1}{2}\kappa}$; Wenn ſich nun M; N; einander unendlich nähern, ſo verwandelt ſich MN; in ds; und ſin $\frac{1}{2}$ κ in $\frac{1}{2}$ κ (286) = $\frac{1}{2}$ THD (542) alſo wird MK = $\frac{ds}{THD}$ wo der Diviſor aus 518. bekannt iſt.

II. Es iſt nähmlich der Halbmeſſer der Krümmung = z, für parallele Ordinaten, wo ds = dx √ (1 + pp) aus 518; IIII;

$$= -(1 + pp)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{dx}{dp} = \frac{ds^3}{dyddx - dxddy}$$

(542. II.)

III.

III. Alſo wenn dx unveränderlich iſt

$$z = -\frac{ds^2}{dxddy}.$$

IIII. Wenn ds unveränderlich iſt; alſo $dyddy + dxddx = 0$; $z = \frac{dyds}{ddx} = -\frac{dxds}{ddy}$

V. Für Ordinaten aus einem Puncte, iſt $r.ds = dx.\sqrt{(rrpp + uu)}$ (509) wenn dorten $y = u$; dy oder $du = pdx$ geſetzt wird, alſo

$$z = \frac{(rrpp + uu).dsdx}{r.(pdu - udp)dx + rds}$$

VI. Wenn man hierinn aus 518 IIII; den Werth von dp; und aus hier V; den von $ds = \frac{\sqrt{(r^2du^2 + u^2dx^2)}}{r}$ ſetzt, ſo findet man

$$z = \frac{rds^3}{dxds^2 + du^2dx + ududx - udxddu}$$

VI. Iſt hier du unveränderlich, ſo iſt

$$z = \frac{rds^3}{dx(ds^2 + du^2) + ududdx}$$

VII. Iſt ds unveränderlich, ſo kömmt

$$z = \frac{rdsdy}{2dydx + yddx}$$

VIII. Iſt dx unveränderlich, ſo kömmt

$$z = \frac{rds^3}{dx.(ds^2 + du^2) - udxddu}$$

Wenn

Wenn man daraus $ddu = \frac{r^2\ dsdds - ududx^2}{r^2\ du}$

wegſchafft, ſo erhält man

$$z = \frac{rds^2\ du}{dx.\ (2dsdu - udds)}$$

VIIII. Setzt man $u = r + y$ und alsdenn $r = \infty$ ſo verwandelt ſich V in II. wie bey 518 IIII.

X. Die krumme Linie iſt hohl oder erhaben, nachdem dieſe Ausdrückungen für den Halbmeſſer der Krümmung bejahte oder verneinte Werthe geben. (hier I und 521.) Der Mittelpunct der Krümmung liegt nähmlich auf der hohlen Seite der krummen Linie. Wenn alſo eine krumme Linie nach einer Gegend hohl, und die andere nach eben der Gegend erhaben iſt, ſo haben die Halbmeſſer der Krümmung entgegengeſetzte Lagen.

XI. Die Formel (V) hat Cramer in den Anmerk. über Jac. Bernoullis Werke T. I. n. 58. p. 579. not. n. ſynthetiſch erwieſen. In meinem Lehrbegriffe der Optik 2. B. II. Th. 5. C. habe ich eine Analyſis davon unter den gewöhnlichen Vorausſetzungen der Rechnung des Unendlichen gegeben.

XII. Die Normallinie wie MO 1. F. heiſſe

$$w = \surd\left(yy + \frac{yydy^2}{dx^2}\right)\ (92) = y \surd\ (1 + pp);$$

ſo iſt $z = -\left[\frac{w}{y}\right]^{\cdot 3} \frac{dx}{dp}$

XIII. Am Scheitel, wie bey C 1. F. iſt der Krümmungskreis ein Kreis durch C der mit der krummen Linie die verſchwindende Ordinate PM gemein hat, alſo ſein Durchmeſſer $CO = CP + PO = CP + \frac{PM^2}{DP} = \frac{PM^2}{CP}$ für verſchwindende PM und CP, wenn er endlich ſeyn ſoll, denn da muß $\frac{PM^2}{CP}$ ein endlicher Quotient ſeyn, weil CP verſchwindet. Von dieſem Verfahren den Krümmungskreis zu finden, handeln umſtändlicher Iac. Bernoulli Op. n. 103. art. 22. Io. Bernoulli Lect. Hoſpital. 17; 18; Op. T. III.

XIIII. Wenn p ſich durch x allein ohne y, oder durch y allein ohne x ausdrücken läßt, wird ſich aus 543; II; z am bequemſten finden laſſen, wenn man nähmlich die gegebene Ordinate oder Abſciſſe ſtatt y oder x ſetzt.

Wäre aber p durch y und x zugleich gegeben, und man hätte eine algebraiſche Gleichung zwiſchen x und y; ſo lieſſe ſich aus dieſer Gleichung, mit der, zwiſchen p, x, y, zuſammen genommen, entweder x oder y wegſchaffen, und alſo eine dritte zwiſchen p und x, oder zwiſchen p und y, welches von beyden man wollte erhalten.

Bey jeder algebraiſchen krummen Linie alſo giebt es eine algebraiſche Gleichung zwiſchen p und x.

Man

Man ſetze $\frac{dp}{dx} = q$, ſo iſt bey jeder algebraiſchen Linie, q durch x und p gegeben. Wenn man alſo die Gleichung zwiſchen x und y; und die zwiſchen q, x, p, verbindet, ſo erhält man eine zwiſchen q und x;

544. Zuſ. Weil HNK = R (539) ſo iſt HMK = 3R — MHN — $\varkappa$ (G. 13 S. 6. Z.) = 3R — (2R — $\varkappa$) — $\varkappa$ (542) = R, alſo TMH auch eine Tangente des Kreiſes. Folglich fallen beyde Bogen durch M und N; der krummen Linie ihrer und des Krümmungskreiſes ſeiner, innerhalb des Dreyecks MHN (68) und weil dieſes Dreyeck ſich einer geraden Linie MN, unendlich nähert, (532) ſo nähern ſich beyde Bogen einander unendlich. Alſo kann kein Bogen eines andern Kreiſes zwiſchen dem Krümmnngskreiſe und der krummen Linie durch M oder N gehen. In dieſer Bedeutung zeigt der Kreis die Krümmung der krummen Linie an, wie die Tangente ihre Richtung (G. 41. S. Anm.) Auch ſtimmt damit überein, daß MHD zugleich der Krümmungswinkel des Kreiſes und der krummen Linie iſt, wenn beyder gemeinſchaftliche Tangenten MH; NH; ſind, woraus weiter folgt, was ſchon vorhin dargethan worden: daß MHD = $\varkappa$ (96).

545. Zuſ. Der Winkel, den zwo Tangenten an beyden Endpuncten eines Kreisbogens mit einander machen, iſt allemahl dem Winkel des

Aus-

Ausſchnittes gleich, wie man leicht überſieht, wenn man MN 27 F. für einen endlichen Kreisbogen annimmt, der K zum Mittelpuncte hätte. Sind alſo zweener Kreiſe Halbmeſſer C; c; und man nimmt auf ihnen Bogen, deren Längen V; v; ſind, ſo verhalten ſich die Winkel der Tangenten an beyden Kreiſen, wie $\frac{V}{C} : \frac{v}{c}$ (S. 44. S. 11. Z.) $= c : C$ wenn $V = v$. Wenn ſich alſo dieſe Winkel in Krümmungswinkel verwandeln, ſo verhalten ſich die Krümmungswinkel bey zwo krummen Linien, oder an zwo Stellen einer krummen Linie, verkehrt wie die Halbmeſſer der Krümmung; wobey zum voraus geſetzt wird, daß die beyden Elemente, deren Krümmung man ſolchergeſtalt vergleicht, gleich lang ſind.

546. Anm. Man nehme nichts an, als daß MK; NK; Perpendikel auf die Tangenten NH; MH; ſind; ſo iſt $MK = \surd(HK^2 - MH^2)$ alſo $\frac{MK}{HK}$

$$= \surd\left(1 - \frac{MH^2}{HK^2}\right) = 1 - \frac{MH^2}{2HK^2}$$

$$+ \frac{B.\, MH^4}{HK^4} \ldots$$ (46. wenn $m = \frac{1}{2}$) folglich

$$\frac{HK - MK}{MH} = \frac{MH}{2HK} - \frac{B.\, MH^3}{HK^3} \ldots$$

Wenn nun MH unendlich abnimmt, ſo nähert ſich MHK unendlich einem rechten Winkel, und alſo wird

MK

$\frac{MK}{MH}$ unendlich (Trig. 4. Erkl. 2. Zuſ. alſo iſt MK endlich, und folglich auch MH, daher verſchwindet $\frac{MH}{HK}$ oder der Unterſchied zwiſchen HK und MK verſchwindet in Vergleichnug mit MK, folglich anch in Vergleichung mit dx; dy; ds; zu denen MH endliche Verhältniſſe hat. Alſo können KH; KM; als zweene Halbmeſſer eines Kreiſes angeſehen werden. Dazu iſt nähmlich bey ein paar Linien nicht genug, daß ihr Unterſchied in Vergleichung mit ihnen verſchwindet, ſonſt wären CM; CN; 22 F. dergleichen, ſondern eine Linie, die in einer andern Lage, wie KM in der Lage KH, noch ein Halbmeſſer eines Kreiſes ſeyn ſoll, muß ſich nicht verändern, indem ſich ſonſt jede dem Puncte M zugehörige Linie, in eine unterſchiedene dem andern Puncte zugehörige verändert. Linien können alſo als Halbmeſſer eines Kreiſes angeſehen werden, wenn beyder Unterſchied, wie hier HK - MK, ein Unendlichkleines der zweyten Ordnung, wie hier $\frac{MH^2}{2\,HK}$ iſt. Eben die Schlüſſe laſſen ſich von NK und HK machen, alſo ſind KM; KH; KN; drey Halbmeſſer eines Kreiſes, der der Krümmungskreis ſeyn wird.

Exempel für parallele Ordinaten.

547. Für die Kegelſchnitte iſt aus 524.

$$1 + pp = \frac{\pm 4abx^2 + 4aabx + aabb + 4bb \pm 4abb}{4.(aabx \pm ab\,xx)}$$

dar-

daraus folgt (543. II;) $-(1+pp)^{3:2}\frac{dx}{dp}$

$$=+\frac{\left(\begin{matrix}\pm\ 4abxx + 4aabx + aabb\\ +\ 4bb\ \pm\ 4abb\end{matrix}\right)^{3:2}}{2a^3bb}=z$$

Die obern Zeichen für die Hyperbel, die untern für die Ellipſe.

Für die Parabel, da a unendlich wird;

$$z=\frac{(aa.(4bx+bb))^{3:2}}{a^3bb}=$$

$$\frac{(4x+b)^{3:2}}{2\sqrt{b}}$$

Für alle Kegelſchnitte iſt $dp=-\frac{b^2dx}{4y}$

(524) alſo $z=\frac{4w^3}{bb}$ (543; XIII.)

Für den Scheitel iſt nach 543 XIII; $\frac{yy}{x}$

oder $b+\frac{bx}{a}=b$ alſo $z=\frac{1}{2}b$ oder der Halbmeſſer der Krümmung am Scheitel jedes Kegelſchnittes iſt dem halben Parameter gleich, wie auch der allgemeine Ausdruck für z; wenn $x=0$, giebt. An dem Mittelpuncte iſt bey der Ellipſe $x=\frac{1}{2}a$ und $z=((4bb-4ab).\frac{1}{4}aa$

$+ 4ab. (a - b). \frac{1}{2} a + aabb)^{3:2} : 2a^3 bb$
oder $= a \sqrt{ab} : 2b$

An dem Mittelpuncte der Hyperbel iſt $x = - \frac{1}{2} a$ und der Zähler des Halbmeſſers der Krümmung $= (- 2a^3 b)^{3:2}$ unmöglich, weil da nichts von der krummen Linie iſt.

Die Krümmungen der Ellipſe am Scheitel und über dem Mittelpuncte verhalten ſich (545) wie $\frac{a \sqrt{ab}}{2b} : \frac{1}{2} b = a \sqrt{a} : b \sqrt{b} = a^3 : c^3$ (Alg. 366.)

548. Zuſ. MB 29 F. ſey eine Tangente an der krummen Linie ML Puncte M; MI aber eine nach Gefallen gezogene gerade Linie, mit der BLEF parallel gehe, und die krumme Linie in L; einen Kreis aber der MG zur Sehne und MB ebenfalls zur Tangente hat, in E und F ſchneide. Nun iſt im Kreiſe $BM^2 = BE. BF$ (Trig. 16. S.) Wenn aber BF mit einer parallelen Bewegung, der MI unendlich nahe rückt, ſo nähert ſich BF unendlich der Gröſſe MG; und da allemahl $\frac{BM^2}{BE} = BF$; ſo wird dieſer Quotient in dem nur erwähnten Falle $= MG$. Man ſetze, aus der Natur der krummen Linie ſey $\frac{BM^2}{BL} = w$ und w ſey eine ſolche Gröſſe, die ſich in MG ver-

wan-

wandele, wenn BLEF der MI unendlich nahe rückt, oder man ſuche den Werth $\frac{BM^2}{BL}$ wenn MB verſchwindet, und nehme MG demſelben gleich. Nach dieſer Vorausſetzung werden die Puncte L und E ſich einander unendlich nähern, wenn L; E; unendlich nahe an M rücken; das iſt, ein Kreis, der MG zur Sehne hat, wird die krumme Linie ML in M wo er mit ihr einerley Tangente MB hat, dergeſtalt berühren, daß kein anderer Bogen eines andern Kreiſes, durch M, zwiſchen ſeinem Bogen ME und dem Bogen der krummen Linie ML durchgehen kann. Denn thäte dieſes ein Bogen eines andern Kreiſes, ſo ſonderte er die genannten beyden Bogen dergeſtalt ab, daß die Puncte, L in dem einen und E in dem andern, einander nicht ſo nahe als man will, oder unendlich nahe rücken könnten, weil ſie auf verſchiedenen Seiten des Punctes liegen müſſen, in welchem BLEF zwiſchen L und E den andern Kreis ſchneidet; und dieſer Durchſchnittspunct des andern Kreiſes mit BF; kann dem Puncte L nicht unendlich nahe rücken, wo der andere Kreis nicht aus MB; ML; ſo wie der erſte beſtimmt wird, d. i. mit ihm einerley iſt.

Dieſer Kreis alſo, der MB zur Tangente und MG zur Sehne hat, iſt der Krümmungskreis. Er iſt gegeben, denn ſein Mittelpunct K muß ſich in zwo gegebenen Linien befinden; in einem Perpen-

pendikel auf die Tangente durch M; und in einem andern, das die Sehne in V halbirt. Weil nun KMV = R — BMG; ſo iſt MK = $\frac{\frac{1}{2} MG}{\sin BMG} = \frac{e}{2m}$ wenn MG = e und ſin BMG = m. So betrachtet Mac Laurin den Krümmungskreis; Treat on Flux. Chap. XI. Man ſieht leicht, wieviel ähnliches dieſes mit 543 XIII. hat.

Exempel.

549. Dieſes auf die Parabel anzuwenden ſuche man erſtlich die Gleichung für die Parabel, wenn die Abſciſſen auf einen Durchmeſſer (Alg. 462.) genommen werden, und die Ordinaten mit der Tangente am Scheitel des Durchmeſſers, oder dem Orte, wo er die Parabel ſchneidet, parallel gehen. CMN 1 F. ſey eine ſolche Parabel; CO die Axe, b der Parameter für die Axe; MS ein Durchmeſſer, deſſen Weite von der Axe MP = f gegeben iſt So iſt PT = 2. CP (84) = $\frac{2ff}{b}$ und MT = $\sqrt{(PT^2 + MP^2)}$ = $\frac{f\sqrt{(4ff + bb)}}{b} = \frac{fg}{b}$. Nun ſey N ein willkührlicher Punct der Parabel; durch N gehe eine Linie mit der Tangente MV parallel und ſchneide den Durchmeſſer MS in H; ſo iſt SH = NS.

$\frac{NS.\,PT}{MP} = \frac{NS.\,2f}{b}$; $NH = \frac{NS.\,MT}{MP} = \frac{NS\,g}{b}$; ferner $(NS + f)^2 = b.(CP + PQ = b.(CP + MS)$ alſo $\frac{NS^2 + 2f.\,NS}{b} = MS$; Nun ſey $MH = m$; $NH = n$; ſo iſt $m = MS - SH = \frac{NS^2}{b}$; $n = \frac{NS\,g}{b}$; alſo NS^2 oder $b\,m = \frac{b\,b\,n\,n}{g\,g}$ oder $\frac{gg}{b}\,m = n\,n$ daß alſo der Parameter für dieſen Durchmeſſer $= \frac{4ff}{b} + b$ iſt.

Nun iſt alſo in (548) MI der Durchmeſſer, $MB = n$; $BL = m$; und $e = \frac{g\,g}{b} =$ dem Parameter des Durchmeſſers. Ferner ſin $BMG = \frac{MP}{MT}$ der 1. F. $= \frac{b}{g}$ und der Krümmungshalbmeſſer $= \frac{gg}{b} : \frac{2b}{g} = \frac{g^3}{2bb} =$

$\frac{(4b.\,CP + bb)^{3:2}}{2bb}$ wie (547)

550. MI ſey die Axe der neiliſchen Parabel, weil für ſie $\frac{x}{y} = \sqrt[3]{\frac{x}{a}}$ ſo verſchwindet dieſer

Quotient, wenn x verſchwindet, und die krumme Linie ſteht im Anfange der Abſciſſen, welches hier M iſt, auf die Axe ſenkrecht. Alſo iſt m = o und MK müßte in die Axe fallen. Ferner iſt $\frac{MB^2}{BL} = \frac{y^3}{x} = \frac{ax}{y} = a\,\sqrt[3]{\frac{x}{a}}$ welches für x = o verſchwindet. Die Sehne MG oder der ihr gleiche Halbmeſſer der Krümmung verſchwinden alſo; das iſt: ſo klein auch der Halbmeſſer eines Kreiſes iſt, den man aus einem in der Axe angenommenen Mittelpuncte durch den Anfang der Abſciſſen M beſchrieben hat, ſo geht doch zwiſchen dieſem Kreiſe und der krummen Linie noch jeder anderer durch, den man aus einem Mittelpuncte in der Axe, mit einem kleinern Halbmeſſer durch M beſchreibt; Es giebt alſo hier eigentlich keinen Krümmungskreis, oder man muß ſagen, ſein Halbmeſſer ſey o oder unendlich klein, wie die unendliche Krümmung daſelbſt erfodert. (529. 545.)

551. Bey der cubiſchen Parabel, wo $y^3 = aax$ iſt; hat man $\frac{y}{x} = \frac{aa}{yy}$ welches für die verſchwindenden Coordinaten unendlich wird, daß alſo wiederum die krumme Linie am Scheitel auf ihre Axe ſenkrecht ſteht. Iſt alſo MB ihre Tangente am Scheitel, ſo iſt m = 1 und $\frac{MB^2}{BL}$

=

$= \frac{yy}{x} = \frac{aa}{y}$ welches für das verſchwindende y unendlich wird. Der unendliche Halbmeſſer der Krümmung zeigt hier eine Krümmung an, die in Vergleichung mit andern Krümmungen unendlich klein iſt. (545)

Für dieſe krumme Linie iſt nach (521); $p = \frac{aa}{3yy}$ und $dp = -\frac{2aady}{3y^3} = -\frac{2a^4dx}{9y^5}$ alſo $\frac{dp}{y} = -\frac{2a^4dx}{9y^6}$ folglich die krumme Linie allemahl gegen die Axe hohl. Da ſie nun für bejahte Abſciſſen nur bejahte, und für verneinte Abſciſſen nur verneinte Ordinaten hat, alſo die Axe im Anfange der Abſciſſen, und zwar erwieſener Maaſſen ſenkrecht ſchneidet, ſo muß ſie, um gegen die Abſciſſe auf beyden Seiten hohl zu ſeyn, im Scheitel einen Wendungspunct haben, wo der Krümmungswinkel in Vergleichung mit andern Krümmungswinkeln verſchwindet (532).

Fragen, die mit dem Krümmungskreiſe zuſammenhängen.

552. Die Stelle zu finden, wo eine gegebene krumme Linie die Krümmung eines gegebenen Kreiſes hat, ſetze man z (543) einer gegebenen Gröſſe f, gleich.

Bey der Parabel (547) giebt $\frac{(4x+b)^{3:2}}{2\sqrt{b}} = f$; $x = \sqrt[3]{\frac{1}{16} bff} - \frac{1}{4} b$. So iſt für die Stelle, wo der Halbmeſſer der Krümmung $= 4b$ iſt, die Abſciſſe $= \frac{3}{4} b$.

553. Die größte oder kleinſte Krümmung findet man, wenn man mit dem Halbmeſſer z; nach 155 verfährt, daß jetzo z heißt, was dorten y war. Es ſey für eine Parabel $aay = x^3$; alſo $p = \frac{3xx}{aa}$; $dp = \frac{6xdx}{aa}$; und aus (543; II.)

$$z = -\frac{(a^4 + 9x^4)^{3:2}}{6a^4 x}.$$

Weil nun das Zeichen — blos die Lage des Halbmeſſers der Krümmung, und daß die krumme Linie gegen die Axe erhoben iſt, angezeigt, (543. X.) ſo ſieht man z als bejaht an, wenn nur von der Gröſſe, nicht von der Lage die Rede iſt, und da iſt folglich

$$\frac{dz}{dx} = \frac{(45x^4 - a^4).\sqrt{(a^4 + 9x^4)}}{6a^4 xx}$$

welches für $x = a : \sqrt[4]{45}$ verſchwindet. Ferner giebt dieſer Ausdruck $\frac{6a^4 dz}{dx} = (45x^2 - a^4 x^{-2}).(a + 9x^4)^{\frac{1}{2}}$ weiter differentiirt

$$\frac{6a^4 ddz}{dx^2} = (2a^8 x^{-3} + 180a^4 x + 1620x^5):$$

$\sqrt{}$

$\sqrt{(a^4 + 9x^4)}$ welches bejaht iſt, daß alſo für $x = a : \sqrt[4]{45}$ der Halbmeſſer der Krümmung ein Kleinſtes, und folglich die Krümmung daſelbſt die größte iſt. (155. III) Hätte man den Halbmeſſer verneint behalten, ſo wären ſeine Differentiale verneint geworden, welches zu dem entgegengeſetzten unrichtigen Schluſſe hätte verleiten können. Wiewohl eine kleine Aufmerkſamkeit auch da (nach 153) würde gezeigt haben, daß die Zeichen der Differentiale, welche nach 543 bejahte Kleinſte oder Größte anzeigen, umgekehrt verneinte Größte oder Kleinſte zu erkennen geben.

554. Anm. Aus $y^5 = aax^3$ wird $p = \frac{3}{5} \sqrt[5]{\frac{aa}{xx}}$ und $dp = - \frac{6}{25} dx. \sqrt[5]{\frac{aa}{x^7}}$ alſo

$$z = \frac{(25x^{4:5} + 9a^{4:5})^{3:2}}{30a^{2:5}} \text{ und } \frac{dp}{y}$$

$$= - \frac{6dx}{25xx}$$ alſo die krumme Linie beſtändig gegen die Axe hohl. (521) Weil nun $\frac{y}{x} = \sqrt[5]{\frac{aa}{xx}}$ für $x = 0$ unendlich wird, ſo ſchneidet die krumme Linie im Anfange der Abſciſſen die Axe ſenkrecht, und muß alſo da einen Wendungspunct haben, wo alſo der Halbmeſſer der Krümmung nicht $= 0$ ſondern unendlich ſeyn ſollte. (551) Dieſe Schwürigkeit hat Jac. Bernoulli gehoben Act. Er. Lipſ. 1697. Sept. oder Op. n. 76.

Exempel zu 543 bey Ordinaten aus einem Puncte.

555. Für die archimediſche Spirale iſt (543. I. und 530) $z = \frac{(rr + xx)^{3:2}}{(2rr + xx).\ 2\pi}$

556. Für die logarithmiſche Spirale, (510). iſt $\frac{ydx}{r} = mdy$; alſo $ds = dy.\ \surd\ (1 + mm)$. folglich nach 543 VIII. $z = \frac{u \surd\ (mm + 1)}{m}$

Halbmeſſer der Krümmung für die Radlinie.

557. I. Weil für ſie 7. F. der Bogen $FL = LP$ (Alg. 610) ſo muß man ſuchen dieſe Eigenſchaft durch eine Differentialgleichung zwiſchen rechtwinklichten Coordinaten auszudrucken, da es keine algebraiſche geben kann. Es ſey $FM = x$; $MP = y$; ſo iſt $y - ML = FL$ alſo $dy = dFL + dML$; Dieſe letzten beyden Differentiale aber finden ſich durch x aus der Natur des Kreiſes. Wenn $FE = 2r$; ſo iſt $LM^2 = 2rx - xx$ alſo $dLM = \frac{(r - x)\ dx}{LM}$ und $\surd\ (dx^2 + dLM^2)$ oder $dFL = \frac{rdx}{LM}$; alſo iſt die Gleichung für die

die Cycloide $dy = \frac{(2r - x) dx}{\surd (2rx - xx)}$; daraus giebt ſich alſo $\frac{dy}{dx}$ oder p; und ferner $1 + pp = \frac{4rr - 2rx}{2rx - xx}$ und $dp = \frac{r.(x - 2r}{(2rx - xx)^{3:2}}$

und $z = \frac{(4rr - 2rx)^{3:2}}{r.(2r - x)} = 2 \surd (4rr - 2r)$ = der doppelten Sehne LE.

II. Für $x = 0$ oder bey F iſt $z = 4r$; Aber für $x = 2r$; oder bey A verſchwinden zugleich Zähler und Nenner dieſes Ausdruckes: Alſo nach (374) der Werth von z für dieſes x; — 3. $\surd 4rr - 2rx) = 0$; und die Krümmung bey A unendlich.

558. $\tang Pqm = \frac{Mm}{dPM} = \frac{dx}{dFL + dML}$ Die Tangente des Winkels Ppm den die Radlinie in p mit der Ordinate pm macht, iſt $\frac{dx}{dy} = \frac{\surd (2rx - xx)}{2r - x}$. Für $x = 2r$ giebt dieſes $\frac{0}{0}$; wo auch noch zweifelhaft

ſeyn

ſeyn könnte, ob ſich dieſer Ausdruck für $\frac{dx}{dy}$ da-ſelbſt anbringen lieſſe, weil LM da verſchwindet: Ich betrachte daher die Sache ſo: Es iſt überhaupt $\tan Ppm = \frac{Mm}{Ll + lm - LM}$. Nun ſey $x = 2r - e$ wo e unendlich abnehmen mag. So iſt für jedes e; $LM^2 = 2re - ee$. Wenn nun e unendlich abnimmt, ſo wird $pm = AE$; und $lm = 0$ und PM ſtellt die nächſte Ordinate der Ordinate der Radlinie über AE vor; wie LM die verſchwindende Ordinate des Kreiſes, die zunächſt über dem Puncte E befindlich iſt, wo die Ordinate des Kreiſes $= 0$ iſt; alſo verwandelt ſich Mm in e; und $lm - LM$ in $-LM$ und da überhaupt $Ll^2 = Mm^2 + (lm - LM)^2$ iſt, ſo wird hier $Ll^2 = ee + LM^2 = 2re$ Ferner $LM = \sqrt{2re} - \frac{ee}{2\sqrt{2re}} \ldots$ wo die folgenden Glieder höhere Potenzen von e enthalten; alſo der Nenner der tang Ppm oder $Ll - LM = \frac{ee}{2\sqrt{2re}} \ldots$ und folglich $\tan Ppm = e : \left(\frac{e\sqrt{e}}{2\sqrt{2r}} \ldots\right)$ ſo daß die folgenden Glieder des Diviſors immer höhere Potenzen von e enthalten; alſo $\tan Ppm = 1 :$

($\sqrt{e}$

$\left(\frac{re}{2\sqrt{2r}} \ldots\right)$ das iſt unendlich, wenn e verſchwindet. Alſo macht die Radlinie mit AE einen Winkel, der unendlich wenig von einem rechten unterſchieden iſt. Eben ſolche Winkel machen auch alle Kreiſe, die aus Mittelpuncten in AE durch A beſchrieben werden. Aber jeder von dieſen Kreiſen, ſo nahe man auch ſeinen Mittelpunct bey A nimmt, iſt weniger krumm als die Radlinie. (557) Alſo gehen alle dieſe Kreiſe, ſo klein man auch ihre Halbmeſſer annimmt, zwiſchen ihrer gemeinſchaftlichen Tangente und der Radlinie durch, oder die Radlinie iſt da krümmer als jeder Kreis, und macht mit der daſigen Tangente einen gröſſern Berührungswinkel als irgend ein Kreis mit der ſeinigen machen kann, obgleich auch ihr Berührungswinkel unendlich klein iſt. Man ſ. von dergleichen Berührungswinkeln Newton Method of Flux. Prob. V. art. 39.

Rectification der Radlinie, Gleichung zwiſchen ihrer Abſciſſe und ihrem Bogen; und Quadratur eben dieſer Linie.

559. I. Aus dem Werthe von dy (557) folgt $\sqrt{(dy^2 + dx^2)}$ oder $ds = \sqrt{2r} . x^{-\frac{1}{2}} . dx$; alſo $s = 2\sqrt{2rx}$ oder $ss = 8rx$; Wo s den Bogen FP bedeutet, der für $x = o$ verſchwindet, oder

oder ſich gerade über dem Puncte E der die Grundlinie (Alg. 602.) halbirt, in dem Puncte F anfängt, der um des beſchreibenden Kreiſes (Alg. 602.) Durchmeſſer FE = 2r über der Grundlinie erhoben iſt.

Chriſtoph Wrenn, hat zuerſt die Vergleichung der Bogen der Radlinie mit einer geraden Linie gefunden. Phil. Tranſ. n. 98; Nov. 17; 1763.

Es war die erſte gegebene Linie, die rectificirt ward. Neil (269) ſuchte eine Linie die ſich rectificiren ließ Ph. Tr. a. a. O.

II. Für $x = 2r$ iſt der Bogen der halben Cycloide, $FA = 4r$ = dem vierfachen Halbmeſſer des beſchreibenden Kreiſes.

III. PMmp als das Differential der Fläche iſt $= (FL + LM)\, dx$; Nun iſt FL : Bogen ſin $\frac{LM}{r} = r : 1$ (Trig. 19. S. Anm. u. 1. S.)

alſo $FL = r. \mathfrak{B}\ \text{ſin}\ \frac{\sqrt{(2rx - xx)}}{r}$ welches ich

$= rq$ ſetzen will. So iſt das Element der Fläche $= rq\,dx + LM\,dx$. Das Integral des letzten Theiles oder $\int LMdx$ iſt $FLM = \frac{1}{2} r. FL$ $\frac{(r-x). LM}{2} = \frac{1}{2} r. r. \mathfrak{B}\ \text{ſin}\ (LM : r) - \frac{1}{2}$ $(r - x). LM$ das Integral des erſten Theiles oder $\int rq\,dx$ ſey $= rqx + rt$ ſo iſt, wenn man

auf

auf beyden Seiten differentiirt $dt = - xdq = - \frac{xdx}{\sqrt{(2rx - xx)}}$ (281) $= \frac{(r-x)dx}{\sqrt{(2rx - xx)}} - \frac{rdx}{\sqrt{(2rx - xx)}}$ alſo $t =$ LM — t. B ſin (LM : r); folglich das völlige Integral, ſo genommen, daß es für $x = o$ verſchwindet, oder die Fläche FMP $= \int rqdx + \int LMdx = rq. (x - \frac{1}{2} r) + \frac{1}{2}$ LM. $(r + x) =$ FL. $(x - \frac{1}{2} r) + \frac{1}{2}$. LM. $(r + x)$.

IIII. Dieſes giebt für $x = 2r$; die Fläche FEA = FLE. $\frac{3}{2} r =$ dem Dreyfachen des Halbkreiſes FLE. Die ganze Fläche der Radlinie iſt alſo dreymahl ſo groß als die Fläche des Kreiſes, der ſie beſchreibt.

V. Man ziehe durch F; P; Parallelen mit EA; EF; die einander in G begegnen: ſo iſt FMPG $= xy$ wo y aus 557. bekannt iſt; davon FMP (III) abgezogen läßt den Raum FGP $= \frac{1}{2}$. (r. FL + (r — x) LM) = dem Abſchnitte FLM. Wenn alſo FG verlängert wird, bis ſie einer Parallele durch A mit EF begegnet, ſo ſchlieſſen dieſe beyden Parallelen mit APE einen Raum ein, der der Fläche des Halbkreiſes FLE gleich iſt.

VI. Wenn $x = \frac{1}{2} r$ iſt LM $= \frac{r\sqrt{3}}{2}$ und der Bogen FL = 60 Gr; und der Raum FMP =

$= \frac{rr\sqrt{3}}{8}$. Man ziehe die Sehne FL ſo iſt $\triangle FLM = \frac{rr\sqrt{3}}{8}$ das Dreyeck aber, das ein paar Linien aus des Kreiſes FLE Mittelpuncte, mit der Sehne FL machen; hat zu ſeiner Höhe (die Sehne für die Grundlinie angenommen,) $\frac{r\sqrt{3}}{2}$; und alſo zum Innhalte $\frac{rr\sqrt{3}}{4}$ $= 2\triangle FLM$. Folglich iſt dieſes Dreyeck zwiſchen den beyden Halbmeſſern und der Sehne, ſo groß als der Raum FMP — $\triangle FML$ oder als der Raum zwiſchen der Sehne, der geraden Linie FL, und der krummen FP.

VII. Wenn man von FMP den Abſchnitt FML abzieht, ſo bleibt für den Raum zwiſchen den Bogen FL und FP; und der geraden Linie PL, der Werth, $FL.(x - r) + LM.x$. Dieſer Raum wird alſo $= rr$ für $x = r$.

VIII. Wie alſo die Räume der Cycloide überhaupt betrachtet durch die Quadratur des Kreiſes müſſen gefunden werden, ſo giebt es unter jeden der beyden Arten (IIII; VII) einen, der algebraiſch gegeben iſt.

VIIII. Anm. Von ſolchen krummen Linien, wo die unbeſtimmte Quadratur überhaupt tranſcendentiſch iſt, für eine gewiſſe Stelle aber einen algebraiſchen Raum giebt, handelt umſtändlicher Joh. Bern. Lect. Hoſp. 4; 5; 6; das hier Gelehrte, welches Hugen bey der Cy-

Cycloide bemerkt hat, iſt eben daſelbſt Lect. 25. allgemeiner von krummen Linien, deren die gemeine Cycloide eine einzige Art iſt erwieſen.

X. Anm. Die Geometern heiſſen Monden (lunulas) einen Raum, der zwiſchen zween Bogen krummer Linien enthalten iſt, da eine ihre erhabene Seite der Höhlung der andern zukehrt, wie hier der Raum zwiſchen den Bogen FPA und FLE wäre, den man mit Kraſten Comm. Ac. Petrop. T. VI. p. 156. einen offenen Mond und wenn die krummen Linien einander zweymahl über einer gemeinſchaftlichen Sehne ſchnitten, einen geſchloſſenen nennen könnte. Hippocrates hat einen ſolchen Mond zwiſchen Kreisbogen quadrirt, es hilft aber dieſe Erfindung nichts zur beſtimmten oder unbeſtimmten Quadratur des Kreiſes. Krumme Linien zu finden, deren Monden ſich quadriren laſſen, hat Kraſt a. a. O. allgemein gelehrt.

Wie die Veränderung der Krümmung gemeſſen wird.

560. Wenn man die Differentiale zweener Halbmeſſer der Krümmung an zwo von einander entfernten Stellen der krummen Linie mit einander vergleicht, ſo ſieht man, wievielmahl ſchneller ſich die Krümmung an einer Stelle als an der andern ändere. Es wird aber jeder Halbmeſſer von dem ihm nächſten, mehr oder weniger unterſchieden ſeyn, nachdem die Puncte der krummen Linie, zu denen dieſe beyde nächſten Halbmeſſer gehören, weiter von einander oder näher beyſammen ſind; und alſo beſtimmt die Entfernung dieſer Puncte, d. i. ds oder dx oder dy, das Differen-

tial des Halbmeſſers von jeder Stelle. Um alſo die Vergleichung gehörig anzuſtellen, ſo könnte man ds oder dx oder dy veränderlich ſetzen. Man kann aber die Vergleichung ſo anſtellen, daß man den Quotienten $\frac{dz}{ds}$ für zwo Stellen der krummen Linie ſucht. Dieſer zeigt an, wie ſich die Veränderung des Halbmeſſers der Krümmung an jeder Stelle, zu der Veränderung des Bogens der krummen Linie verhält, und dient alſo die Verhältniſſe der Veränderrung der Krümmung zur Veränderung des Bogens an zwo Stellen mit einander zu vergleichen, und zu ſehen, ob ſie ſich gleichförmig oder ungleichförmig, ſchnell oder langſam ändert. Newton Meth. of flux. Prob. VI. nennt dieſes die Beſchaffenheit der Krümmung (qualitatem curuaturae.)

Exempel.

561. Bey der Parabel iſt aus 547;

$$dz = 3 \sqrt{\frac{4x+b}{b}} \cdot dx;\ ds = \tfrac{1}{2} \sqrt{\frac{4x+b}{x}}$$

folglich $\frac{dz}{ds} = 6 \sqrt{\frac{x}{b}}$. Die beyden Werthe dieſes Quotienten für Abſciſſen die ſich wie ½ und 2; verhalten, verhalten ſich wie die Wurzeln aus ½ und 2 das iſt, wie 1 : 2 alſo verändert ſich die

Krüm-

Krümmung bey der erſten Abſciſſe halb ſo ſchnell als bey der zweyten, die viermahl ſo groß iſt.

562. Bey der logarithmiſchen Spirale (556) kömmt $\frac{dz}{ds} = 1$ alſo verändert ſich ihre Krümmung überall gleichviel, oder wie Newton ſagt, ihre Krümmung iſt gleichförmig ungleichförmig (aequabiliter inaequabilis); eben wie die Bewegung fallender Körper gleichförmig ungleichförmig iſt.

Von der Evolution.

563. Erkl. Ein vollkommener biegſamer Faden, ſey um die erhabene Seite der krummen Linie ACQ 30 F. gewunden, wobey ich annehme, daß dieſer Bogen der krummen Linie beſtändig nach einer Seite zu hohl, nach der andern erhaben iſt, und keinen Wendungs- oder Rückkehrpunct hat; Nun winde man den Faden dergeſtalt ab, daß das Theil von ihm, das nicht mehr um die krumme Linie liegt, wie CE; in eine gerade Linie ausgeſpannt iſt. So beſchreibt der Endpunct des Fadens eine krumme Linie AEM; welche man aus der Abwinkelung der Linie ACQ erzeugt (ex euolutione genitam) wie ACQ die abgewickelte oder Evolute (euolutam) nennt.

564. Zuſ. Der Faden berührt in jeder Lage CE die Evolute ACQ; und die gerade Linie CE iſt dem Bogen AC der Evolute gleich.

565. Lehrſ. Der Linie AEM Tangente an E, ſteht auf CE (564) ſenkrecht.

Bew. E; M; ſollen zwo Stellen der Linie AEM ſeyn, welchen die Lagen des Fadens CE; QM zugehören, die einander in N ſchneiden. Weil der Faden in beyden Lagen die Evolute berührt, (564) und die Evolute beſtändig nach einer Seite hohl iſt, (563) ſo iſt der Bogen CQ gegen die geraden Linien CN; QN; erhoben, und fällt zwiſchen ſie und ſeine Sehne (70). Man ziehe des Bogens EM Sehne, und ſuche den Winkel NEM; dieſer Winkel, für den Fall, da ſich E und M, folglich auch C und Q einander unendlich nähern, iſt der Winkel der Tangente bey E; mit CE; (68).

Alſo ſey der Bogen AC oder die gerade Linie EC = u; der Bogen AQ oder die gerade Linie QM = u + e; Ferner CN = f; QN = g; und die Sehne EM = k; ſo iſt EN = u + f; MN = u + e — g; und (Trig. 20. S.) Coſ

$$\text{NEM} = \frac{(u + f)^2 + kk - (u + e - g)^2}{2\,(u + f).\,k}.$$

Der Zähler hievon wird 2u. (f + g — e) — (e — g)² + ff + kk. Wenn ſich nun Q und C einander unendlich nähern, ſo nähert ſich die Summe f + g unendlich der Sehne CQ (532) das iſt, dem Bogen CQ oder e; alſo f unendlich dem Werthe e — g; und der Zähler unendlich dem Werthe kk und 2 (u + f). k unendlich dem

Wer-

Werthe 2uk und der Coſinus unendlich dem Werthe $\frac{k}{2u}$, das iſt, einem verſchwindenden Werthe, alſo CEM einem rechten Winkel.

566. Zuſ. Wenn man aus jedem gegebenen Puncte E; der Linie AEM eine Tangente ihrer Evolute, EC; ziehen kann, ſo darf man nur auf CE in E ein Perpendikel ſetzen, um die Tangente der Linie AEM in E zu haben.

567. Zuſ. Wenn E und M ſich einander unendlich nähern, ſo wird N der Mittelpunct der Krümmung für EM; (546) aber N fällt in den Bogen CQ (565) alſo iſt die Evolute der geometriſche Ort (Alg. 697) aller Mittelpuncte der Krümmung für AEM.

568. Zuſ. Wenn ME; CQ; auch endliche Bogen und CK; QK; Perpendikel auf die Lagen des Fadens ſind, ſo iſt K = 2R − CNQ (G. 13. S. 6. Z.) = ENM; oder zwo Normallinien, an zwo willkührlichen Stellen E; M; der Linie AEM; machen eben den Winkel, den zwo Normallinien an den beyden jenen zugehörigen Stellen C; Q; der Evolute ACQ machen. Das heißt, die zuſammengehörigen Bogen der Evolute und der Linie AEM; haben einerley Weite (amplitudinem).

569. Zuſ. Wenn die Puncte M; E; und folglich auch Q; E; unendlich nahe zuſammen rü-

cken, ſo verwandeln ſich, EM in ds; EN oder EC in den Halbmeſſer der Krümmung für E (546) den ich wie (543) z nenne; CQ oder MQ − EC in dz; (567) CK in den Halbmeſſer der Krümmung der Evolute bey C der w heiſſen mag. Alſo iſt $\frac{ds}{z} = \frac{dz}{w}$ (568) oder $\frac{w}{z} = \frac{dz}{ds}$ = dem Maaſſe der Veränderung der Krümmung (560) die Veränderung der Krümmung jeder Linie AME, bey E; verhält ſich alſo wie die Tangente des Winkels CEK wenn C der zu E gehörige Punct ihrer Evolute, und K der Mittelpunct der Krümmung der Evolute bey C iſt.

569. Zuſ. Der Faden kann beym Anfange der Abwickelung, in A, ſchon eine beſtimmte Länge haben, wie AF 31 F. wo er doch AC berühren muß; Alsdenn iſt CE = dem Bogen AC + AF. In der 30 F. iſt AF = o.

570. Aufg. Aus der Gleichung für die Linie FE 31 F. die für ihre Evolute zu finden.

Aufl. Man ziehe beyder gemeinſchaftliche Abſciſſenlinie DL und nehme rechtwinklichte Coordinaten der Linie FE; DB = x; BE = y; zwiſchen denen die Gleichung gegeben iſt: der Evolute AC; DL = v; LC = t; zwiſchen denen die Gleichung geſucht wird. Ferner ſey EC = z; EO = w. Nun iſt EO: EB = EC; EB + LC

alſo

alſo $y + t = \frac{zy}{w}$ und $t = \frac{z - w}{w} \cdot y$ (A) Ferner $EO : OB = EC : BL$ oder $v - x = \frac{z.\,py}{w}$ (B) Aus der Gleichung für αE nun, ſind w; p; z; durch x und y gegeben; alſo läßt ſich (B) auf eine Geſtalt (C) bringen, wo ſie nichts veränderliches als x; y; v; t; enthält. Aus (C) mit der Gleichung für αE verglichen, läßt ſich y wegſchaffen, und eine Gleichung (D) machen, die nichts veränderliches als x; v; t; enthält. Eben ſo läßt ſich aus (A) mit der Gleichung für αE verglichen, y wegſchaffen, und eine Gleichung (E) finden, die nur v; t; x; enthält, aus E mit D verglichen läßt ſich endlich x wegſchaffen, und eine Gleichung F zwiſchen v und t finden.

570. Zuſ. Jeder algebraiſchen Linie Evolute iſt algebraiſch.

571. Zuſ. Weil die Länge des Bogens der Evolute $AC = z + c$ iſt, und z ſich bey jeder algebraiſchen Linie algebraiſch finden läßt, (543) ſo läßt ſich die Evolute jeder algebraiſchen Linie, unbeſtimmt rectificiren; und man kann alſo unzählich viel algebraiſche Linien finden, die ſich rectificiren laſſen.

572. Zuſ. Aber umgekehrt wird FE nicht algebraiſch ſeyn, wenn ſich die Evolute nicht algebraiſch rectificiren läßt, ob ſie gleich algebraiſch

iſt. Denn jeder algebraiſchen Linie Tangente iſt der Lage nach algebraiſch gegeben. Iſt alſo CE eine ſolche Tangente, und gäbe es eine algebraiſche Gleichung zwiſchen DB und BE ſo iſt der Punct E, folglich die Länge CE; folglich der ihr gleiche Bogen AC; algebraiſch gegeben.

Exempel zu 570; 571;

573. Die Evolute der Parabel zu finden, D ſey der Scheitel der Parabel, oder F 31 F. ſo iſt nach 547; $z = \frac{(4x + b)^{3:2}}{2\sqrt{b}}$; $py = \frac{1}{2} b$; $w = \frac{1}{2}\sqrt{b} . \sqrt{(b + 4x)}$ alſo (D) $v - x = \frac{4x + b}{2}$ oder $v - \frac{1}{2} b = 3x$; (E) $t = \frac{4x\sqrt{x}}{\sqrt{b}}$ alſo $16x^3$ oder $btt = \frac{16.(v - \frac{1}{2} b)^3}{27}$ und für $FA = \frac{1}{2} b$ iſt $t = 0$; Nennt man alſo die Abſciſſen $AL = r$ ſo iſt $r = v - \frac{1}{2} b$ und $\frac{27}{16} btt = r^3$ oder die Evolute der appolloniſchen Parabel, iſt eine neiliſche (268) rectificirte, deren Parameter $\frac{27}{16}$ des Parameters der apolloniſchen iſt. Wegen $t = \pm \frac{2}{3} r \sqrt{(r : 3b)}$ hat ſie ähnliche Hälften eine unter die andere über der Axe AL; deren jede abgewickelt eine Hälfte der Parabel über und unter der Axe giebt. Daß $FA = \frac{1}{2} b$ rührt daher, weil der apolloniſchen Parabel Krümmungshalbmeſſer am Scheitel ſo groß iſt (547)

574.

574. Suchte man die Evolute eines Kreiſes vom Halbmeſſer r, ſo wäre $z = r = w$; alſo (570) $t = o$; und $py = r - x$; alſo $v - x = r - x$ oder $v = r$; die Evolute verwandelt ſich nähmlich hier in des Kreiſes Mittelpunct.

575. Aufg. Wenn die Evolute AC 31 F. gegeben wird und die Länge des Fadens CE allemahl $CA + AF$ (569) iſt, die krumme Linie FE zu finden.

Aufl. Es ſey $AF = c$; $AL = r$; $LC = t$; $FB = x$; $BE = y$; $CE = s + c$; So iſt $OL = \frac{t\,dr}{dt}$ (564; 77) und $OC = \sqrt{(OL^2 + OC^2)} = \frac{t\,ds}{dt}$; und $\frac{CE.\,LC}{OC}$ oder $EH = \frac{(s+c)\,dt}{ds}$

Folglich EB oder (M) $y = \frac{(s+c)\,dt}{ds} - t$ und

BL oder $CH = \frac{EC.\,OL}{OC} = \frac{(s+c).\,dr}{ds}$ folglich $FA + AL - BL$ oder $FL - BL$ oder (N) $x = c + r - \frac{(s+c)\,dr}{ds}$. Iſt nun die Gleichung für die Evolute gegeben, ſo iſt $\frac{dr}{ds}$ durch r und t; gegeben; und läßt ſich die Evolute rectificiren, ſo iſt s auch durch r und t gegeben: In jeder der beyden Gleichungen (M); (N) bleiben

alſo vier veränderliche endliche Gröſſen x; y; r; t; aus (M) mit der Gleichung für die Evolute verbunden läßt ſich t wegſchaffen und eine Gleichung (O) machen, die nur y: x; r; enthält: Eben eine ſolche Gleichung (P) läßt ſich aus (N) mit der Gleichung für die Evolute verbunden machen; und aus (O) und (P) verbunden, läßt ſich r wegſchaffen, und eine Gleichung zwiſchen x und y finden. Dieſes aber geht nicht an, wenn nicht s ſich durch r; t; ausdrücken läßt. (572)

576. Ex. Die Linie FE zu finden, die aus Abwickelung der neiliſchen Parabel entſteht, wo $ftt = r^3$;

Hier iſt $t = \frac{r^{3:2}}{f^{1:2}}$ alſo $\frac{dt}{dr} = \frac{3r^{1:2}}{2f^{1:2}}$

und $ds = dr. \sqrt{\left(1 + \frac{9r}{4f}\right)}$ alſo wie in 268;

$s = \frac{1}{27}. (4f + 9r). \sqrt{\left(4 + \frac{9r}{f}\right)} - \frac{8}{27} f$ und

(M) $y = (s + c). 3 \sqrt{\frac{r}{4f + 9r}} - t$; (N);

$x = c + r \frac{-(s + c). 2 \sqrt{f}}{\sqrt{(4f + 9r)}}$, wo man noch den Werth von s an ſeine Stelle ſetzen muß. Es erhellet alſo, daß verſchiedene krumme Linien herauskommen, nachdem c von anderer und anderer Gröſſe angenommen wird. Iſt $c = \frac{8}{27} f$ ſo

ſo kömmt $y = \frac{2}{27} \cdot \frac{(4f + 9r)^{3:2}}{\surd f}$.

$\frac{3 \surd r}{\surd(4f + 9r)} - t = \frac{1}{9} . (4f + 9r) . \surd \frac{r}{f} - t$
$= \frac{4}{9} \surd fr$; und $x = \frac{1}{3} r$ woraus man die Gleichung für die apolloniſche Parabel (573) erhält, daß $b = \frac{16}{27} f$. In andern Fällen kommen mehr zuſammengeſetzte Linien heraus.

577. I. AC ſey ein Kreis, deſſen Halbmeſſer $= e$; und $2er - rr = tt$. Die Linie, welche durch Abwickelung des Kreiſes entſtehet, läßt ſich folgendergeſtalt leicht verzeichnen: An den Punct C des Kreiſes, deſſen Bogen AC iſt, ziehe man eine Tangente CE; und nehme CE $= c +$ dem Bogen AC; ſo iſt E in dieſer Linie. Weil nun
$\frac{e - r}{t} dr = dt$; und $\frac{edr}{t} = ds$ ſo iſt (M)

$$y = \frac{(s + c) . (e - r)}{e} - \surd (2er - rr);$$

$$(N)\ x = c + r - (s + c) . \frac{\surd (2er - rr)}{e}$$

Gäbe es nun eine algebraiſche Gleichung zwiſchen x und y; ſo lieſſe ſich aus derſelben mit (M) vereinigt eine zwiſchen x; s; r; und aus dieſer leztern mit (N) vereinigt eine zwiſchen s und r machen, wieder (Alg. 616.)

II.

II. ACQ 30 F. ſey ein Kreisbogen um den Mittelpunct K; aus deſſen Abwickelung AEM entſtehe, wo $c = o$; der Bogen AC ſey $= w$; und $CQ = dw$; ſo kann man nach (567) EM als einen Kreisbogen anſehen, der C zum Mittelpuncte hätte, und das Maas des Winkels $N =$ CKQ (568) wäre. Alſo iſt $\frac{EM}{w} = \frac{dw}{e}$. Daraus folgt $AM = \frac{ww}{2e}$; auch iſt das unendlich kleine Dreyeck $MNE = \frac{1}{2} w. \frac{wdw}{e}$ folglich die Fläche zwiſchen der geraden Linie QM, und den Bogen, AM der abgewickelten Linie, und AQ des Kreiſes, $= \frac{w^3}{6e}$

Für $w = 2e\pi$ wo $1 : \pi$ die Verhältniß des Durchmeſſers zum Umfange iſt; giebt ſich die Länge der durch die Abwickelung des ganzen Kreiſes entſtandenen krummen Linie $= \frac{4ee\pi\pi}{2e}$ $= 2e\pi\pi$ oder ſie iſt die dritte Proportionallinie zum Durchmeſſer und zum Umfange des Kreiſes, von dem ſie entſteht, oder auch, ſie iſt $2e\pi.\pi$, dem halben Umfange eines Kreiſes gleich, deſſen Halbmeſſer $2e\pi$, der Umfang des vorigen Kreiſes, als der letzte Krümmungshalbmeſſer der Linie AEM wäre. Dieſes neuen Kreiſes Fläche

wäre $2e\pi \cdot 2e\pi\pi = 4ee\pi^3$, dreymahl ſo groß als $\frac{8e^3\pi^3}{6e}$ die Fläche zwiſchen der ganzen aus der Abwickelung entſtandenen Linie, ihren letzten Krümmungshalbmeſſer, und dem abgewickelten Kreiſe.

III. Weil ein unendlicher Faden unzählich vielmahl um den Kreis könnte ſeyn gewickelt geweſen, ſo läßt ſich dieſe Abwickelung unzählich vielmahl wiederhohlen, daß jedesmahl ein neues Stück der abgewickelten Linie herauskömmt. Sie windet ſich alſo nach Art einer Spirallinie unzählich vielmahl um den Kreis herum, woraus ebenfalls erhellt, daß ſie tranſcendentiſch iſt. (Alg. 577.)

IIII. Ich habe dieſes Exempel angeführt zu zeigen, wie leicht ſich oftmals Quadraturen und Rectificationen durch die Abwickelung finden laſſen, die ſonſt viel ſchwerer zu entdecken wären. Ein anderes hieher gehöriges Exempel nächſt dieſem giebt Joh. Bernoulli Lect. Hoſp. 20.

Methode die krummen Linien zu finden, die ihren Evoluten ähnlich ſind.

578. Erkl. Wenn F; A; und E; C; 31 F. zwey Paare zuſammengehöriger Puncte ſind, daß nähmlich F; E; die Endpuncte der Tangenten

ten AF; und CE = FA + AC ſind; und wenn ſich alsdenn die Halbmeſſer der Krümmung bey F; A; beſtändig wie die bey E; C; oder allemahl wie 1 : n verhalten, ſo heißt die krumme Linie FE; ihrer Evolute AC; ordentlich ähnlich. (directe ſimilis) und 1 : n die Verhältniß der Aehnlichkeit.

579. Zuſ. Der Halbmeſſer der Krümmung bey E ſey = r; ſo iſt der bey C = n r; des Bogens FE Element ſey = ds; alſo der Winkel am Mittelpuncte des Krümmungskreiſes $= \frac{ds}{r} =$ dem Winkel am Mittelpuncte des Krümmungskreiſes bey C (568) alſo iſt der Kreisbogen, welcher dieſen letzten Winkel mißt, oder des Bogens AC Element $= \frac{ds}{r} . nr = nds$ und der Bogen AC = ns + Conſt.

580. Lehnſatz. Alle ähnliche krumme Linien laſſen ſich als ähnliche Vielecke von unzählich viel Seiten anſehen, weil ſich ihre Bogen Elementen, die proportionirt ſeyn und gleiche Winkel machen müſſen, unendlich nähern. (68) Alſo ſind bey allen ähnlichen krummen Linien, gerade Linien proportionirt, die auf ähnliche Art wie Alg. 387. beſtimmt, oder nach ähnlich liegenden Puncten (G. 39. S.) gezogen werden; und

ähn=

ähnlich beſtimmte Paare von Linien, machen gleiche Winkel.

581. Erkl. Der Linie AMB 32 F. Evolute ſey bma; ſo daß A; M; B; und b; m; a; zuſammengehörige Puncte ſind. Verhalten ſich nun die Halbmeſſer der Krümmung bey A und B; wie die bey a und b; das iſt, verkehrt wie die Halbmeſſer der Krümmung an den zugehörigen Puncten der Evolute, ſo heißt AB ihrer Evolute verkehrt ähnlich. Die Theile nähmlich, die einander ähnlich ſind, liegen in der Linie, die aus der Abwickelung entſtanden iſt, von A nach B; und in der Evolute von a nach b; das iſt, von dem Puncte, der A zugehört, nach demjenigen welcher B zugehöret.

582. Zuſ. Wenn AC; BC; bc; ac; die Normallinien an den zuſammengehörigen Puncten ſind, ſo iſt ACB = bca (568) und AC; BC = ac: bc (580).

584. Zuſ. Wenn M; m; ein paar andere zuſammengehörige Puncte ſind, und die Normallinie bey m; ac in n ſchneidet, ſo wird ſie verlängert, bc unter einem Winkel = ANM ſchneiden (568). Aber an dem Dreyecke das ſie ſolchergeſtalt mit nc und der Verlängerung von bc macht, iſt bcn ein äuſerer Winkel, und der Winkel dieſes Dreyecks bey n iſt ſeinem Scheitelwinkel, anm gleich: Folglich iſt der Winkel unter dem ſie bc ſchneidet = bca − anm welches alſo =

ANM

ANM ſeyn muß; Da nun bca = BCA (582) ſo iſt ANM + anm = BCA.

584. Zuſ. Mit dem Puncte M in AMB, habe μ in aμb eine ähnliche Lage, oder es verhalten ſich die Bogen AM: AB = aμ: ab: $\mu\nu$ ſey die Normallinie bey μ; ſo iſt, weil die beyden Normallinien $\mu\nu$; aν; auf ähnliche Art mit den beyden MN; AN; beſtimmt werden, wegen der Aehnlichkeit der Bogen aμ; AM; a$\nu\mu$ = ANM (580) alſo a$\nu\mu$ + anm = ACB (582).

585. Zuſ. Weil ab beſtändig nach einer Seite hohl iſt; (563) ſo machen die Normallinien anfangs nahe bey a ganz kleine Winkel mit ac; die nachgehends bis an die Gröſſe acb wachſen: da ſich nun dieſe Winkel wie alles übrige nach dem Geſetze der Stetigkeit ändern, ſo giebt es einen efa = $\frac{1}{2}$ acb wo E; e; zuſammengehörige Puncte ſind. Wenn man ſich alſo vorſtellt, daß die Normallinie mn in dieſe Lage ef komme, ſo wird mna = $\frac{1}{2}$ acb = $\mu\nu$a (584) alſo muß $\mu\nu$ entweder ihr parallel, oder mit ihr einerley ſeyn: das erſte findet nicht ſtatt; denn weil die Normallinien bey a und b in c zuſammenſtoſſen, ſo ſind die Tangenten bey a und b nicht parallel, und weil der Bogen ab ſtets nach einer Seite hohl iſt, ſo können zwiſchen a und b keine parallelen Tangenten, alſo auch keine parallelen Normallinien vorkommen; Alſo fallen μ und m zuſammen; oder die Puncte E; e welcher bey der

Abwickelung zuſammengehören, haben in ihren Bogen auch ähnliche Lagen, und es iſt AE : AB = ae : ab. Alle andere Puncte aber als die beyden E; e; werden ſo beſchaffen ſeyn, daß ſie nicht zugleich zuſammengehörig und ähnlich liegend ſind. So ſind M und m zuſammengehörig, aber M und μ ähnlich liegend.

586. Zuſ. Wenn ef von den Normallinien an m und μ, in r und ϱ geſchnitten wird, ſo iſt frn = efa − mna = $\frac{1}{2}$ acb − mna $\nu\varrho f = \mu\nu a$ − efa = $\mu\nu a - \frac{1}{2}$ acb alſo frn − $\nu\varrho f$ = acb − ($\mu\nu a$ − mna) = o oder erm = $e\varrho\mu$; oder die Bogen $e\mu$; em haben gleiche Weite.

587. Zuſ. AFE + afe = ACB (583) afe = $\frac{1}{2}$ acb (585) = $\frac{1}{2}$ ACB (582) alſo AFE = $\frac{1}{2}$ ACB = afe.

588. Lehnſatz. Aufg. Wenn ein Bogen, deſſen Halbmeſſer = 1; die Länge

$\int \frac{ds}{\surd(\alpha + \beta ss)}$ iſt; zum Sinus z; zum Coſinus ζ hat, die Integrale von zds und ζds zu finden.

Aufl. I. Weil $\frac{dz}{\surd(1 - zz)} = \frac{ds}{\surd(\alpha + \beta ss)}$ (281) ſo iſt zds = $-\surd(\alpha + \beta s^2) . d\surd(1 - zz)$ Man ſetze $\int$zds = $-\surd(\alpha + \beta s^2) . \surd(1 - zz) + q$; ſo kömmt, wenn man auf beyden Seiten differentiirt, und was ſich aufhebet wegläßt;

$$dq = \frac{\beta s ds . \surd (1 - zz)}{\surd (\alpha + \beta s^2)} = \beta s dz \text{ folglich}$$

$q = \beta s z + r$ wo nach einem ähnlichen Verfahren, $dr = - \beta z ds$ herauskömmt. Alſo iſt $\int z ds = - \zeta . \surd (\alpha + \beta s^2) + \beta sz - \int \beta z ds$

oder $\int z ds = \dfrac{\beta s z - \zeta \surd (\alpha + \beta s^2)}{1 + \beta}$

II. $\zeta ds = dz \surd (\alpha + \beta s^2)$ alſo $\int \zeta ds =$

$z \surd (\alpha + \beta s^2) + q$ und $dq = - \dfrac{\beta s ds . z}{\surd (\alpha + \beta ss)}$

$\dfrac{- \beta z s dz}{\zeta} = + \beta s d\zeta$ alſo $q = \beta s \zeta + r$

und $dr = - \beta \zeta ds$ alſo

$$\int \zeta ds = \frac{z \surd (\alpha + \beta s^2) + \beta s \zeta}{1 + \beta}$$

III. Dieſe Formeln ſind in dem einzigen Falle nicht brauchbar, wenn $\beta = - 1$; Alsdenn aber iſt $\dfrac{ds : \surd \alpha}{\surd (1 - ss : \alpha)}$ das Element eines Kreisbogens, deſſen Sinus $z = s : \surd \alpha$ (281); alſo $\zeta = \surd (1 - ss : \alpha)$ und $z ds = \dfrac{s ds}{\surd \alpha}$ davon das Integral $= \dfrac{ss}{2 \surd \alpha}$;

Ferner ſey Cp 17 F. $= s : \surd \alpha$ für $CD = 1$; ſo iſt $pP = ds : \surd \alpha$; $pn = \zeta$ und des Kreisſtückes

ſtückes CDMP Differential $= \frac{\zeta ds}{\sqrt{\alpha}}$ alſo

$\int \zeta ds = \sqrt{\alpha}$. CDMP $= \sqrt{\alpha}$. ($\frac{1}{2}$ Bog. coſ PM + $\frac{1}{2}$ CP. PM) $= \frac{\sqrt{\alpha}}{2}$.

$$\text{B cos}\ \frac{s}{\sqrt{\alpha}} + \frac{s\sqrt{(1 - ss : \alpha)}}{2}$$

589. Aufg. Die krumme Linie FE zu finden, die ihrer Evolute AC ordentlich ähnlich iſt.

Aufl. I. Der Bogen FE 31 F. heiſſe σ und ſein Krümmungshalbmeſſer bey E ſey $= r$; welcher von F nach E wachſe; dieſes ſchränkt die Aufgabe nicht ein, weil man den Bogen σ von jedem willkührlich angenommenen Puncte nach der Seite nehmen kann, nach welcher der Krümmungshalbmeſſer wächſt. Der Krümmungshalbmeſſer in F; oder FA ſey $= a$; ſo iſt der Bogen AC $= n.\sigma$ und $a + n\sigma = r$ oder $nr = \frac{rdr}{d\sigma}$; weil $\sigma = \frac{r - a}{n}$. Man ſetze

$\sigma + \frac{a}{n} = s$; ſo iſt $s = \frac{r}{n} =$ GE 32 F. Wenn

FG $= \frac{a}{n}$. So iſt FE ihrer Evolute dergeſtalt ähnlich, daß ſich ähnlich beſtimmte Linien in beyden wie 1 : n verhalten.

II. Man ſuche hieraus für FE eine Gleichung zwiſchen rechtwinklichten Coordinaten. Wenn $dx = q ds$ alſo $dy = ds. \sqrt{(1 - qq)}$. So iſt

(543) $\sqrt{(1 + pp)} = \frac{1}{q}$ und

$p = \frac{\sqrt{(1 - qq)}}{q}$ und $dp = - \frac{dq}{qq \sqrt{(1 - qq)}}$

alſo aus 543; III; $r = \frac{ds. \sqrt{(1 - qq)}}{dq} = n.s$ (I)

oder $\frac{ds}{s} = \frac{n dq}{\sqrt{(1 - qq)}}$ alſo n. Bog ſin $q =$

$l \frac{s}{a}$ oder q iſt der Sinus eines Bogens, deſſen

Länge $\frac{1}{n} l \frac{s}{a}$ iſt; alſo $\sqrt{(1 - qq)} =$

coſ Bog $\frac{1}{n} l \frac{s}{a}$; alſo $dx =$ ds. ſin B

$\frac{1}{n} l \frac{s}{a}$; $dy =$ ds. coſ Bog $\frac{1}{n} l \frac{s}{a}$

III. Weil $\frac{1}{n} l \frac{s}{a} = \int \frac{ds}{ns}$ ſo iſt in (588)

$x = \int z ds$: $y = \int \zeta ds$; $\alpha = 0$;

$\beta = nn$; $z =$ ſin B $\frac{1}{n} l (s : a)$;

$\zeta =$

$\zeta = \cos \mathfrak{B} \frac{1}{n} l(s:a)$ alſo

$$x = \frac{nn.s.z - n.s.\zeta}{1 + nn}$$

$$y = \frac{n.s.z + nn.s.\zeta}{1 + nn}$$

wo x und y für $s = 0$ verſchwinden. Alſo in 31 F. $GM = x$; $ME = y$ (I).

IIII. Daraus wird $\frac{(1 + nn).x}{ns} = nz - \zeta$ und

$\frac{(1 + nn)y}{ns} = z - n\zeta$ folglich

$$\frac{(1 + nn)^2 xx}{nnss} = nnzz - 2nz\zeta + 1 - z^2$$

$$\frac{(1 + nn)^2 yy}{nnss} = z - 2nz\zeta + nn - nnzz$$

alſo $\frac{(1 + nn)^2.(xx + yy)}{nnss} = 1 + nn$ oder

$$xx + yy = \frac{nn}{1 + nn}.ss.$$

V. Eine Gleichung zwiſchen den Coordinaten allein erhält man ſo: $z = \frac{dx}{ds}$ und $\zeta = \frac{dy}{ds}$ (II) alſo kömmt in (III);

$$\frac{(1+nn).x}{ns} = ndx - dy$$

$$\frac{(1+nn).y}{ns} = ndy + dx$$

Das obere mit dem unteren dividirt, giebt

$\frac{x}{y} = \frac{ndx - dy}{ndy + dx}$; daraus findet man

$n.(ydx - xdy) = ydy + xdx$; Weil was rechter Hand ſteht, das halbe Differential von $xx + yy$ iſt, ſo dividire man damit auf beyden Seiten. Dieſes giebt

$$\frac{n.(ydx - xdy)}{xx+yy} = \frac{ydy + xdx}{xx+yy}$$

Nun iſt $ydx - xdy = yy.\, d(x:y)$ alſo was linker Hand ſteht $= \frac{n.\, d(x:y)}{\frac{xx}{yy}+1}$

$= nd$ Bog tang $\frac{x}{y}$ (299) folglich n. Bog. tang $(x:y) = l(\sqrt{(xx+yy)}:a)$

VII. Es ſey $\sqrt{(1+nn)} = m$; die Sehne GE 31 F. $= u$; ſo iſt (IIII) $u = \frac{n}{m}\ s$ folglich

$\frac{n}{m} = \frac{du}{ds} = \frac{EI}{Ee}$ 31 F. wenn e dem Puncte E unendlich nahe iſt; $=$ ſin EeI; alſo iſt coſ EeI oder

oder ſin eEI $= \frac{1}{m}$ und tang eEI $= \frac{1}{n}$; das Element, oder die Tangente der krummen Linie GE, macht alſo mit der geraden Linie GE einen unveränderlichen Winkel, deſſen Tangente $\frac{1}{n}$ iſt. Folglich iſt GE eine logarithmiſche Spirallinie (510)

VIII. Der Bogen der Evolute AC von A rechter Hand, in 31 F. gerechnet iſt $= r - a$ (I) folglich $= - a$ für $r = o$; d. i. für den Punct G der Linie GE wo $s = o$; (I) und die Evolute geht auch durch G; weil ſich EC oder r; für den Punct G der krummen Linie GE in o verwandelt. Alſo iſt der Bogen AG der Evolute $= a =$ AF; daß ſein Werth verneint wird, zeigt nur an, er werde von A linker Hand genommen. Und ſo iſt der Bogen GAC der Evolute $= a + n. \sigma = ns$ (I). Folglich verhalten ſich die veränderlichen Bogen GE; GC; von einem Puncte G an gerechnet, beſtändig wie 1 : n; daher denn auch die Sehnen GE; GC; als ähnlich beſtimmte Linien in dieſer Verhältniß ſtehen werden. (I) Alſo iſt die Sehne GC $= nu = \frac{n}{m}. ns = \frac{nw}{m}$ wenn der Bogen GC der Evolute, w heißt; der Winkel alſo, welchen die Evolute bey C mit GC macht,

hat zur Tangente $\sqrt{\left(dw^2 - \frac{nndw^2}{mm}\right)}$: $\frac{n}{m}dw$ oder $\frac{1}{n}$ wie der Winkel GEe (VII).

VIIII. Wenn n = 1 oder wenn die Winkel (VIII; VII) 45 Grad ſind, ſo verwandelt ſich die Aehnlichkeit (I) in die völlige Gleichheit, oder aus Abwickelung einer ſolchen logarithmiſchen Spirale GAC welche mit GC allemahl einen Winkel von 45 Gr. macht, entſteht völlig eben dieſe Spirale GFE.

590. Aufg. Die krumme Linie AMB zu finden, die ihrer Evolute amb verkehrt ähnlich iſt 32 F.

Aufl. I. Von dem Puncte E (585) wo der Halbmeſſer der Krümmung Ee = a; iſt, rechne man den Bogen EM = σ; der Halbmeſſer der Krümmung bey M ſey Mm = r; ſo iſt der Bogen em = r — a Nun nehme man μ (584) und die Verhältniß der Aehnlichkeit (578) ſey = 1: n; ſo iſt der Bogen eμ = n. σ und bey μ der Halbmeſſer der Krümmung = n. r. Die Tangente an μ begegne der krummen Linie AMB in R, daß μ; R; zuſammengehörige Puncte ſind; der Bogen ER heiſſe S; und R ſey = Rμ; ſo iſt eμ = a — R;

II. Der ſpitzige Winkel unter dem Rμ und Ee einander ſchneiden, iſt = ρ (568) = erm (596).

Der

Der ſpitzige Winkel unter dem $R\mu$ und AC einander ſchneiden, ſey ϕ; ſo iſt, wegen des Dreyecks, das die Verlängerungen von $R\phi$; EF; unter AC; mit ϕF machen, 180 Gr. — $\phi = 180 - EFA + erm$ oder $\phi = EFA - erm = efa - erm$ (587) $= fnr = mna$;

III. An dem Puncte in ab, der mit R eine ähnliche Lage hat, muß die Normallinie mit ac einen Winkel $= \phi$ machen; weil nähmlich die beyden Normallinien, die an dieſem Puncte, und die bey R; imgleichen die beyden andern, die bey a, und die bey A; auf ähnliche Art beſtimmt werden, und alſo gleiche Winkel machen müſſen (580); alſo muß dieſe Normallinie mit mn (II) parallel oder einerley ſeyn; und nur das letzte findet ſtatt (585) alſo iſt m der mit R ähnlichliegende Punct.

IIII. Folglich $em = n.\ S$ und der Krümmungshalbmeſſer bey m; $= n.\ R$ (I)

V. Alſo $r - a = em$ (I) $= n.\ S.$ (IIII) oder $S = \frac{r - a}{n}$ und auch aus (I) $a - e\mu$ oder $R = a - n.\ \sigma$. Die Weite des Bogens EM iſt = erm (568) $= \varrho$ (II) = der Weite des Bogen ER (568). Soll dieſes in allen Puncten beyder Bogen ſtatt finden, ſo ſind die Differentiale der Winkel gleich, welche EF mit MN und $R\phi$

 macht,

macht, oder es iſt $\frac{d\sigma}{r} = \frac{dS}{R}$; aber $\frac{dS}{R} = \frac{1}{}$ $\frac{dr}{n(a - n\sigma)}$ welches alſo $n a d\sigma - n n s d\sigma =$ rdr giebt, woraus man durch die Integration $rr = 2na\sigma - nn\sigma\sigma + aa$ erhält, wenn $r = a$ für $\sigma = 0$ werden ſoll (I).

VI. Aus der Gleichung $\sigma\sigma - \frac{2a}{n}\sigma + \frac{rr - aa}{nn} = 0$ (V) das zweyte Glied wegzuſchaffen (Alg. 282.) ſetze man $s = \sigma - \frac{a}{n}$, dieſes giebt $r = \sqrt{(2aa - nnss)}$ und wenn der Bogen $AE = \frac{a}{n}$ ſo iſt $AM = s$.

VII. Hat man vermittelſt dieſer Gleichung die krumme Linie beſtimmt, ſo findet man den Punct E, um den gleich weite Bogen müſſen abgeſchnitten werden, damit die krumme Linie ihrer Evolute verkehrt ähnlich wird, wenn man $s = \frac{a}{n}$ nimmt, da denn $r = a$ wird.

VIII. Eine Gleichung zwiſchen rechtwinklichten Coordinaten $AP = x$; $PM = y$ zu finden, iſt

iſt wie in (589; II) $r = \frac{ds.\sqrt{(1-qq)}}{dq}$ alſo

$\frac{ds}{r}$ oder $\frac{dq}{\sqrt{(1-qq)}} = \frac{ds}{\sqrt{(2aa-nnss)}}$ (V)

$= \frac{1}{n}. \frac{\frac{n}{a\sqrt{2}}.ds}{\sqrt{\left(1-\frac{nnss}{2aa}\right)}}$ davon die Integrale

Bog ſin $q = .$ Bog ſin $\frac{ns}{a\sqrt{2}}$ wo, wenn die beſtändige Gröſſe, die man addiren ſollte $= 0$ geſetzt wird, q oder $\frac{dx}{ds}$ für $s = 0$ auch $= 0$, folglich die krumme Linie in A auf die Axe ſenkrecht ſeyn muß.

VIIII. Man ſetze zuerſt $n = 1$ da die geſuchte Linie ihrer Evolute nicht nur verkehrt ähnlich, ſondern auch gleich iſt. So kömmt Bog ſin $q =$ Bog ſin $\frac{ns}{a\sqrt{2}}$ oder $q = \frac{s}{a\sqrt{2}}$ und $\sqrt{(1-qq)} = \frac{\sqrt{(2aa-ss)}}{a\sqrt{2}}$ alſo qds oder $dx = \frac{sds}{a\sqrt{2}}$ und $2ax\sqrt{2} = ss$ weil x und s zugleich verſchwinden. Folglich iſt die geſuchte krum-

krumme Linie eine Cycloide, (559) die in A den größten Krümmungshalbmeſſer $a\sqrt{2}$ (VI) oder die kleinſte Krůmmung hat. Für den Punct E iſt $s = AE =$ (VI) a alſo $x = \frac{a}{2\sqrt{2}}$

X. Der Halbmeſſer des beſchreibenden Kreiſes oder was in 559; r hieſſe, und um Verwirrung mit (VIII) zu vermeiden, k heiſſen ſoll, iſt ſo beſchaffen, daß $8k = 2a\sqrt{2}$ oder $a = 2k\sqrt{2}$ oder $k = a : 2\sqrt{2}$. Wenn ACB oder acb = 90 Gr. ſo iſt aus 559; mit Alg. 600 u. f. und der hieſigen 7 F. vergleichen

31 F; A; P; M; B; C,
7 F; F; M; P; A; E,

oder was zwiſchen AC und CB 32 F. enthalten iſt; wird mit der 7 F. einerley ſeyn, wenn man dieſe Figur hinten durch das Blatt anſieht, und ſie ſo hålt, daß ihre FE mit AC 32 F. parallel iſt. Da nun die halben Cycloiden AMB, aμb; (Alg. 609) einander gleich und åhnlich ſind, (I) ſo ſind, wenn amb mit FPA 7 F. verglichen wird

31 F; a; μ; b; c;
7 F; F; P; A; E;

oder die 7 F. auf der Seite des Blattes, wo ſie ſteht, ſo angeſehen, daß ihre AE mit bc 32 F. parallel iſt, ſtellt acb der 32 F. vor.

Ferner iſt bey Vorausſetzung eines rechten Winkels bey C 32 F. BC einerley mit AE der 7 F; folglich in gegenwårtiger 32 F; BC = bc =

der

der halben Grundlinie (Alg. 602) = πk (Alg. 605). Und die Länge der halben Cycloide AB oder ab; 4 k (559). Auch Ab oder a $\sqrt{2}$ (VIIII) = 4 k; folglich die ganze Länge des Fadens ab + bA oder aB = 8k.

XI. Wenn eine halbe Cycloide, die der ab gleich und ähnlich iſt, an ab ſo gelegt wird, daß beyde einander in a berühren und ihre erhabenen Seiten gegen einander kehren, ſolchergeſtalt eine Figur wie CDG Alg. 20 F. herauskömmt, und ein Faden aμbA an der erſten anliegt, ſo wird ſich ſolcher, nachdem er ſich von der halben Cycloide bμa ganz in die Lage aB abgewickelt hat, wieder in verkehrter Ordnung auf die andere halbe Cycloide aufwickeln; und da er nothwendig hiebey eben die Linie, nur rückwärts beſchreibet, die er beſchriebe, wenn er auf derſelben ſo wie um abA läge und ſich davon abwickelte; ſo entſteht durch dieſe Aufwickelung die an AB gehörige halbe Cycloide, welche mit AB zuſammen eine ganze Cycloide ausmacht. Dieſe ganze Cycloide beſteht nähmlich aus zwey Stücken wie F2A und 2AF Alg. 35 F. in 2A an einander gefügt, daß ſie da eine gemeinſchaftliche Tangente hätten; dieſe beyden Stücken aber machen zuſammen eine ganze Cycloide wie AF2A Alg. 35 F. aus, weil die Stücken F2A; AF; einander gleich und ähnlich ſind. (Alg. 609.)

XII. Soll die Abwickelung ſo verrichtet werden,

den, daß die Puncte A und b zuſammen fallen; ſo muß der Halbmeſſer der Krümmung bey A; = o ſeyn, (567) alſo muß A 32 F. mit A 7 F. einerley ſeyn, damit Ab = o iſt (557). Alſo müßte nun B 32 F. ſeyn, was F 7 F. iſt. Um zu verſuchen, ob dieſes angeht, nehme man wieder ACB = 90 Gr. an und ziehe MQ mit AC parallel; nenne ferner BQ = x; MQ = v; BM = s; So muß man in VI; erſtlich n = 1 (VIII) denn $\sigma = a - s$ ſetzen, und EB = a nehmen. Dieſes giebt wie in VI; $r = \sqrt{(2aa - ss)}$ wo r = o für $s = a\sqrt{2}$. Nun findet man wie in VIII; $q = \frac{s}{a\sqrt{2}}$ welches zeigt, daß für s = o oder in B, die krumme Linie auf CB ſenkrecht; aber für $s = a\sqrt{2}$; mit CB parallel iſt, weil daſelbſt dx = ds. Folglich muß die Normallinie am Ende des Bogens $a\sqrt{2}$ von B an gerechnet, auf CB ſenkrecht ſtehen. Aber CA ſteht auf CB ſenkrecht, wie angenommen wird; und es giebt innerhalb des Bogens BA nicht zwo parallele Normallinien (585) folglich iſt $BA = a\sqrt{2}$, alſo Ab = o; daß aber BA und folglich ba ein Bogen einer Cycloide wie FA 7 F. iſt, erhellt wie VIIII. Hier alſo iſt die Länge des Fadens = BA = ab = 4k (X) der wie in XI eine ganze Cycloide beſchreiben kann.

XIII. Wenn nicht n = 1; ſo iſt die Integral-

glei-

gleichung (VIII) zumahl auſſer den Fällen, da $\frac{1}{n}$ eine ganze Zahl iſt, unbequem, weil man da Winkel vervielfältigen muß. Man bediene ſich alsdenn der Gleichung $\frac{dq}{\sqrt{(1-qq)}} = \frac{ds}{\sqrt{(2aa-nnss)}}$ oder q = ſin des Bogens

$\int \frac{ds}{\sqrt{(2aa-nnss)}} = z$ (588) wenn dorten $\alpha =$ 2aa; $\beta = -nn$; Folglich $dx = zds$; $dy = \zeta ds$ und $x = \frac{nnsz + \zeta\sqrt{(2aa-nnss)}}{nn-1}$

$$y = \frac{nns\zeta - z\sqrt{(2aa-nns)}}{nn-1}$$

Weil nun $\int \frac{ds}{\sqrt{(2aa-nnss)}} = \frac{1}{n}$ Bog ſin $\frac{ns}{a\sqrt{2}}$ (VII) ſo ſind für ein gegebenes s; und folglich einen gegebenen ſin $\frac{ns}{a\sqrt{2}}$; z und ζ algebraiſch gegeben, ſo oft n eine ganze Zahl iſt. Weil man nur in Alg. 175; z und ζ als Sinus und Coſinus des einfachen Bogens, ſin $\frac{ns}{a\sqrt{2}}$ aber als den Sinus ſeines vielfachen anſehen darf,

darf, alſo zwiſchen dieſen Sinus und z; ζ; allemahl eine algebraiſche Gleichung erhält, in der die geſuchten z; ζ; auf den Grad n ſteigen. Hieraus erhellt, daß ſo oft n eine ganze von 1 unterſchiedene Zahl iſt, x und y algebraiſch gegeben, folglich dieſe krummen Linien algebraiſch ſind. Ihre Unterſuchung läßt ſich aber hier nicht weiter treiben, weil von den krummen Linien überhaupt im vorhergehenden zu wenig hat können abgehandelt werden.

591. Anm. Was 578. . . 590 enthalten, iſt aus Herrn Eulers inueſtigatione curuar. quae euolutae ſui ſimiles produunt; Comm. Ac. Imp. Petrop. T. XII. genommen; wo dieſe Unterſuchung weiter ausgeführt, und auch auf die ferneren Evoluten der Evolutin angewandt wird. Ich habe nur hie und da Anfängern nöthige Erläuterungen beygefügt. Herr Euler erinnert ſelbſt, daß man die beyden Linien, die ihren Evoluten, eine ordentlich, die andere verkehrt, ähnlich und gleich ſind, leichter finden könne; wie ſolches Kraſt Comm. Ac. Imp. Petrop. T. II. p. 216. gewieſen hat. Auſerdem aber daß dieſer Unterſchied der Leichtigkeit eben nicht ſo gar viel beträgt, ſo hat es mir aus eben dem Grunde dienlich geſchienen Herrn Eulers Vortrag hier zu erläutern, aus welchem er denſelben erwählt hat, weil man dadurch nähmlich veranlaßt wird verſchiedene Kunſtgriffe beym Intregriren, kennen zu lernen und zu gebrauchen.

592. Anm. Huygens hat zuerſt eine krumme Linie, die ihrer Evolute gleich und ähnlich iſt, nähmlich die Cycloide (590; VIIII) entdeckt; S. ſein zu Paris 1763 herausgekommenes Herologium oſcillatorium Part. III; wo überhaupt die Lehre von der Evolution

ſyn-

ſynthetiſch, nach Art der Alten, und ohne die Rechnung des Unendlichen, welche damahls noch nicht im Gebrauche war, abgehandelt wird. Dieſe Eigenſchaft der Cycloide befindet ſich daſelbſt Prop. VI. Hugen hat ſie bey den Pendeluhren gebraucht. Die zweyte Linie, die ihrer Evolute ähnlich, aber nicht gleich iſt, hat Tſchirnhauſen; Act. Erud Lipſ. Nou. 1682. bekannt gemacht. Die dritte, von welcher dieſes entdeckt worden, iſt die logarithmiſche Spirale (589; VII;) Jacob Bernoulli hat dieſe ſeine Erfindung ebenfalls Act. Erud. Lipſ. Mai. 1692. (Op. Iac. Bern. n. 49) mitgetheilet. Weil dieſe Linie auf ſehr viel andere Arten, durch welche ſonſt aus einer krummen Linie andere entſtehen, immer ſich ſelbſt wieder darſtellet, hat er ſie zugleich als ein Denkmahl ſeiner Entdeckungen und als ein Sinnbild der Auferſtehung, mit der Ueberſchrift: Eadem mutata reſurgo, auf ſeinen Grabſtein ſetzen laſſen. S. Battiers Leichenrede auf Jac. Bern. Op. Iac. Bern. T. I. p. 30. Dieſe Erfinder haben nur gewieſen, daß bey den krummen Linien, die ſie betrachteten, die Aehnlichkeit zwiſchen den Evoluten, und den durch die Abwickelung entſtandenen Linien ſtatt finde: Die Abſicht vorhergehender Unterſuchung aber war überhaupt alle krummen Linien zu entdecken, wo dieſe Aehnlichkeit ſtatt findet, und ſich ſolchergeſtalt, wie der Erfolg weiſet, zu überzeugen, daß ſie nur bey denen, wo man ſie zuerſt entdeckt hat, ſtatt finde, wovon noch Johann Bernoulli das Gegentheil gemuthmaßt hatte, Lect. Hoſp. 25. Op. T. I. p. 460.

Gleichungen zwiſchen Ordinaten aus einem Puncte und Perpendikeln auf die Tangenten.

593. Aufg. Für die krumme Linie BMN 33 F. hat man eine Gleichung zwiſchen CM = y (Anfangsgr. III. Th. II. B.) Mm und

und einen Kreisbogen = u der um C mit dem Halbmeſſer e beſchrieben iſt, und den Winkel BCM mißt. Dieſe Gleichung heißt (F). Man ſucht eine Gleichung, die (L) heiſſen ſoll, zwiſchen CM, und CQ = t, dem Perpendikel auf die Tangente.

Aufl. Hier ſind e; u; mit r; x (104) einerley. Wenn alſo dy = pdx und TCM 33 F. wie 8 F. = R iſt, ſo iſt MT = y √ (eepp + y²) : ep; und $\frac{MC.\ CT}{MT}$ das iſt CQ oder $t = \frac{y^2}{\sqrt{(e^2p^2+y^2)}}$.
Iſt p unmittelbar durch y allein gegeben, ſo iſt die nur gefundene Gleichung alſobald (L). Iſt aber p als eine Function von beyden veränderlichen Gröſſen vermengt gegeben, ſo hat man doch ſolchergeſtalt eine Gleichung zwiſchen p; u; y; die ſich mit der zwiſchen u und y verbinden läßt, daß man aus beyden zuſammengenommen p wegſchaffen, und eine Gleichung zwiſchen y; u; t; finden kann; Weil nun die vorhin gefundene auch y; u; t; enthält, ſo kann man wieder aus beyden zuſammengenommen u wegſchaffen und eine zwiſchen y und t finden.

Exempel.

594. Für die archimediſche Spirale iſt u; x in 530 hier y; u; und $t = \frac{y^2}{\sqrt{(y^2 + ee : 4\pi\pi)}}$

595. Für die logarithmiſche (510) $\frac{ydu}{edy} = m$ alſo $p = \frac{y}{me}$ und $t = \frac{my}{\surd(1+mm)}$ woraus $\frac{t}{y}$ = dem Sinus des Winkels CMT deſſen Tangente m iſt, folgt.

596. Aufg. Den Halbmeſſer der Krümmung durch CM und CQ auszudrücken.

Aufl. I. Er heiſſe = r; MN 34 F. ſey ein Bogen der krummen Linie, an deſſen beyden Endpuncten MQ; NV Tangenten, und CQ; CP; auch MK; NK Perpendikel darauf ſind; welche ſich in Halbmeſſer des Krümmungskreiſes für MN verwandeln, wenn MN verſchwindet und H der Krümmungswinkel wird. CV ſchneide HQ in L. Nun iſt allemahl QHV = MKN auch = QCL; alſo $\frac{QL}{CQ}$ = tang MHV; welches alſo verſchwindet, wenn H der Krümmungswinkel wird. Ferner iſt LV: LQ = VH: QC; wo die leztere Verhältniß endlich bleibt, wenn M; H; N; zuſammen fallen, da ſich HV der MQ, und die Verhältniß HV: QC der MQ: QC unendlich nähert, die Verhältniß aber MQ: QC; iſt allemahl endlich, auſer in dem einzigen beſondern Falle, wenn CM auf die Tangente ſenkrecht iſt. Dieſen Fall ſo ausgenommen iſt allemahl der

Quotient $\frac{LV}{LQ}$ endlich. Aber

$$CL = \surd(CQ^2 + QL^2) = CQ + \frac{QL^2}{2CQ} \ldots$$

alſo $\frac{CL - CQ}{QL} = \frac{QL}{2CQ}$ folglich verſchwindet $\frac{CL - CQ}{QL}$ wenn H der Krümmungswinkel wird. Weil nun $CV = CL + LV$; ſo iſt

$$\frac{CV - CQ}{LQ} = \frac{CL - CQ}{LQ} + \frac{LV}{LQ} = \frac{LV}{LQ}$$

wenn H der Krümmungswinkel wird und der erſte Theil des Werthes von dieſen Quotienten, aber nicht der andere, verſchwindet. Alſo iſt für den Krümmungswinkel $LV = CV - CQ = dt$. Ferner $\frac{LV}{HV} = \text{tang } H = \text{tang } K = K$ wenn die Winkel verſchwinden, und HV ſich unendlich dem Werthe $MQ = \surd(yy - tt)$ nähert. Alſo iſt K oder $\frac{ds}{r} = \frac{dt}{\surd(yy - tt)}$ das iſt

$$r = \surd(yy - tt) \cdot \frac{ds}{dt}$$

II. Wenn MS ein Kreisbogen aus dem Mittelpuncte C iſt, ſo iſt (505) der Ausſchnitt MCN oder $\frac{1}{2} y \surd(ds^2 - dy^2)$ hier auch $= \frac{1}{2} t ds$ alſo

alſo $(yy - tt)\,ds^2 = yy\,dy^2$. Daraus folgt

$$r = \frac{y\,dy}{dt}$$

597. Ex. Wenn für die logarithmiſche Spirale (595) $t = ny$ ſo iſt $r = \frac{y}{n}$ wie (556)

598. Zuſ. Um K ſey ein Kreis mit dem Halbmeſſer r beſchrieben. Wenn man nun nach Gefallen einen Punct C nähme, daß $KC = k$; und eine Gleichung zwiſchen CM und CT für jeden willkührlichen Punct dieſes Kreiſes ſuchte, ſo wäre r unveränderlich und $r\,dt = y\,dy$ alſo $rt =$ Conſt $+ \frac{1}{2}\,yy$. Weil nun KC auf des Kreiſes Tangente an der Stelle, wo er KC ſchneidet, ſenkrecht ſteht, ſo iſt für dieſe Stelle $y = t$. Aber es iſt auch für dieſelbe $y = k - r$; alſo $r.(k - r) =$ Conſt $\frac{+ (k - r)^2}{2}$ woraus $2rt = yy + 4kr - 3rr - kk$ folgt.

Wenn $k = r$, oder C im Umfange des Kreiſes liegt, und CM eine Sehne wird, ſo kömmt $t = yy : 2r$ wie auch wenn $k = 3r$; weil dieſe beyden Werthe von k die Wurzeln der Gleichung $kk = 4kr - 3rr$ ſind. Für $k = 0$ iſt $2rt = yy - 3rr$; Hier muß man $y = - r$ ſetzen, weil bey der Integration überhaupt das y das in die Linie CK fiele $= k - r$ geſetzt worden; dieſes wird hier $= - r$; und jedes y das durch C geht,

d. i. jeder gegenwärtige Halbmeſſer fällt nun in CK; da man nun auch y das auf CK fiele, = t ſetzt, ſo iſt hier t = − r und dieſes giebt − 2 r r = r r − 3 r r wie ſich gebührt: Dieſe unerwartete Nothwendigkeit hier y = − t beruhet nähmlich darauf, weil man bey der Integration CK > r angenommen.

Ein Punct kann als ein Kreis angeſehen werden, deſſen Halbmeſſer = o wäre. Für ihn alſo kömmt o = yy − kk das iſt y = k. Wenn nähmlich alle Puncte M des Kreiſes in K zuſammengehn, ſo giebt es keine andere CM als die einzige CK. Jede Linie durch K kann eine Tangente dieſes in einen Punct verwandelten Kreiſes heiſſen: alſo giebt es für das einzige y = k; unzählige t. Daher iſt t in der Gleichung nicht zu finden, durch die es ſich nicht beſtimmen lieſſe.

598. Aufg. Wenn eine Gleichung zwiſchen CM und CQ 34 §. gegeben iſt, daraus eine zwiſchen CM und u (593) zu finden.

Aufl. Dieſe Aufgabe iſt die umgekehrte von 593; und ſucht (F) aus (L). Es iſt aber tds = yydu : e (596; II) daraus findet man, wenn ſtatt ds ſein Werth geſetzt wird, nach gehöriger Rechnung $\frac{t\,dy}{y\sqrt{(yy - tt)}} = \frac{du}{e}$. Hier kann man nun wegen der gegebenen Gleichung zwiſchen y und t, annehmen, auf der linken Seite ſey alles durch y gegeben; folglich wird die geſuch-

ſuchte Gleichung $\int \frac{t\,dy}{y \surd (yy - tt)} = \frac{u}{e}$ ſeyn, wo die Integrale linker Hand einer Function von y; und alſo y durch u gegeben iſt, ſo daß man für jedes angenommene u, den zugehörigen Werth von y finden kann. Das angenommene u aber giebt die Lage, und der Werth von y die Länge der Linie CM, daß man alſo ſolchergeſtalt alle Puncte M finden, d. i. die krumme Linie verzeichnen kann.

Exempel.

599. I. Es ſey $t = ahy : \surd ((aa - hh)\, y^2 + aahh)$. Man nehme an, der Anfang des Bogens u werde ſo genommen, daß u zunimmt, wenn y abnimmt, alſo beyder Differentiale entgegengeſetzte Zeichen haben; ſo iſt nach gehöriger Rechnung $\frac{du}{e} = - \frac{m\,dy}{y^2}$ wo $m = \frac{ah}{\surd (aa - hh)}$ folglich $\frac{u}{e} = Const + \frac{m}{y}$; Es ſey $y = a$ für $u = o$ ſo iſt $u = \frac{em.\,(a - y)}{ay}$ oder $y = \frac{ema}{au + em}$

II. Für $y = a$ iſt $t = h$; alſo $\frac{CQ}{MQ}$ oder die Tangente des Winkels CMQ für $u = o$;

 =

$= \frac{h}{\sqrt{(aa - hh)}}$ heißt ſie θ ſo iſt $m = a\theta$ und dieſes giebt, wenn nach $e = 1$ geſetzt wird $y = \frac{a\theta}{u + \theta}$

III. Geſetzt, der Winkel, den die krumme Linie da, wo $u = 0$ iſt, mit der Ordinate macht, ſey $= 45$ G. ſo iſt $\theta = 1$ und $y = a : (u + 1)$.

IIII. Die Verzeichnung in (III) geſchieht folgendergeſtalt. Man ziehe 33 F. $CA = a$ nach Gefallen, und beſchreibe mit $CG = 1$ den Kreisbogen $NG = u$; Iſt u in Graden gegeben, ſo hat man unmittelbar den Winkel ACC; und muß alsdenn die Länge des Bogens u in Theilen des Halbmeſſers ſuchen, um den Quotienten $a : (u + 1)$ oder $y = CM$ zu haben. Iſt aber u in Theilen des Halbmeſſers gegeben, ſo hat man unmittelbar die Länge CM, und ſucht nun u in Graden, den Winkel ACH zu finden.

Wäre $u = 60$ Gr. gegeben, ſo fände man die Länge dieſes Bogens $= 1, 047 \ldots$ alſo $CM = a : 2, 047 = 0, 48. a$

Wäre $u = \frac{1}{2}$ gegeben, ſo müßte man $CM = a : \frac{3}{2} = \frac{2}{3} a$ in einem Winkel $ACM = 28$ Gr. 38 M. ziehen (311)

V. Joh. Bernoulli Act. Er. Lipſ. 1713. Op. T. I. n. 90. §. 65; hat die Linie (II) die hyperboliſche Spirallinie genannt, wegen der Aehnlich-

lichkeit, die ihre Gleichung mit der aſymptotiſchen Gleichung der Hyperbel (Alg. 412) hat. Ihre Ordinaten verhalten ſich verkehrt wie die Abſciſſen $u + \theta$ denn es iſt klar, daß man den Bogen $ND = \theta$ nehmen, und die Bogen DG ſtatt NG brauchen kann. Daher heißt Bernoulli ſie auch die verkehrte archimediſche Spirale. (Alg. 580.) Sie kömmt in der höhern Mechanik vor. Bernoulli a. a. O. Eul. Mech. L. I. §. 671; II.

600. Es ſey $t = y \sqrt{\frac{(a - y)}{a}}$; alſo $y^2 - t^2 = y^3 : a$, und wenn $e = 1$ geſetzt wird, $du = \frac{dy}{y} \cdot \sqrt{\frac{a - y}{y}}$. Man ſetze $\sqrt{\frac{a - y}{y}} = w$ alſo $\frac{a}{ww + 1} = y$; ſo kömmt $du = -\frac{2wwdw}{ww + 1} = -2dw + \frac{2dw}{ww + 1}$; Folglich $u = 2\,\mathfrak{B}\tan w - 2w$ wenn $u = 0$ wo $y = a$ oder $w = 0$.

Hieraus fließt folgende Verzeichnung der krummen Linie: Man nehme ein y nach Gefallen an, dadurch iſt eine Zahl w; folglich auch $\mathfrak{B} \tan w$; und daher u als eine Zahl für den Halbmeſſer = 1 gegeben. Daraus findet ſich der Winkel ACM 35 F. in dem man das angenommene y = CM legen muß.

Wenigſtens im erſten Quadranten, wo jeder Bogen kleiner als ſeine Tangente iſt, wird der gefundene Werth von u, allemahl verneint ſeyn. Dieſes bedeutet weiter nichts, als daß man die Bogen von G aus nicht nach N ſondern nach B nehmen müßte. Es rührt aber daher: Aus der Differentialgleichung zwiſchen u und w erhellt, daß u wächſt, wenn w abnimmt; aber $w = \sqrt{\left(\frac{a}{y} - 1\right)}$ iſt nur möglich, wenn y nicht gröſſer als a iſt, und nimmt ab, wenn y wächſt; Alſo wachſen zwar u und y zugleich, oder ihre Differentiale haben einerley Zeichen, aber für das größte $y = a$ muß angenommener Maſſen $u = 0$ folglich für kleinere verneint ſeyn, daß dieſes verneinte u als eine verneinte Gröſſe betrachtet abnimmt, das iſt, bejahte Differentiale hat, und folglich als wachſend angeſehen wird, wenn die bejahte Ordinate wächſt. Will man alſo für u einen bejahten Ausdruck haben, ſo darf man nur ſetzen, es ſoll ſich mit der größten Ordinate $= a$ anfangen, und folglich wachſen, indem die Ordinaten abnehmen, das iſt, man darf nur $-du = \frac{dy}{y} \cdot \sqrt{\left(\frac{a}{y} - 1\right)}$ ſetzen, ſo erhält man nach eben der Rechnung $u = 2.(w - \mathfrak{B}\,\mathrm{tang}\,w)$ Es ſey $a = 1$ und $y = \frac{1}{2}$ alſo $\mathfrak{B}\,\mathrm{tang}\,w = 45$ Gr. So iſt $2\,w = 2,$

2 B

$2\,\mathfrak{B}\ \text{tang}\ w = 1,\ 57079$

$u = 0,\ 42921 = GN$

Den Winkel ACG zu finden, ſchließt man 3, 141 ... 0, 42921 = 180 Gr: ACG; alſo beynahe

$ACG = 180\ \text{Gr.}\ \frac{43}{314} = 24\ \text{Gr}$; da man denn auf der ſolchergeſtalt gezogenen CN; eine Länge $= \frac{1}{2}$ für den Punct der krummen Linie nimmt. Ihr erſter Punct für $u = 0$ wäre G.

$\mathfrak{B}$ tang w wächſt mit w bis an 90 Gr. wenn $w = \infty$ für $y = 0$ wird. Da wird auch $u = \infty$ alſo windet ſich die krumme Linie unzählich vielmahl um C herum.

Aus $t = \left(y^2 - \frac{y^3}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$ folgt $dt = \frac{1}{2}$.

$\frac{2a - 3y}{\surd(aa - ay)}\ dy$ und (596) $r = \frac{2n\surd(aa - ay)}{2a - 3y}$

welcher in C verſchwindet. Eul. Mech. L. II. §. 429.

601. Aufg. Aus der Gleichung zwiſchen y und u wo $e = 1$ eine zwiſchen den rechtwinklichten Coordinaten $CP = x$; $PM = z$ zu finden 33 F.

Aufl. I. Wenn u als ein Bogen angegeben wird, deſſen Sinus, oder Tangente u. ſ. w. wie man will, algebraiſch durch y gegeben iſt; ſo iſt folglich allemahl coſ u durch y gegeben. Aber

$\frac{x}{y} = \cos u$. Alſo iſt eine algebraiſche Gleichung zwiſchen x und y, das iſt, weil $zz = yy - xx$; zwiſchen x und z gegeben.

II. Iſt aber u auf jede andere Art durch y gegeben, z. E. wie bey den Spirallinien, ſo läßt ſich u aus dieſer Gleichung mit der $\frac{x}{y} = \cos u$ verglichen nicht wegſchaffen, weil zwiſchen dem Bogen und ſeinem Coſinus keine algebraiſche Gleichung ſtatt findet (Alg. 613)

III. Dieſe Sätze laſſen ſich ſo ausdrucken: B $\cos \frac{x}{y} = \int \frac{dy}{p}$ (593) wo ich annehme, p ſey durch y gegeben. Iſt nun die Integrale ein Kreisbogen, deſſen Coſinus algebraiſch durch y gegeben iſt, ſo kann man allemahl die Bogen auf beyden Seiten wegſchaffen, und eine algebraiſche Gleichung zwiſchen x und y erhalten, ſonſt aber nicht.

602. Zuſ. Wenn zwiſchen CM und CV eine Gleichung gegeben iſt, ſo findet man vermöge 598 folgende B $\cos \frac{x}{y} = \int \frac{t\,dy}{y\sqrt{(yy - tt)}}$ die algebraiſch wird, ſo oft das Integral ein Kreisbogen iſt, deſſen Coſinus ſich durch y ausdrucken läßt.

Exem=

Exempel.

603. Es ſey $u = \mathfrak{B} \tang y : a$; So iſt $\cos u = a : \sqrt{(aa + yy)}$ welches $= x : y$ geſetzt die Gleichung $z = xx : \sqrt{(aa - xx)}$ giebt.

604. Für die archimediſche Spirale (530) $\int \frac{dy}{p} = 2\pi y = \mathfrak{B} \cos \frac{x}{y}$ wo keine algebraiſche Gleichung ſtatt findet.

605. Es ſey $\frac{du}{e} = \frac{ecdy}{y\sqrt{(eby^2 + eegy - eecc)}}$ das Differential rechter Hand auf einen Ausdruck wie $ds : \sqrt{(1 - SS)}$ zu bringen, wo S einen Sinus oder Coſinus bedeutet; muß zuerſt, was unter des Nenners Wurzelzeichen vorhanden iſt, verneint werden. Alſo drücke man den Nenner ſo aus: $y^2 . \sqrt{(eb + eeg : y - eecc : y^2)}$. Man ſetze $ee : y = P$ ſo kömmt das ganze Differential $= - cdP : e\sqrt{(eb + gP - cc . PP : ee)}$ oder $= - cdP : \sqrt{(e^3 b : cc + eegP : cc - PP)}$ Man ſetze $P = \frac{eeg}{2cc} - w$; da ſich das Differential in $+ \frac{dw}{\sqrt{(hh - ww)}}$ verwandelt, wo $hh = \frac{ee}{4c^4}.$ $(4ebcc + eegg)$. Alſo iſt $\frac{u}{e} =$

dw:

$\frac{dw:h}{\sqrt{(1 - ww:hh)}}$ weil nun $\frac{u}{e} = \mathfrak{B}\,\mathrm{ſin}\,\sqrt{(1 - x^2 : y^2)}$ (601. III) ſo iſt (281)

$$\frac{h.\sqrt{(y^2 - x^2)}}{y} = w = \frac{eeg}{2cc} - P;$$ daraus folgt $2cch\sqrt{(y^2 - x^2)} = e^2gy - 2ccee$ oder $2cc.(hz + ee) = ee.g\sqrt{(zz + x^2)}$ Nachdem man die Rechnung gehörig verführt und $4e^5bcc$ ſtatt $4c^4hh - e^4gg$ *geſetzt hat*, kömmt

$$zz + \frac{2cche}{eb}z + \frac{cce}{b} = \frac{egg}{4bcc}xx,$$ oder weil man gleich aus der Aehnlichkeit dieſer Gleichung mit der für die Kegelſchnitte ſieht, daß es bequemer iſt z für die Abſciſſen und x für die Ordinaten zu nehmen; $xx = \frac{4bcc}{egg}zz +$

$\frac{8c^4h}{egg}z + \frac{4c^4}{gg}.$ Da iſt nun

Alg. 419 x; y; δ; ε; ζ

hier z; x; $\frac{4bcc}{egg}$; 0; −1

und alſo iſt die krumme Linie eine Hyperbel oder Ellipſe, nachdem $\frac{b}{e}.\frac{4cc}{gg}$, das iſt, weil e allemahl eine bejahte wirkliche Gröſſe ſeyn muß, nachdem b verneint oder bejaht iſt, (Alg. 465. VIII wo die Worte einerley und verſchieden müſ-

müſſen in der I. Auflage verwechſelt werden.) Iſt b = o ſo kömmt die Parabel.

Dieſe krummen Linien ſind die, in welchen ein Körper geht, der von einem Mittelpuncte C verkehrt wie die Quadrate der Entfernungen angezogen wird Joh. Bern. Op. T. I. n. 86. p. 476. Ich halte aber nicht für nöthig, hier weitläuftiger davon zu handeln, weil Herr Euler die Art, wie ſie zu finden ſind, viel vollkommener vorgetragen hat. Mech. L. I. §. 601.

Anwendung der Integralrechnung auf die Ausrechnung runder Körper und ihrer Flächen.

606. Aufg. Indem ſich die krumme Linie AM 35 F. um die Axe AC dreht, entſteht ein runder Körper (Alg. 545). Man verlangt ſeine Fläche zu finden.

Aufl. Wenn AP = x; PM = y; ſo ſey pm eine andere Ordinate. Zwiſchen den Kreiſen die beyde Ordinaten bey der Umdrehung beſchreiben, iſt ein Stück der geſuchten krummen Fläche enthalten, das von dem Bogen Mm beſchrieben wird. Dieſes Bogens Sehne = e beſchreibt zugleich ein Stück der Fläche eines ſenkrechten Kegels, das = πe (PM + pm) iſt (Geom. 64 S. 4. Z.) und wenn der Bogen unendlich abnimmt, nähert ſich e unendlich dem Elemente der krum-

krummen Linie, ds; und PM + pm unendlich dem Werthe 2PM; und die Kegelfläche unendlich dem Stücke der geſuchten krummen Fläche, deſſen Element alſo $2\pi yds$ iſt.

Exempel.

607. I. Für jeden Kegelſchnitt, wo $y^2 = bx \mp \frac{b}{a} x^2$ iſt $2\pi yds = \frac{\pi}{a} \sqrt{} (aabb + 4ab.(a \mp b)x + 4b.(b \mp a)x^2)\, dx$.

II. Die Gröſſe unter dem Wurzelzeichen iſt $= 4b.(a \pm b).\left(\frac{aab}{4.(a \pm b)} + ax - x^2 \right)$

Der letzte Factor mag $ee + ax - x^2$ heiſſen, ſo iſt $2\pi yds = \frac{4b.(a \mp b)\pi}{a} \sqrt{} (ee + ax - x^2).\, dx$.

III. Dieſes Differential rational zu machen, ſetze man $\sqrt{} (ee + ax - x^2) = e + qx$; Dieſes giebt $\frac{a - 2eq}{(1 + q^2} = x$ und $(e + qx).\, dx = \frac{-2.(e + aq - eq^2)^2}{(1 + q^2)^3} dq$ welches alſo nach 385. integrirt die geſuchte Fläche giebt.

IIII. Wenn AM ein Kreis, alſo der Körper eine Kugel iſt, ſo iſt $a = b$; und in III. $2\pi yds$ $=$

$= \frac{\pi}{a} \sqrt{aab}. dx$ alſo die Fläche $= \pi bx$ wie S. 65. S.

V. Wenn AM eine Parabel, alſo a unendlich, ſo werden alle Theile des rationalen Differentials (III) unendlich; weil $ee = \frac{aab}{4.(a \mp b)}$ hier $= \frac{ab}{4}$ auch unendlich wird; alſo drücke man in (I) das Differential ſo aus:

$$\pi \sqrt{\left(bb + \frac{4b.(a \mp b)x}{a} + \frac{4b.(b \mp a)x}{aa}\right)} dx$$

wenn nun $a = \infty$ ſo verwandelt ſich dieſes in $\pi \sqrt{(bb + 4bx)}. dx$ Hier ſetze man $\sqrt{(bb + 4bx)} = b + v$; ſo verwandelt ſich das Differential in $\frac{\pi.(b+v)^2. dv}{2b}$; hier ſtatt $b + v$ ſeinem Werth geſetzt und das Integral ſo genommen, daß es für $x = 0$ verſchwindet, giebt die Fläche

$$\frac{\pi.\left((b^2 + 4bx)^{3:2} - b^3\right)}{6b}$$

608. Anm. Aus $2yds = \frac{1}{4}. \frac{8ydy \sqrt{(bb + 4y^2)}}{b}$ (271) wird ſogleich nach 245; $\int 2yds = \frac{(bb + 4yy)^{3:2}}{6b} + Const$ welches mit dem nur ge-

fundenen Integrale einerley iſt. Man kann das Differential (III) auch durch unendliche Reihen integriren, die aber, um beträchtlich zu convergiren, kleine x erfordern. So hat ſie Lulofs gebraucht, die Zonen auf der ſphäroidiſchen Erde zu berechnen. Kenntniß der Erdk. 601. §.

609. Aufg. **Den Innhalt eines runden Körpers zu finden.**

Aufl. Das Stücke von ihm, das zwiſchen den beyden Kreiſen enthalten *iſt*, *die von* PM und pm beſchrieben werden, iſt gröſſer *als* ein Cylinder, der Pp zur Höhe und den Kreis mit PM zur Grundfläche hätte, aber kleiner als ein Cylinder, deſſen Grundfläche der Kreis mit pm, bey eben der Höhe wäre. Beyde Cylinder aber nähern ſich einander unendlich. Alſo iſt das Differential des Körpers, den AM beſchreibt, ein Cylinder, deſſen Höhe Pp, die Grundfläche der Kreis mit PM wäre, oder es iſt $\pi y^2 dx$.

Exempel.

610. I. Für die Kegelſchnitte iſt dieſes Differential $= \pi . (b x d x \mp \frac{b}{a} x^2 dx)$ alſo der unbeſtimmte Innhalt jedes Sphäroids von einem Kegelſchnitte $= \frac{\pi b x^2}{6a} . (3a \mp 2x)$

II. Für die Kugel iſt $b = a$; und dieſer Innhalt

halt $= \frac{\pi x^3}{6} . (3a - 2x)$; welches für $x = a$ die ganze Kugel $= \frac{\pi a^3}{6}$ giebt wie G. 66 S.

III. Ein ganzes elliptiſches Sphäroid wird für $x = a$; $\frac{\pi b a^2}{6}$; und verhält ſich alſo zu einer Kugel, die a zum Durchmeſſer hat, wie b: a oder wie cc: aa; wenn die andere Axe der Ellipſe c heißt. (Alg. 366.)

IV. Wenn, groſſe Axe, Parameter, kleine Axe, Abſciſſe vom Scheitel, und Ordinate bey einer Ellipſe A; B; α; t; v; heiſſen, alſo ihre Gleichung $vv = Bt - \frac{B}{A} tt$ iſt; ſo heiſſe x eine Abſciſſe auf der kleinen Axe vom Scheitel der kleinen Axe genommen, und y die zugehörige Ordinate. Alsdenn iſt $x = \frac{1}{2}\alpha - v$; $y = \frac{1}{2}A - t$; und $\alpha = \sqrt{AB}$. Setzt man alſo $\frac{1}{2}\alpha - x$; und $\frac{1}{2}A - y$; ſtatt v und t; ſo kömmt $y^2 = \frac{A\alpha}{B} x - \frac{A}{B} x^2$; Man ſetze $\frac{A\alpha}{B}$ oder $\frac{A.A}{\alpha} = \beta$, ſo wird β der Parameter für die kleine Axe ſeyn, nähmlich die dritte Proportionallinie zu ihr und der groſſen, wie B die dritte zur groſſen und kleinen iſt, (Alg. 366) auch

kömmt alsdenn $y^2 = \beta x - \frac{\beta}{\alpha} x^2$ eine Gleichung wie die, wo die Abſciſſen auf der groſſen Axe genommen wurden. Alſo können in I; b; a; c auch hier β; α; A bedeuten, und wenn ein Sphäroid aus der Umdrehung einer halben Ellipſe um ihre kleine Axe entſteht, ſo verhält es ſich zu einer Kugel, deren Durchmeſſer dieſe kleine Axe wäre $= \beta : \alpha$ oder wie $A.\ A : \alpha\alpha$ (IIII).

V. Das Sphäroid, die Kugel, und *ein umſchriebener Cylinder*, der die groſſe Axe zum Durchmeſſer, die kleine zur Höhe hat, heiſſen E; S; C; ſo iſt $S = \frac{\pi.\ \alpha^3}{6}$; $C = \frac{A.\ A\pi}{4}.\ \alpha$;

$$E = \frac{A.\ A.\ S}{\alpha.\ \alpha} = \frac{A.\ A.\ \pi.\ \alpha}{6} = \tfrac{4}{6}\, C = \tfrac{2}{3}\, C.$$

Aus dieſen Gründen hat Lulofs den Innhalt der ſphäroidiſchen Erde berechnet a. a. O. 56 §.

VI. Eine Kugel, deren Durchmeſſer A iſt, heiſſe T; ſo iſt $T = \frac{A^3}{\alpha^3}.\ S$ alſo $\frac{A.\ A}{\alpha.\ \alpha}.\ S$ oder $E = \frac{\alpha.\ T}{A}$

VII. Wenn bey einem hyperboliſchen Sphäroid $x = a$; ſo iſt der Innhalt dieſes Stücks $= \frac{1}{6}\ \pi b a^2$ Für ein Sphäroid einer gleichſeitigen Hyper-

perbel aber iſt der unbeſtimmte Innhalt $= \frac{\pi x^2}{6}$ $(3a + 2x)$.

VIII. Weil der unbeſtimmte Innhalt jedes ſolchen Sphäroids $= \pi b x^2 . \left(\frac{1}{2} \mp \frac{x}{3a}\right)$ (I) ſo wird er für das paraboliſche, wo a unendlich iſt; $\frac{\pi b x^2}{2} = \frac{\pi x y^2}{2}$; halb ſo groß als ein umſchriebener Cylinder, der mit dieſem Stücke des paraboliſchen Sphäroids einerley Durchmeſſer $2y$ und einerley Höhe x hätte.

611. Für Sphäroiden unendlicher Parabeln, wo $y^m = x$ iſt $m y^{m-1} dy = dx$ alſo das Differential $\pi . m y^{m+1} dy$ und der Innhalt $\frac{m}{m+2} . \pi y^{m+2} = \frac{m}{m+2} . \pi y^2 x = \frac{m}{m+2}$ des umſchriebenen Cylinders.

612. Für den Körper, der aus Umdrehung der Ciſſoide (Alg. 470) um die Axe AB (Alg. III. T. 19. F.) entſteht. Das Differential iſt $\frac{\pi x^3\, dx}{a - x}$; aber $\frac{x^3}{-x+a} = -x^2 - ax - a^2 +$

$\frac{a^3}{a - x}$; alſo iſt der Körper $= \pi . (x . (- \frac{1}{3} x^2$

$- \frac{1}{2} ax - a^2) - a^3 . l \frac{a - x}{a}$ wo

$l \left(1 - \frac{x}{a} \right)$ einem eigentlichen Bruche zugehört, (Alg. 472.) und alſo verneint iſt, folglich im Integrale, da er mit — befindlich iſt, was bejahtes giebt.

Sucht man dieſen Logarithmen aus (220) und rechnet alles zuſammen, ſo wird der Körper =
$\frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} \ldots$

Man ſetze $a = 1$; und $x = 1$ für den ganzen Körper; weil dieſes Innhalt durch $- l (1 - 1)$ gegeben wird, ſo iſt er unendlich, und zwar bejaht, denn wenn x in $1 - x$ bis an 1 wächſt, ſo wächſt der Logarithme von $1 - x$ als eine verneinte Gröſſe unendlich.

Aber hier giebt die nur gefundene Reihe für den ganzen Innhalt des Körpers $\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \ldots$ welches alſo unendlich ſeyn muß. Joh. Bernoulli hat dieſes aus andern Gründen hergeleitet Op. T. IIII. n. 150. Prop. 3. Cor. 3.

613. Für den Körper, der aus Umdrehung der logarithmiſchen Linie BCDE 15 F. um ihre Aſymptote OA entſteht.

Hier iſt das Differential $= \pi a y d y$ (217) alſo das Integral $= \frac{\pi a y^2}{2}$ welches mit y verſchwindet, und alſo den unendlich langen Körper bedeutet, den die Fläche zwiſchen der nach der Seite O hinaus unendlich verlängerten Aſymptote und dem ihr zugehörigen Stücke der logarithmiſchen Linie beſchreibt. Nachdem dieſer unendlich lange Körper alſo von den Kreiſen begränzt wird, die AB oder PC beſchreiben, iſt ſein Innhalt $\frac{\pi a}{2}$ mit AB^2 oder mit PC^2 multiplicirt; das iſt halb ſo groß als ein Cylinder, deſſen Höhe a und der Halbmeſſer AB oder PC wäre. Das Stück des Körpers alſo zwiſchen dieſen beyden Kreiſen iſt $\frac{\pi a}{2} (PC^2 - AB^2)$

614. Zuſ. Unendlich lange Körper können, nach Verſchiedenheit der Umſtände, endlich (613) oder unendlich (612) ſeyn.

615. Die Hyperbel BMCD 14 F. (212) drehe ſich um die Aſymptote AE man ſucht den Innhalt des erzeugten Körpers.

I. Sein Differential iſt $\pi . x^{-2m} a^{2m+2} dx$ alſo das Integral $\frac{\pi x^{1-2m} . a^{2m+2}}{1 - 2m}$

II. Wenn m > ½; ſo verſchwindet dieſes Integral für x = ∞; alſo bedeutet es (wie 212) den unendlich langen Körper, der ſich von dem Kreiſe, den PM beſchreibt, nach DE hin erſtreckt. Dieſer iſt alſo $\frac{\pi a^{2m+2}}{AP^{2m-1}.(2m-1)}$ Iſt AG = a; ſo iſt dieſer Körper, von dem Kreiſe, den GC beſchreibt, an; $\frac{\pi a^3}{2m-1}$ alſo was zwiſchen den Kreiſen, die GC und PM beſchreiben, enthalten iſt, $\frac{\pi a^3}{2m-1} \cdot \frac{(x^{2m-1} - a^{2m-1})}{x^{2m-1}}$

III. Dieſes giebt für m = 1 oder die gemeine Hyperbel $\pi a^3 . \frac{(x - a)}{x} = \frac{\pi a^3 : GP}{AP}$, und den unendlich langen Körper $\frac{\pi a^4}{x}$

IIII. Das Stück zwiſchen den Kreiſen, die PM und die Aſymptote AF beſchreiben, iſt unendlich groß, weil das Integral für x = 0 unendlich wird. Man hat alſo hier zwey unendlich lange Stücken eines Körpers, von denen eines endlich, das andere unendlich iſt.

V. Wenn m = ½ iſt das Integral $\pi a^3 . l \frac{x}{a}$ und bedeutet den Körper, der zwiſchen den Kreiſen

ſen enthalten iſt die GC und PM beſchreiben, weil es für $x = a$ verſchwindet. Es wird ſo wohl für eine verſchwindende als für eine unendliche Abſciſſe unendlich, daß alſo hier beyde Stücken des Körpers, die ſich von dem Kreiſe, den GC beſchreibt, an, ins unendliche erſtrecken, unendlich ſind.

VI. Iſt $m < \frac{1}{2}$ ſo verſchwindet das Integral für $x = o$ und bedeutet alſo, was zwiſchen den Kreiſen enthalten iſt, welche die Aſymptote AF, und PM, beſchreiben. Dieſer Körper iſt endlich, ob er ſich gleich an der Aſymptote AF unendlich weit hinaus erſtreckt, aber für eine unendliche Abſciſſe wird er unendlich.

VII. Wäre $m = o$ ſo zeigte das Integral πaax einen Cylinder an, weil ſich die krumme Linie wegen der Gleichung $y = a$ in eine Parallele mit AE verwandelte.

VIII. Sollte ſich die krumme Linie um die Aſymptote AF drehen, ſo iſt $AP = y$; $PM = x$. Man kann ſich nähmlich durch M eine Parallele mit AE vorſtellen, die auf AF eine Abſciſſe $=$ PM abſchneiden, und ſelbſt die Ordinate $=$ AP ſeyn wird. So iſt $y^m = \frac{a^{m+1}}{x}$ alſo das Differential des Körpers wie $a^{(2m+2):m}$ $x^{-2:m} dx$ und das Integral wie $\frac{m}{m-2}$.

$a^{(2m+2):m} x^{(m-2):m}$ welches ſich, wenn $m > 2$ mit $x = 0$ oder von A anfängt; aber für $m < 2$ verneint iſt, und das Stücke, das ſich an der unendlichen Aſymptote AF her bis an die Parallele mit AE durch M erſtreckt, bedeutet; (wie 212) für $m = 2$ wird das Integral $a^3 . l \frac{x}{a}$ und fängt ſich an, wo $x = a$. Für die gemeine Hyperbel iſt es $- a^4 : x$.

616. Den Körper zu haben, den AMD 35 F. beſchreibt, indem ſich dieſe Figur um AC dreht, ziehe man den Körper, den AMP beſchreibt, von dem Cylinder ab, den APMD beſchreibt. Alſo iſt der gegenwärtig geſuchte Körper, $\pi . (y^2 x - \int y^2 dx)$.

In 611. wird er $\pi . \frac{2}{m+2} . y^2 x$ oder $\frac{m}{m+2}$ Theile des Cylinders.

Von den hufförmigen Abſchnitten cylindriſcher Körper.

617. Erkl. Ueber der Ebene, welche von der krummen Linie AGBF 36 F. begränzt wird, ſtehe ein priſmatiſcher Körper (Alg. 528) dieſer werde mit einer ebenen Fläche geſchnitten, welche die Grundfläche in FG unter einem Winkel, deſſen Tan-

Tangente g iſt, ſchneidet. Was von dem Cylindriſchen Körper zwiſchen der ſchneidenden Ebene, und der Grundfläche enthalten iſt, will ich hier den Abſchnitt nennen. Wegen der Aehnlichkeit, die es mit einem Hufe hat, iſt es auch vngula genannt worden.

618. Aufg. Des Abſchnittes körperlichen Innhalt zu finden.

Aufl. Der Schnitt der ſchneidenden Fläche mit der Fläche des cylindriſchen Körpers ſey IMHF. Man laſſe von einem willkührlichen Puncte deſſelben, das Loth MI auf die Grundfläche herab, das in des Körpers Fläche seyn wird, weil es ein ſenkrechter Körper iſt, folglich wird I in der krummen Linie AGBF ſeyn. Man ziehe IK mit GF parallel; K ſey ein anderer Durchſchnitt dieſer Parallele und der nur genannten krummen Linie. Auf die beyden Parallelen ziehe man AB und IQ ſenkrecht, ſo iſt MI = g. QI (G. 46 S. 7. Z. und 2 Erkl.) Die Parallelen werden von AB in N und P geſchnitten. Man nehme AB für die Abſciſſenlinie der Grundfläche an, und nenne dieſe Abſciſſen von einem willkührlichen Puncte E gerechnet, EP = u; Ferner ſey die gegebene EN = c; Weil nun wegen der gegebenen Grundfläche; die Ordinaten PI; KP; durch die ihnen zugehörige Abſciſſe EP gegeben ſind, ſo kann man KI = z als eine Function der Abſciſſe anſehen. Wenn man ſich über KI eine

Ebe-

Ebene auf die Grundfläche ſenkrecht vorſtellt, ſo beſtimmt ſolche ein veränderliches Stück des Abſchnittes; deſſelben Gränzen ſind, 1) dieſe Ebene, 2) ſo viel als von der ſchneidenden Ebene zwiſchen FG und ihren Durchſchnitt mit der nur genannten ſenkrechten Ebene fällt, 3) was von der Grundfläche zwiſchen FG und KI enthalten iſt; 4) Die Theile der Fläche des cylindriſchen Körpers, die ſich auf einer Seite von F auf der andern von G bis an die ſenkrechte Ebene erſtrecken.

Um das Differential von dieſem Stücke des Abſchnittes zu finden, darf man ſich nur vorſtellen, die ſenkrechte Ebene rücke mit einer ſich ſelbſt parallelen Bewegung etwas unendlich weniges weiter von FG; ſo wird die Grundfläche von ihr in einer Linie geſchnitten werden, die mit KI parallel, und unendlich wenig davon unterſchieden ſeyn wird. Beyde nur genannte Parallelen, werden auf der Grundfläche ein unendlich kleines Viereck = z d u zwiſchen ſich enthalten; Ueber dieſem Vierecke wird das geſuchte Differential ſtehn, das alſo als ein Priſma betrachtet, = MI. z d u ſeyn wird.

Nun iſt QI = u — c; alſo das geſuchte Differential g. (u — c) z d u; welches ſo integrirt, daß es für u = c verſchwindet; das veränderliche Stück des Abſchnittes giebt. Setzt man darinnen u = EB ſo hat man den ganzen Abſchnitt.

619.

619. Ex. Der Körper ſey ein Cylinder, alſo die Grundfläche ein Kreis. AB ſey ein Durchmeſſer, und E der Mittelpunct, r der Halbmeſſer, ſo iſt $z = 2\sqrt{(rr - uu)}$ und das Differential $= g.\, 2udu.\, \sqrt{(rr-uu)} - 2cg\sqrt{(rr - uu)}.\, du.$ Den erſten Theil zu integriren ſey

in 245; c; X; a; p
hier — g; uu; rr; $\frac{1}{2}$

ſo iſt dieſes erſten Theils Integral $-\frac{2}{3}g.$ $(rr - uu)^{3:2}$;

Den zweyten Theil drücke man ſo aus

$-2cgr^2.\sqrt{\left(1-\frac{u^2}{r^2}\right)}.\frac{du}{r}$; So iſt $\frac{u}{r}$ hier was in 274; x iſt, und das Integral dieſes zweyten Theils iſt $-2cgr^2.\,\frac{1}{4}.$

$$\left(2\,\mathfrak{B}\sin\frac{u}{r} + 2\frac{u}{r}\sqrt{\left(1-\frac{u^2}{r^2}\right)}\right)$$

Weil beyde Integrale, des erſten und des zweyten Theils zuſammen für $u = 0$ verſchwinden ſollen, ſo iſt

$$Const = +\frac{2}{3}g.\,(r^2 - c^2)^{\frac{3}{2}} + cgr^2.$$
$$\left[\mathfrak{B}\sin\frac{c}{r} + \frac{c}{r}.\sqrt{\left(1-\frac{c^2}{r^2}\right)}\right]$$

Dieſe Conſt und die veränderlichen Integrale zuſammen geben alſo das veränderliche Stück des Abſchnitts.

Will

Will man den ganzen haben, ſo ſetzt man $u = r$; da wird des erſten Theils veränderliches Integral $= 0$; und des zweyten ſeines

$$= -\frac{cgr^2\pi}{2}$$. Dieſes und die Conſt zuſammen gerechnet, geben den ganzen Abſchnitt

$$g.\left(\frac{1}{3}.(2r^2+c^2)\surd(r^2-c^2) - r^2c\,\mathfrak{B}\cos\frac{c}{r}\right)$$

620. Zuſ. Der Innhalt des Abſchnittes iſt allemahl durch die Quadratur des Kreiſes gegeben, auſer wenn $c = 0$ oder FG durch den Mittelpunct geht. Alsdenn iſt des Abſchnittes veränderliches Stück $= \frac{2}{3}g.(r^3 - (rr - uu)^{3:2})$ und der ganze Abſchnitt $\frac{2}{3}gr^3$.

621. Aufg. Die Fläche des Abſchnittes zu finden.

Aufl. Die veränderliche Fläche des Abſchnittes, welche von den krummen Linien GI; MI; und der geraden MI begränzt wird, hat zum Differential MI mit ds; dem Differentiale der krummen Linie GI multiplicirt, und iſt alſo $g.(u - c)\,ds$, ſo integrirt, daß es für $u = c$ verſchwindet. Setzt man in dieſem Ausdrucke $u =$ EB; ſo hat man die ganze Fläche, die zwiſchen die Bogen GB; GH; und die gerade Linie HB fällt, wenn H ſenkrecht über B iſt. Das andere Stück zwiſchen eben dieſer Linie und dem Bogen FB; FH; läßt ſich auf eben die Art finden. Es

wird

wird ſo groß als jenes ſeyn, wenn AB die Grundfläche in ähnliche und gleiche Hälften theilt, zu welcher Abſicht, die Grundfläche eine Linie der zweyten Ordnung und AB ihre Axe ſeyn kann.

622. Im gebrauchten Exempel iſt das Differential der Fläche $g.(u - c). \frac{r\,du}{\surd(rr - u^2)}$

$$= g\,r\,u\,du.(rr - u^2)^{-\frac{1}{2}} - g\,c\,r.\frac{du : r}{\surd(1 - uu : rr)}$$

Für des erſten Theils Integral iſt

in 245	c;	X;	a;	p
hier	$-\frac{1}{2}$ gr;	u^2;	rr;	$-\frac{1}{2}$

Des andern Theils Integral findet ſich aus (281); alſo iſt die veränderliche Fläche

$$\text{Conſt} - gr\surd(r^2 - u^2) - gcr.\mathfrak{B}\sin\frac{u}{r} \text{ und}$$

$$\text{Conſt} = gr\surd(r^2 - c^2) + gcr.\mathfrak{B}\sin\frac{c}{r}$$

Alſo die Fläche bis an HB $= gr.\left(\surd(r^2 - c^2) - c\,\mathfrak{B}\cos\frac{c}{r}\right)$

Die ganze Fläche des Abſchnittes wird noch einmahl ſo groß ſeyn.

623. Zuſ. Auch die Fläche beruhet alſo auf

der

der Quadratur des Kreiſes, auſer für $c = o$; da die ganze Fläche $2gr^2$ iſt.

624. Zuſ. Für dieſen beſondern Fall iſt der Abſchnitt $= \frac{1}{3}$ r mit ſeiner Fläche multiplicirt; alſo ſo groß als eine Pyramide, die ſeine Fläche zur Grundfläche, und den Halbmeſſer zur Höhe hatte.

625. Anm. Hertenſtein Miſc. Ber. Cont. I. p. 128. hat mit vieler Weitläuftigkeit, nur den Abſchnitt durch den Mittelpunct ſeinem körperlichen Innhalte nach, berechnet. Andere Exempel findet man bey der Agneſi; Inſt. Anal. L. III. §. 129. Kraft aber de vngulis cylindror. Comm. Ac Petrop. T. VI. hat die Sache am vollſtändigſten abgehandelt. S. auch: Soliditas & area ruſtrorum vulgarium reſector. a cylindris rectis quor. baſes ſunt ſectiones conicae etiam altior. generope calculi integral. inueſtigata a Ioſepho Stepling, S. I. Preſb. Dreſd. 1760.

Von Abſchnitten runder Körper.

626. Aufg. ADM 37 F. um die Axe AP gedreht, beſchreibt einen runden Körper; Man ſchneide ihn mit einer Ebene, welche auf die beſchreibende Ebene in einer gewiſſen Lage, dafür ich hier die vorgezeichnete Lage ADMP annehmen will, ſenkrecht iſt, und ſie in einer Linie DQ ſchneidet, die mit der Axe parallel iſt. Ich ſuche die Geſtalt des Schnittes.

Aufl. Man laſſe DS; MP; auf die Axe ſenkrecht,

recht, und Q ſey in MP; Nun heiſſe AS = c; DS = b; AP = c + z; PM = t; zwiſchen den beyden letzten iſt eine Gleichung gegeben. QC ſey der ſchneidenden Ebene Durchſchnitt mit der Ebene des Kreiſes, den PM bey der Herumdrehung beſchreibt, und C ſey in dem Umfange dieſes Kreiſes; Auf die Ebene dieſes Kreiſes iſt DQ ſenkrecht, weil ſie mit AP parallel iſt, (G. 46; S.) und folglich auch die Ebene DQC (G. 47 S.) daher iſt QP; als der Durchſchnitt der Ebenen des Kreiſes und APM, auf DQC ſenkrecht (G. 48. S.) und PQC = R = DQC. Man nehme nun DQ = z; QC = y für rechtwinklichte Coordinaten des Schnittes DC an; ſo iſt $CP^2 = PM^2 = t^2 = y^2 + b^2$; dieſen Werth von t alſo, in die gegebene Gleichung zwiſchen c + z und t geſetzt, bekömmt man eine Gleichung zwiſchen z und y. Auch läßt ſich eines von beyden, b oder c wegen der gegebenen Gleichung wegſchaffen.

627. Wenn AP die Linie ADM in ähnliche Hälften theilt, ſo enthält die Gleichung für ADM; nur Potenzen gerader Exponenten von t; und iſt alſo $\alpha t^2 + \beta t^4 \ldots = A + B(c + z) + C(c + z)^2 \ldots$

628. Man nehme zum Exempel die Kegelſchnitte; alſo

$$\begin{array}{l} tt = A + B.(c+z) + C.(c+z)^2 \\ bb = A + Bc \qquad\qquad + Ccc \\ \hline y^2 = (B + 2Cc).z + Cz^2 \end{array}$$

Soll $t = o$ für $c + z = o$ ſeyn, ſo iſt $A = o$. Wenn man nun dieſe Gleichungen mit dem gewöhnlichen Ausdrucke des Quadrats der Ordinate bey Kegelſchnitten $\beta x \mp \frac{\beta}{\alpha} x^2$ vergleicht, ſo iſt für die Linie ADM, $\beta = B$, und $\frac{\beta}{\alpha} = C$; oder der Parameter B; die Axe $\frac{B}{C}$ eben ſo für den Schnitt, der Parameter $B + 2Cc$ die Axe $\frac{B + 2Cc}{C}$; alſo hier der Schnitt der beſchreibenden Linie ähnlich. (Alg. 387) Wenn man alſo ähnliche Linien als ähnliche Vielecke von unzählich viel Seiten anſieht, ſo verhalten ſich die ganzen Flächen der beſchreibenden Linie und des Schnittes wie die Quadrate der Axen (G. 42 S. 23. Z) oder wie $B.B : (B + 2Cc)^2$.

629. Aufg. Den Abſchnitt des runden Körpers zu finden, der zwiſchen zwo parallelen Ebenen durch AP und DQ und der Ebene ADM die auf beyden ſenkrecht ſteht, enthalten iſt. Seine übrige Gränzen ſind, was von der krummen Fläche des Körpers,

und

und von der Ebene des Kreiſes, den PM beſchreibt, zwiſchen die genannten Ebenen fällt.

Aufl. Wenn man ſich eine Ebene mit DQC parallel, und unendlich nahe daran vorſtellt, ſo wird zwiſchen dieſer Ebene und DQC das Differential des Abſchnitts fallen, den man ſucht. Dieſes Differential iſt alſo ein Priſma, deſſen Grundfläche DQC und die Höhe db das Differential der Linie SD wäre. Dieſe Linie iſt nähmlich hier veränderlich, nachdem man den Punct D näher bey A oder weiter davon annimmt, den Abſchnitt zu verändern: Aber AP und folglich PM ſind jetzo unveränderlich, weil die Grundfläche des Abſchnittes, die Ebene, welche beym Herumdrehen von PM beſchrieben wird, unveränderlich bleiben ſoll.

Man quadrire alſo erſtlich die Fläche DQC aus der Gleichung zwiſchen z und y auf die gewöhnliche Weiſe. So wird man eine Function von t und b erhalten (627). Dieſe multiplicire man mit db und integrire ſie ſo, daß man t als unveränderlich, b als veränderlich anſieht, und das Integral für b = o verſchwindet. Dieſes wird der Innhalt des Abſchnittes ſeyn.

630. Ex. I. ADM ſey eine Parabel, wo in 627; A = o und tt = B. (c + z) alſo yy = Bz; ferner bb = B. c alſo die Fläche DQC =

$\frac{2}{3} zy$ (208) $= \frac{2y^3}{3B}$ wo $y^2 = \surd (tt - bb)$
folglich iſt das Differential des Abſchnittes

$\frac{2}{3B} \cdot (tt - bb)^{\frac{3}{2}} \cdot db$

II. Man vergleiche dieß mit (401) ſo iſt

	x	m	a	b	n	p
dorten	x	m	a	b	n	p
hier	b	o	t^2	-1	2	$\frac{1}{2}$

Alſo $\int (t^2 - b^2)^{\frac{3}{2}} . db = \frac{b.(t^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}}{4}$

$+ \frac{3t^2}{4} \int \surd (t^2 - b^2). db$

III. Nun iſt $\surd(t^2 - b^2) db = tdb. \surd \left(1 - \frac{b^2}{t^2}\right)$

IIII. Es ſey alſo was in (274) x heißt hier $\frac{b}{t}$

ſo iſt der dortige Bogen δ hier B ſin $\frac{b}{t}$; und

$\int \frac{db}{t} . \surd \left(1 - \frac{b^2}{t^2}\right) = \frac{1}{4} . (2\delta + \sin 2\delta)$

V. Folglich

$\int(t^2 - b^3)^{\frac{3}{2}} db = \frac{b.(t^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}}{4} + \frac{3}{16} . t^4 . (2\delta + \sin 2\delta)$

$= \frac{1}{4} t^2 . (bt. \cos \delta^3 + \frac{3}{4} t^2 . (2\delta + \sin 2\delta))$

wel-

welches mit $\frac{2}{3B}$ multiplicirt, den in (l) geſuchten Abſchnitt giebt.

VI. Für b = t; wird $\delta = \frac{1}{2}\pi$; das Integral in (V) $= \frac{1}{4} t^2 . \frac{1}{4} t^2 \pi$, alſo der geſuchte Abſchnitt $= \frac{\pi t^4}{8B} = \frac{\pi t^2 \ (c + z)}{8} = \frac{1}{4}$ des Sphäroids, das von AM beſchrieben wird. (610; VIII). Wenn man nähmlich b = t ſetzet, das iſt, D in M rücken läßt, ſo findet man den Theil des Sphäroids, den die Ebene AMP; und eine Ebene durch AP die auf vorige ſenkrecht ſteht, zwiſchen ſich enthalten.

630. Anm. Ich habe hier, nebſt der merkwürdigen Eigenſchaft der Schnitte (628) nur zeigen wollen, wie man die Formeln für die Integrirung irrationaler Differentiale braucht, auch in andern als vorhin betrachteten Fällen, die Differentiale der verlangten Gröſſen zu finden. Uebrigens ſind die Berechnungen des Innhalts und der Flächen anderer als runder und priſmatiſcher Körper, hier zu weitläuftig, und überhaupt auſer dem, was die gemeine Geometrie davon lehret, noch wenig unterſucht. So haben Varignon und Leibniz Miſc. Ber. Cont. 2. die Fläche des ſchiefen Kegels zuerſt zu finden gelehrt, welche Unterſuchung Euler Comm. Nou. Petrop. T. I. verbeſſert und allgemeiner gemacht hat.

Einige Exempel vom Gebrauche der Integralrechnung in der angewandten Mathematik.

I. Bey der kepleriſchen Theorie der Planeten Aſtr. 239. u. f.

1. Aufg. Die Elliptiſche Fläche CDMP 38 die zwiſchen der kleinen Axe CD und der Ordinate PM enthalten iſt, zu finden.

Aufl. I. Ihr Differential iſt aus Alg. 368; $du. \surd \left(\frac{1}{4} cc - \frac{ccuu}{aa}\right) = \frac{1}{2} c. du. \surd (1 - 4uu : aa)$; Nun ſey für eben die Abſciſſe CP $= u$ CENP der Abſchnitt eines Kreiſes, deſſen Halbmeſſer CK $=$ CA $= \frac{1}{2} a$: ſo iſt dieſes Abſchnittes Differential $= du. \surd \left(\frac{aa}{4} - uu\right)$ $= \frac{1}{2} a. du. \surd (1 - 4uu : aa)$. Wenn *alſo* E; C; Abſchnitte der Ellipſe und des Kreiſes bedeuten, die zu einerley Abſciſſe gehören, ſo iſt $dE = \frac{c}{a}. dC$; Alſo $E = \frac{c}{a}. C$ weil beyde zugleich verſchwinden. Nun iſt (man ſ. 274) $C = \frac{1}{8} aa. \mathfrak{B} \sin \frac{2u}{a} + \frac{u \surd (\frac{1}{4} aa - uu)}{2}$; daß alſo die unbeſtimmte Quadratur der Ellipſe

durch

durch die unbeſtimmte Quadratur des Kreiſes gegeben iſt. Nähmlich

$$E = \frac{1}{8} ca \mathfrak{B} \sin \frac{2u}{a} + \frac{cu \surd (\frac{1}{4} aa - uu)}{2a}$$

II. Für $u = \frac{1}{2} a$ wird der elliptiſche Quadrant $= \frac{ac\pi}{16}$; alſo die Fläche der ganzen Ellipſe $= \frac{ac\pi}{4}$ = der Fläche eines Kreiſes, deſſen Durchmeſſer die mittlere Proportionallinie zwiſchen beyden Axen iſt.

III. Weil $\Delta PMS : \Delta PNS = PM : PN = c : a$ und $KDMP = \frac{c}{a} . KENP$ ſo iſt der elliptiſche Abſchnitt $KSM = \frac{c}{a}$ des Abſchnittes aus dem Kreiſe KSN, wo auch S in der Axe liegt; Eben ſo die Ausſchnitte $ASM : ASN = c : a$.

2. Aufg. Aus der Fläche ASM die ein Planet in einer gegebenen Zeit um die Sonne beſchrieben hat, den Parameter ſeiner Bahn zu finden.

Aufl. I. Man ſetze der Erden mittlere Weite von der Sonne oder die halbe Axe der Erdbahn, = 100000 und drücke nach dieſem Maaſſe alle Längen aus. Die Flächen werden durch Quadrate dieſer Theile gemeſſen; So ſey Z die be-

ſchriebene Fläche und k der halbe Parameter, wo $c = \sqrt{2ak}$. Die Zeit = T werde durch mittlere Sonnentage (Aſtr. 98.) und Decimaltheile derſelben gegeben. In der periodiſchen Zeit P, wird die Fläche der ganzen Planetenbahn $\frac{a\sqrt{2ak}}{4} . \pi$ beſchrieben (λ; II) Die halbe Axe der Erdbahn = 100000 heiſſe h; und die Umlaufszeit der Erde, das ſideriſche Jahr (Aſtr. 249.) das ich hier 365 Tage 6 St. 8 M. 30 S. = 365, 256 Tage annehme, heiſſe B; ſo iſt

$$T : P = Z : \frac{a\sqrt{2ak}}{4} . \pi \quad \text{(Aſtr. 239)}$$

$$P : B = a\sqrt{a} : 2h\sqrt{2h} \quad \text{(Aſtr. 256)}$$

$$T : B = Z : \pi . \sqrt{k} . h\sqrt{h}$$

alſo $\frac{Z =}{T\sqrt{k}} \; \frac{\pi h \sqrt{h}}{B}$. Dieſer Quotient bleibt für alle Planetenbahnen einerley, weil h, B, für alle einerley ſind; er mag m heiſſen; Er iſt 271989, 735. Sein Logarithme iſt log $\pi + \frac{3}{2} . 5 - \log 60. 876. 6.$ Hier findet man aus 343; 345; 346; den briggiſchen Logarithmen von $\pi = 0, 4971498727$ alſo

$l\,m = 5, 4345525139$

II. Nachdem man alſo m gefunden hat, iſt der Parameter $2k = \frac{2ZZ}{mmTT}$ weil $\frac{Z}{T\sqrt{k}} = m$

III.

III. Umgekehrt, wenn er gegeben iſt, die Zeit

$$T = \frac{Z}{m \sqrt{k}}$$

IIII. Und die Fläche $Z = m\,T\,\sqrt{k}$.

3. Aufg. Bey einem Kegelſchnitte, iſt die Weite des Brennpuncts vom nächſten Scheitel AS = e 38 F. und der Parameter b = 2. SB (358.) Man ſoll daraus die groſſe Axe a finden.

Aufl. Wenn die obern Zeichen für die Ellipſe, die untern für die Hyperbel gelten, ſo iſt (Alg. 362. 389.) $SB^2 = be \mp \frac{b}{a}\,ee$ alſo $\frac{\pm bee}{be - SB^2}$

oder $a = \frac{\pm 4ee}{4e - b}$ (Alg. 358)

4. Aufg. Die Länge SM zu finden.

Aufl. Wenn AP = x; ſo iſt $PM^2 = bx \mp \frac{b.\,(4e - b)}{\pm 4ee}.\,x^2$ (3) $= bx - \frac{(4be - bb)\,x^2}{4ee}$; dazu das Quadrat von SP oder x — e addirt, giebt das Quadrat von SM $= ee + (b - 2e)\,x + \frac{(b - 2e)^2}{4ee}\,xx$ oder

$$SM = e + \frac{b - 2e}{2e}.\,x$$

5. Aufg. Eine Vergleichung zwiſchen der Weite SM = y und dem Winkel ASM = v. (der wahren Anomalie (Aſtr. 245.)) zu finden.

Aufl. PS = — y. coſ v (Trig. 3. Erkl. 3. Zuſ.) alſo x = e — y. coſ v; folglich aus 629;

$y = e + \frac{b - 2e}{2e} . (e - y. \cos v)$ daher coſ v

$= \frac{e. (\frac{1}{2} b - y)}{y. (\frac{1}{2} b - e}$ und $y = \frac{\frac{1}{2} eb}{e + (\frac{1}{2} b - e). \cos v}$

Wenn man y durch die groſſe Axe, und die Weite des Brennpuncts vom Mittelpuncte ausdrucken will, ſo verfährt man folgendergeſtalt

Die Weite des Brennpuncts vom Mittelpuncte heiſſe = f; ſo iſt $e = \frac{1}{2} a - f = \frac{a - 2f}{2}$

Ferner $4f^2 = a^2 - c^2$ (Alg. 376) $= a^2 - ab$ (Alg. 366) alſo $b = \frac{a^2 - 4f^2}{a} = \frac{(a+2f)}{a} .(a-2f)$

Folglich $\frac{1}{2} eb = \frac{a - 2f}{4} . (a - 2f). \frac{a + 2f}{a}$

$\frac{1}{2} b - e = \frac{1}{2} a - \frac{2f^2}{a} - \frac{1}{2} a + f = \frac{f. (a - 2f)}{a}$

Daher $y = \frac{(a - 2f)^2 . (a + 2f)}{4a. \left(\frac{a - 2f}{2} + \frac{f. (a - 2f)}{a} . \cos v\right)}$

=

$$= \frac{(a - 2f).(a + 2f)}{2a + 4f.\cos v} = \frac{a^2 - 4f^2}{2.(a + 2f.\cos v)}$$

Es ſey $\frac{2f}{a} = \lambda$ alſo $2f = a.\lambda$ ſo iſt

$$y = \frac{a^2 - a^2\lambda^2}{2a + 2a\lambda.\cos v} = \frac{a - a\lambda^2}{2 + 2\lambda.\cos v}$$

$$= a.\frac{1 - \lambda^2}{2.(1 + \lambda.\cos v)} = \frac{1}{2}a.\frac{1 - \lambda^2}{1 + \lambda.\cos v}$$

So ſteht die Formel beym Melander Abh. der Kön. Schw. Ak. d. W. 1766. 2. Quart. 4. Abh. gegen das Ende, ſein M iſt mein $\frac{1}{2}$ a, und ſtatt v nimmt er den Winkel von der Sonnenferne $\gamma = 2R - v$ daher ſein $\cos \gamma = -\cos v$

6. Zuſ. Für ASM = 180° iſt $\cos v = -1$ alſo y für die Sonnenferne (Aſtr. 235) = $\frac{\frac{1}{2}eb}{2e - \frac{1}{2}b}$; dazu die Sonnennähe AS (Aſtr. 235) = e addirt giebt die Axe (Aſtr. 235) wie (3) und den Abſtand des Brennpunctes vom Mittelpuncte $\pm \frac{e.(b - 2e)}{4e - b}$, als die Eccentricität (Aſtr. 235.)

7. Zuſ. Der Ausdruck $+ \frac{4ee}{4e - b}$ (3) iſt bejaht, unendlich oder verneint, nachdem 4e gröſſer, ſo groß oder kleiner als b iſt, nach dieſen Umſtänden iſt alſo die krumme Linie eine Ellipſe, Pa-

Parabel oder Hyperbel (Alg. 384; 391.) Wenn $b = 2e$ ſo iſt ſie ein Kreis (6) deſſen Halbmeſſer $= e$.

8. Zuſ. Für $b < 2e$ iſt $\frac{\frac{1}{2}b}{2e - \frac{1}{2}b}$ kleiner als $\frac{\frac{1}{2}b}{b - \frac{1}{2}b}$ das iſt, kleiner als 1; folglich (6) das y für ASM = 180 Gr. kleiner als e. Dieſes y giebt alsdenn die Sonnennähe und e iſt die Sonnenferne, die Linie aber eine Ellipſe (7)

9. Aufg. Wenn die krumme Linie AM gegeben iſt, aus dem Winkel ASM = v, die Fläche ASM = Z; aus der wahren Anomalie die mittlere (Aſtr. 245) zu finden.

Aufl. I. Sm ſey der SM unendlich nahe und MR ein Bogen mit SM, = ydv ſo iſt, wie An. Un. (505)

$$dZ = \frac{yydv}{2} = \frac{1}{8}.\frac{eebbdv}{(e+(\frac{1}{2}b-e).\cos v)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{eekkdv}{(e.(k-e).\cos v)^2}$$ wenn $k = BS = \frac{1}{2}b$.

Um dieſes zu integriren, muß man dv durch das Differential der Linie, die v beſtimmt, ausdrükken. Der Coſinus iſt dazu nicht bequem, weil man alsdenn zugleich nebſt ihm den Sinus in das Differential bekäme. An. Un. (281). Man verſuche es alſo mit des Winkels v Tangente T; Hier iſt erſtlich $\cos v = 1 : \sqrt{(1 + TT)}$ und

dv

$dv = \frac{dT}{1 + TT}$ (299) und $dZ =$

$\frac{\frac{1}{2} eekkdT}{(e \surd (1 + TT) + k - e)^2}$ wo die Irrational-
gröſſe noch beſchwerlich iſt. Setzte man aber in Trig. 19. S. 3. Z. das dortige $y = t$; oder wäre t die Tangente von $\frac{1}{2} v$; ſo käme

$T = \frac{2t}{1 - tt}$; $\surd (1 + TT) = \frac{1 + tt}{1 - tt}$

$dT = \frac{2dt. (1 + t)}{(1 - tt)^2}$;

$dZ = \frac{ee. kkdt. (1 + tt)}{(k + (2e - k) tt)^2}$

II. Nun iſt $k + (2e - k) tt = (\surd k + t \surd (k - 2e)). (\surd k - t \surd (k - 2e))$ dafür ich $(f + gt). (f - gt)$ ſchreibe: alſo iſt

$\frac{dZ}{ee kk} = \frac{dt. (1 + tt)}{(f + gt)^2 (f - gt)^2}$

III. Den Bruch der in II; in dt multiplicirt iſt, habe ich in der An. Un. 367. Zweytes Exempel zerlegt, und hier kann die Integration ſo vollführt werden.

Es ſey $A = \frac{1 + \lambda^2}{4 \lambda^2}$; $B = \frac{1 - \lambda^2}{4 \lambda^3}$ So zerlegt

ſich $\frac{(1 + t^2) dt}{(\lambda - t)^2. (\lambda + t)^2}$ in folgende Differentiale

Adt

$$\frac{A\,dt}{(\lambda - t)^2} + \frac{A\,dt}{(\lambda + t)^2} + \frac{B\,dt}{\lambda - t} + \frac{B\,dt}{\lambda + t}$$

Die Integrale davon ſind

$$A. \left(\frac{1}{\lambda - t} - \frac{1}{\lambda + t}\right) - B. \log \frac{\lambda + t}{\lambda - t}$$

Das algebraiſche wird A. $\frac{2t}{\lambda^2 - t^2}$. In dieſen beyden Integralen, muß man $\frac{f}{g}$ ſtatt λ ſetzen, und jedes mit g^4 dividiren, ſo hat man die Integration die in (II) geſucht wird

IIII. Nähmlich

$$\frac{Z}{eekkk} = \frac{g^2 + f^2}{2ffgg} \cdot \frac{t}{ff - ggtt}$$

$$+ \frac{g^2 - f^2}{4f^3 g^3} \cdot \log \frac{f + gt}{f - gt}$$

V. Wenn man ſtatt f und g ihre Werthe aus (II) ſetzt, ſo kömmt

$$Z = \frac{e^3 k}{2.(k - 2e)\sqrt{(kk - 2ek)}} . l \frac{f - gt}{f + gt}$$

$$- \frac{eek.(k - e).t}{(2e - k).(k + (2e - k)tt)}.$$

VI. Wenn k = e oder die krumme Linie ein Kreis iſt, (7) ſo fällt das algebraiſche Integral weg,

weg, und es iſt $Z = \frac{ee}{-2\sqrt{-1}} . l \frac{f - gt}{f + gt}$

oder, weil $\frac{f - gt}{f + gt} = \frac{1 - t. g : f}{1 + t. g : f}$

$= \frac{1 - t\sqrt{-1}}{1 + t\sqrt{-1}}$ ſo iſt $Z = ee. \frac{\sqrt{-1}}{2}.$

$l \frac{1 - t\sqrt{-1}}{1 + t\sqrt{-1}} = ee.$ Bog tang t aus 323; wenn das dortige e; q; hier 1; t; ſind. Alſo $Z = ee. \frac{1}{2} v.$

VII. Für die Hyperbel, wo $2e \lessgtr k$ (7) kann der Werth von Z ſo wie er V gefunden worden, beybehalten werden; aber für die Ellipſe kommen in den logarithmiſchen Theil unmögliche Gröſſen; Man ſetze $k - 2e = -h$; ſo verwandelt er ſich in $\frac{e^3 k}{-2h\sqrt{hk}. \sqrt{-1}} . l \frac{1 - \sqrt{-1}. t\sqrt{(h:k)}}{1 + \sqrt{-1}. t\sqrt{(h:k)}}$

$= \frac{e^3 \sqrt{k}}{(2e - k)^{3:2}}.$ B. tang t. $\sqrt{\frac{2e - k}{k}}$

Es iſt aber B tang t $\sqrt{\frac{2e - k}{k}}$ = B ſin t

$\sqrt{\frac{2e - k}{k + (2e - k)tt}} = \frac{1}{2}$ B ſin $\frac{2t\sqrt{(2ek - kk)}}{k + (2e - k)tt}$ (Trig. 10 S. 1 Z.) Daraus kömmt

Z =

$$Z = \frac{e^3 \sqrt{k}}{2.(2e-k)^{3:2}} \cdot \left(\mathfrak{B} \sin \frac{2t\sqrt{(2ek-kk)}}{k+(2e-k)tt} \right.$$

$$\left. - \frac{(k-e)}{e} \cdot \frac{2t\sqrt{(2ek-kk)}}{k+(2e-k)tt} \right)$$

VIII. Für die Parabel, werden beyde Theile des Werthes von Z unendlich (V) daß alſo ihr Unterſchied wohl endlich ſeyn kann. Hier iſt nähmlich g = o und die Zerlegung des Bruches (III) findet nicht ſtatt. Dagegen iſt (II)

$$\frac{dZ}{4e^4} = \frac{dt.(1+tt)}{4ee}; \text{ oder } Z = ee\left(t + \tfrac{1}{3}t^3\right)$$

VIIII. Wenn man einen Winkel w von der Gröſſe ſucht, daß $\tang \frac{1}{2} w = t.\sqrt{\frac{2e-k}{k}}$

ſo iſt bey der Ellipſe (VII) $Z = \frac{e^3 \sqrt{k}}{2.(2e-k)^{3:2}}.$

$$\left(w - \frac{(k-e)}{e} . \sin w \right)$$

X. Und die Zeit (627; III) $T = \frac{e^3}{2m.(2e-k)^{3:2}}.$

$$\left(w - \frac{k-e}{e} . \sin w \right)$$

10. Aufg. Umgekehrt (9) aus der Zeit, die wahre Anomalie, und die Weite von der Sonne zu finden.

Aufl.

Aufl. Hier muß aus (9); X; w gefunden werden: Es iſt aber $\frac{w - (k - e)}{e}$. ſin w = $\frac{2m. (2e - k)^{3:2}}{e^2}$. T. Was zur rechten Hand ſteht, verwandele man in Secunden eines Kreis-bogens, folgendergeſtalt: Weil die halbe Peri-pherie 180. 60. 60 Secunden hält, ſo iſt, wenn u die Menge von Secunden in dieſem Bogen be-deutet: $\frac{\pi : 2m. (2e - k)^{3:2}}{e^3}$. T = 180. 60. 60 : u

Nun iſt l 180. 3600 = 5, 8115750
$l\pi$ = 0, 4971498 (2; I)

5, 3144252

Dieſer Logarithme alſo, oder 5, 314425132 wel-ches ſeine Gröſſe genauer iſt, wenn man nähm-lich Logarithmen braucht, die in mehr Decimalfi-guren berechnet ſind, muß zum Logarithmen von $\frac{2m. (2e - k)^{3:2}}{e^3}$. T addirt werden, den Loga-rithmen von u zu haben. Oder man kann auch zu Erhaltung dieſer Abſicht l2m + l 180. 60. 60 — $l\pi$ = 11, 0500076428 zum Logarithmen von $\frac{(2e - k)^{3:2}}{e^3}$. T addiren. So findet man aus der gegebenen Zeit, auch ohne aſtronomiſche Ta-

 feln,

ſeln, den Winkel u, die mittlere Anomalie. (Aſtr. 245.)

II. Alſo muß man in der Gleichung $u = w - \frac{(k - e)}{e}$ ſin w; den Winkel w in Secunden finden, wie u darinnen gegeben iſt. Es muß aber w mehr Secunden enthalten als u, ſo lange w unter 180 Gr. iſt, denn da wird etwas von w abgezogen um u zu bekommen (Trig. 2 Erkl. 8 Z.)

III. Hier muß man die Menge von Secunden finden, die einem Bogen zugehört, deſſen Länge $\frac{(k - e)}{e}$ ſin w für den Halbmeſſer = 1 iſt. Dieſes durch Logarithmen zu bewerkſtelligen, erinnere man ſich, daß die Logarithmen der Sinuſſe der Tafeln für den Halbmeſſer 10000 Millionen berechnet ſind, und alſo jeder ſolcher Logarithmen in den Logarithmen des Sinus, der eben dem Winkel zugehört, aber 1 zum Halbmeſſer hat, verwandelt wird, wenn man von ihm 10 abzieht. Wenn alſo ſin tab w den Sinus eines Winkels von w Secunden bedeutet, wie er in den Tafeln ſteht, ſo iſt ſin tab w — 10 der Logarithme des Sinus, für eben den Winkel, aber den Halbmeſſer = 1 geſetzt, oder der Logarithme von ſin w weil man in den Integrationen, von welchen dieſe Gleichungen herrühren, allemahl den Halbmeſ-

ſer

ſer = 1 ſetzt. Da nun $\pi : \frac{k-e}{e} \sin w = 180 \,.\, 60 \,.\, 60 : w$; ſo iſt $l\, w = l\, \frac{180 \,.\, 60 \,.\, 60}{\pi} + l\, \frac{k-e}{e} + l \sin \text{tab}\, w - 10 = l\, \frac{k-e}{e} + l \sin \text{tab}\, w - Q$ wo $Q = 10 - 5{,}3144251332$ $(l) = 4{,}6855748668$.

IIII. Aus Alg. 376; iſt $k = \frac{2e.\,(a-e)}{a}$; alſo $\frac{k-e}{e} = \frac{a-2e}{a}$ allemahl ein eigentlicher Bruch.

V. Wenn γ ein Bogen für den Halbmeſſer 1; ſo iſt das Differential von $\gamma - n.\, \sin \gamma = d\gamma.\, (1 - n.\, \cos \gamma)$ alſo für ein bejahtes $d\gamma$ allemahl bejaht, wenn $n < 1$. Das heißt, für $n < 1$ wächſt der Unterſchied $\gamma - n.\, \sin \gamma$ mit dem Bogen γ.

VI. Nachdem man alſo in der Gleichung $u = w - \frac{k-e}{e}.\, \sin w$, ſtatt des wahren w etwas gröſſers oder kleiners ſetzt, ſo kömmt $w - \frac{k-e}{e}.\, \sin w$ gröſſer oder kleiner als u (V; IIII.)

VII. Hieraus wird begreiflich, wie ſich die Aufgabe durch Verſuche auflöſen läßt. Man neh-

nehme einen Winkel in Secunden ϱ nach Gefallen und mache $\varrho - \frac{(k-e).\sin\varrho}{e}$ nach (III) iſt dieſes mehr als u ſo iſt ϱ zu groß, iſt es weniger, zu klein.

VIII. Man ſetze ρ ſey beynahe ſo groß als w, welches die Probe ob es ſtatt w geſetzt beynahe u giebt, leicht zeigt. Um nun w völlig zu haben, ſey $w = \varrho + z$ ſo wird z ein ſehr kleiner Bogen ſeyn, den man ohne merklichen Irrthum mit ſeinem Sinus für einerley, und ſeinen Coſinus = 1 annehmen darf. So wird aus Trig. 19 S. II; $\sin w = \sin(\varrho + z) = \sin\varrho + z.\cos\rho$; Dieſe Werthe verwandeln die Gleichung (II) in $u = \varrho + z - \frac{(k-e)}{e}.(\sin\rho + z.\cos\rho)$ daraus findet man $z = \frac{u - \rho + \sin\varrho\,(k-e):e}{1 - \cos\varrho.\,(k-e):e}$ In dieſes Bruches Zähler muß $\sin\rho.\,(k-e):e$ wie im ähnlichen Falle geſchehen iſt (III) in einen Winkel verwandelt werden. Der Zähler aber iſt eine Zahl, und wenn des Winkels ρ Coſinus aus den gewöhnlichen Tafeln genommen wird, muß man ihn, mit 10000000 dividiren, von ſeinem Logarithmen aber 10 abziehen. So findet man den Winkel z der zu ρ addirt w ſehr genau giebt, wenn ϱ dem wahren w ziemlich nahe genommen iſt: Wäre aber ϱ von dieſem Werthe etwas weit un-

unterſchieden angenommen, ſo würde ihm $\rho + z$ näher kommen, und nun damit das gemacht werden, was man mit ρ machte; ſo würde man ſich der Wahrheit wenigſtens durch Wiederhohlung dieſer Arbeiten nähern.

VIIII. Hat man alſo w; ſo findet man aus

(9; XII.) $\mathrm{tang}\ \tfrac{1}{2}\ v = \sqrt{\dfrac{k}{2e - k}} \cdot \mathrm{tang}\ \tfrac{1}{2}\ w.$

Dieſes alſo giebt die geſuchte wahre Anomalie v; und die ihr zugehörige Weite (630).

X. Aus IIII erhellt, daß $\dfrac{k - e}{e}$ = der doppelten Eccentricität (Aſtr. 235) mit der Axe, das iſt, der einfachen mit der halben Axe, dividirt; woraus man ſieht, wie dieſer Quotient bey einem gegebenen Planeten zu finden iſt.

11. Exempel. I. Für die Erdbahn ſey die Eccentricität = 1691 wenn die Axe = 100000; welches von (Aſtr. 233) nicht weit abweicht. Man verlangt die wahre Anomalie, für die mittlere u = 150 Grad = 150. 60. 60. Secunden. Alſo ſoll 150. 60. 60 = w — 0, 01691. ſin w ſeyn (10; I; IIII.)

II) Alſo iſt nach (10; VII.), $\dfrac{k - e}{e}$. ſin ϱ in Secunden zu verwandeln folgendes nöthig; der Logarithme dieſer Zahl von Secunden iſt = lo, 01691 + l tab ſin ρ — Q = l tab ſin ρ —

 (Q

(Q + l 1691 — 5) Die letztere abzuziehende Zahl bleibt alſo allemahl 6, 4574312 = R.

III. Nun nehme man zu einem Verſuche ρ = 151° 30′ ſo iſt

l tab ſin ρ = 9, 6786629
R = 6, 4574312

S = 3, 2212317

Hier gehört S zu 1664 Sec. = 27 M. 44 Sec. Alſo käme ρ = 151 Gr. 30 M.

$\frac{k - e}{e}$. ſin ϱ = 27 44 Sec. / 151 Gr. 2 M. 16 S.

IIII. Da dieſes mehr als 150 Gr. beträgt, ſo hat man ρ zu groß angenommen. Ueberhaupt erhellt, daß w nur was weniges gröſſer als u ſeyn muß, weil 0, 01691. ſin w nur was geringes ſeyn kann. Der Logarithme dieſer Gröſſe wäre 10 — R wenn w = 90 Gr. und alſo l ſin tab w = 10 wäre; Er iſt daher allemahl kleiner als 10 — R oder als 4 folglich die Zahl von Secunden nicht 10000 d. i. noch lange nicht 3 Grade; und folglich noch viel kleiner, wenn u und daher w von einem rechten Winkel weit unterſchieden ſind.

V. Ein ähnliches Verfahren giebt für

ϱ = 150 Gr. 30 M.		150 Gr. 28 M. 12 S.
u = 150 1 33 S.		149 59 33

VI. Man nehme alſo ϱ = 150 Gr. 28 M. 12 S; und ſuche z (10; VIII) ſo hat man den Zäh-

ler

ler = 27 S. Für den Nenner iſt coſ ϱ. = 0, 01691 = — 0, 8700977. 0, 01691. Daher der Nenner 1, 0147 und z = 26 S. alſo ϱ + z 150 Gr. 28 M. 38 S. = 180 Gr. — (29 Gr. 31 M. 22 S.)

VII. Will man verſuchen, ob ſich w noch genauer finden läßt, ſo nehme man ϱ = 150 Gr. 28 M. 38 S; Da muß man nun erſtlich den Logarithmen des Sinus ſuchen. Er fällt zwiſchen den Sinus von 29 Gr. 31 M. 12 S. und 48 S. welche beyde man in Gellibrands Tafeln (Trigonometria Britannica) findet. Der Unterſchied zwiſchen ihnen iſt bis auf die 7 Decimalfigur 1384; Weil nun der Unterſchied der Bogen in den Tafeln = 36 S. und zwiſchen ϱ und dem kleinen 10 S. iſt, ſo ſchließt man 36: 10 = 1384: 372; das letztere zum log ſin 29 Gr. 31 M. 12 S. addirt giebt

$$\begin{array}{r} \log \sin 29 \text{ Gr. } 31 \text{ M. } 22 \text{ S.} = 9,\ 6926438 \\ R = 6,\ 4574312 \\ \hline S = 3,\ 2352126 \end{array}$$

alſo iſt $\frac{k - e}{e}$. ſin ϱ = 1719 S. = 28 M. 39 S; folglich $\rho - \frac{k - e}{e}$. ſin ϱ = 150 Gr. — 1 S.

Wollte man alſo hieraus z ſuchen, ſo könnte man ohne merklichen Irrthum coſ ρ = — coſ 29 Gr.

31 M. 12 S. annehmen, und bekâme $z = \frac{1\ S.}{1{,}091..}$
$= 0{,}9$ S. alſo $w = 150$ Gr. 28 M. 38,9 S.
$\frac{1}{2} w = 75$ 14 19,4

VIII. Hieraus v zu finden, ſuche man erſtlich $\frac{k}{2e - k}$ (10; VIIII) weil nåhmlich $\frac{k - e}{e}$ $= 0{,}01691$ (I) ſo iſt $k = 1{,}01691\, e$ Dieſes giebt $\frac{k}{2e - k} = \frac{1{,}01691}{0{,}98309}$ weil nun 101691 = 33897 · 3 ſo findet man aus grôſſern logarithmiſchen Tafeln.

$$\begin{array}{rl} l\ 33897 = & 4{,}5301612 \\ l\ 3 \quad = & 0{,}4771212 \\ \hline & 5{,}0072824 \\ l\ 98309 = & 4{,}9925932 \\ \hline & 0{,}0149892 \end{array}$$

$$l \sqrt{\frac{k}{2e - k}} = 0{,}0073441$$

$$\begin{array}{rl} l \tan \tfrac{1}{2} w = & 10{,}5792383 \\ \hline l \tan \tfrac{1}{2} v = & 10{,}5865824 \\ l \tan 75\ \text{Gr. } 28\ \text{M. } 12\ \text{S.} = & 10{,}5864047 \\ \hline & 1777 \end{array}$$

weil nun l tang 75 Gr. 28 M. 48 S. — l tang 75 Gr. 28 M. 12 S. = 3122 ſo ſchlieſſe ich 3122 : 1777 = 36 : 27 alſo $\frac{1}{2} v = 75$ Gr. 28 M. (12 + 27) S. oder

v =

v = 150 Gr. 57 M. 18 S.

180 Gr. — (29 G. 2 M. 42 S.)

VIIII. Dieſe Aufgabe methodiſch aufzulöſen, hatte Kepler den Sternkündigern empfohlen, weil zu ſeiner Zeit die nöthigen Gründe dieſer Berechnungen noch nicht entdeckt waren. Die Bemühungen, welche dieſerwegen angewandt worden, findet man beym Gregorius El. Aſtr. L. III. Keil Aſtr. ver. Lect. 23. Hermann de problemate Kepleriano Comm. Ac. Imp Petrop. T. I. u. a. Gegenwärtiges alles iſt aus Herrn Eulers Theoria motuum cometar. & planetar genommen. Das Exempel haben Keil und Hermann, jeder nach ſeiner von gegenwärtiger unterſchiedener Methode berechnet. Sie nennen die wahre Anomalie, was bey mir 180 Gr. — v iſt, weil ſie ſolche von der Sonnenferne rechnen, und finden ſie, jener 29 Gr. 2 M. 54 S. dieſer 29 Gr. 3 M. 7 S. daher es nicht anſtößig ſeyn wird, daß meine Rechnung etwas giebt, das von Keils ſeiner gerade ſo weit abgeht als Hermanns ſeine.

II. Den Schwerpunct zu finden.

zu Stat. 49.

1. Aufg. Den Mittelpunct der Schwere F; 39 F. bey einer ebenen Figur zu finden, deren Geſtalt BMANG gegeben iſt.

Aufl. Das Gewicht dieſer Figur iſt ihrer Gröſſe proportionirt, (Stat. 38) wenn alſo MN $= z$; $CP = x$ ſo iſt das Gewicht $= \int z\,dx$ (206) ſo genommen, daß es für $x = CA = e$ verſchwindet. Wenn man ſie alſo als eine Laſt betrachtet, die ſich an dem Arme eines Hebels CF, befände, ſo wäre ihr Moment CF. $\int z dx$ weil jede Maſſe, was ſie auch für eine Geſtalt hat, den Hebel ſo drehet als wäre ihre ganze Laſt in F beyſammen (Stat. 48). Aber das Moment des Elements MNnm iſt $= xz dx$ um ſo viel muß ſich das Moment der Figur verändern, wenn ſich ihre Gröſſe um das Element verändert. Folglich iſt $xz dx$ das Differential des Moments der Figur, oder $\int xz dx$ iſt das Moment der Figur; wo man $\int xz dx$ ſo nehmen muß, daß es für $x = e$ verſchwindet, weil das Moment einer anfangenden Figur ohne Zweifel $= o$ iſt. Alſo iſt

$$\int xz dx = CF. \int z dx \text{ oder } \frac{\int xz dx}{\int z dx} = CF.$$

So iſt die Weite des Schwerpunctes, von einer willkührlich gezogenen Axe CD gegeben. Weiß man alſo eine Linie CF in der er ſich befindet, ſo hat man ihn nun völlig beſtimmt. Weiß man aber keine ſolche Linie, ſo ſuche man erſtlich ſeine Weite von CD; alsdenn ziehe man DE auf CD ſenkrecht, und ziehe Ordinaten mit DE parallel, heiſſen dieſelben nun z, und ihre Weiten von DE; x; ſo findet man auf eben die Art des Schwerpunctes Weite von DE; Er muß ſich alſo in dem Durchſchnitte zweyer Perpendikel auf DC und DE befinden.

2. Wenn AP die Axe der halben Parabel 35 F. iſt, und derſelben Schwerpunct F geſucht wird, ſo ſey FS mit der Axe der Parabel, FT mit AD parallel, alſo $e = o$ und $z^2 = bx$ und $SF = \frac{\int zxdx}{\int zdx} = \frac{3}{5}x$; Nun ſehe man das Element Pm als ein Gewicht an der Axe AP an; ſo iſt der Abſtand ſeines Schwerpunctes von dieſer Axe $= \frac{1}{2}z$ alſo ſein Moment $= \frac{1}{2}zzdx$ und alſo die Summe dieſer Momente mit der ganzen Fläche der Parabel dividirt oder $TF = \frac{7}{8}y$. Wenn man alſo mit AD und AP Parallelen in den Weiten $\frac{3}{5}$ AP und $\frac{3}{8}$ PM zieht, ſo giebt ihr Durchſchnitt den Schwerpunct F des Stückes APM.

3. Ein Dreyeck BGA 40 F. deſſen Grundlinie $BG = g$; Höhe $CK = f$; wo $e = o$; hat ſeinen

nen Schwerpunct in der Linie AS welche die Grundlinie halbirt. Denn man ziehe MN; mn; mit der Grundlinie und Mμ; Nν mit AQqS parallel, ſo hat das Parallelogramm MN$\nu\mu$ gewiß ſeinen Schwerpunct in Qq, denn der Schwerpunct liegt in jeder Diagonale, und eine Linie durch der Diagonalen Durchſchnitt mit einem Paare Seiten parallel, halbirt jede der beyden übrigen Seiten. Indem ſich nun mn der MN unendlich nähert, nähert ſich der Theil des Dreyecks MNnm unendlich dem Parallelogramme NN$\nu\mu$; alſo läßt ſich das Dreyeck in Theile zerlegen, deren jeder ſeinen Schwerpunct in AS hat. Nun iſt AQ: z = AS: g

x: AQ = f: AS alſo

x: z = f: g oder $z = \frac{gx}{f}$ folglich

$\frac{\int gx^2 dx : f}{\int gx dx : f} = \frac{2}{3} x$ alſo CF $= \frac{2}{3}$ f Weil aber CF: FK = AF: FS ſo iſt auch AF $= \frac{2}{3}$ AS. alſo nehme man auf der Linie, welche die Grundlinie halbirt, $\frac{2}{3}$ vom Scheitel.

4. Bey der Parabel iſt der Schwerpunct offenbahr in der Axe, und $\frac{1}{4} zz = bx$; dieſes giebt

$$\frac{\int 2b^{\frac{1}{2}} x^{3:2} dx}{\int 2b^{1:2} x^{1:2} dx}$$ oder CF $= \frac{3}{5}$ x.

5.

5. Zwiſchen dem Kreisbogen BOG und ſeiner Sehne BG, ſey der Abſchnitt BOG enthalten. Man ſucht deſſen Schwerpunct F.

C ſey des Kreiſes Mittelpunct, der Halbmeſſer $= r$; die Sehne BG $= 2h$; CO ſenkrecht auf ſie, ſo liegt F in CO; auch iſt wie in (637) CA $= e = \sqrt{(r^2 - h^2)}$; ferner $\frac{1}{2} z = \sqrt{(r^2 - x^2)}$ daher $\frac{1}{4} z^2 = r^2 - x^2$; $\frac{1}{2} zdz = - 2xdx$; und $xdx = - \frac{1}{4} zdz$; folglich $2xdx = - \frac{1}{4} z^2 dz$ davon das Integral $=$ Conſt $- \frac{1}{12} z^3$; Weil nun dieſe Summe der Momente ſich an BG anfängt wo $z = 2h$; ſo muß ſie da verſchwinden, oder es iſt $0 =$ Conſt $- \frac{8h^3}{12}$ folglich die Summe der Momente $= \frac{2}{3} h^3 - \frac{1}{12} z^3$, das wäre dieſe Summe für das Stück BGNM; alſo für den ganzen Abſchnitt $z = 0$; und dieſe Summe für ihn $\frac{2}{3} h^3$

Dieſe muß nun mit dem Innhalte des Abſchnittes dividirt werden. Der Abſchnitt heiſſe S; der Ausſchnitt zwiſchen CB, CG, und den Bogen BOG heiſſe V; und das Dreyeck CBG ſey $=$ T. So iſt $S = V - T$

Der Winkel BCO ſey $= \eta$ ſo iſt des Bogens BO Länge $= r. \eta$ und des Bogens BOG Länge $= 2r\eta$; und $V = r^2 \eta$

Im-

Imgleichen $T = e. h = h \surd (r^2 - h^2) = r.$ ſin η. r. coſ $\eta = \frac{1}{2} r^2$. ſin 2η (Trig. 19 S. 5. Zuſ.); alſo

$S = r^2. (\eta - \frac{1}{2}$ ſin $2\eta)$

Daher $CF = \frac{\frac{2}{3} h^3}{r^2. (\eta - \frac{1}{2} \sin 2\eta)} = \frac{\frac{2}{3} r. \sin \eta^3}{\eta - \frac{1}{2} \sin 2\eta}$

6. Für einen Halbkreis wo $h = r$; $\eta = \frac{1}{2} \pi$ wird $CF = \frac{4r}{3\pi} = \frac{4r.}{3}$ 0, 318309 (G. 44 S. 5. Z.) = r. 0, 424413181

7. I Hieraus findet man des Ausſchnittes Schwerpunct; Er ſey in H, des Dreyecks Schwerpunct iſt auch in CO, in der Entfernung $\frac{2}{3}$ CA von C (639) Weil nun die Momente des Dreyecks und des Abſchnitts zuſammen das Moment des Ausſchnitts geben müſſen ſo iſt

$\frac{2}{3} CA. T + CF. S = CH. V$; Alſo

$$CH = \frac{\frac{2}{3} CA. T + CF. S}{V}$$

Von dieſem Ausdrucke iſt

$\frac{2}{3} CA. T = \frac{2}{3} e^2. h$; $CF. S = \frac{2}{3} h^3$; die Summe davon $= \frac{2}{3} h. (h^2 + e^2) = \frac{2}{3} hr^2$; alſo $CH = \frac{2h}{3\eta} = \frac{2r. \sin \eta}{3. \eta}$

Es

Es iſt alſo $2r\eta : 2h = \frac{2}{3} r : CH$; oder der Bogen BOG zu ſeiner Sehne BG wie zwey Drittheile des Halbmeſſers zur Entfernung des Schwerpunctes vom Mittelpuncte.

8. Wenn der Winkel BCO verſchwindet, daß $\frac{\sin \eta}{\eta} = 1$ (281) ſo kömmt $\frac{2r}{3}$ als die Entfernung des Schwerpuncts vom Mittelpuncte für einen unendlich ſchmalen Ausſchnitt; Wie ſchon aus (639) erhellt, weil man dieſen Ausſchnitt als ein geradelinichtes Dreyeck betrachten kann.

9. Wenn man ſich alſo einen Kreis in unzählich ſolche ſchmale Ausſchnitte getheilt vorſtellt, ſo iſt eines jeden ſein Schwerpunct in einem Halbmeſſer der ihn halbirt, $\frac{2}{3}$ des Halbmeſſers vom Mittelpuncte entfernt. Da kann man ſich alſo dieſes Ausſchnitts Gewicht beyſammen vorſtellen.

Und alſo kann man ſich ferner vorſtellen als lägen die Gewichte dieſer Ausſchnitte, in einem Kreiſe deſſen Halbmeſſer $\frac{2}{3}$ des Halbmeſſer von dem gegebenen Kreiſe iſt, um deſſelben Mittelpunct herum. Oder: ſtatt der ſchweren Scheibe eines Kreiſes, kann man ſich vorſtellen: das Gewicht das durch ſie durchaus verbreitet iſt, ſey in einen Ring zuſammen gebracht deſſen Halbmeſſer $\frac{2}{3}$ des Halbmeſſers des Kreiſes iſt. Es

iſt

iſt alſo einerley, ob ſich die ſchwere Scheibe um eine verticale Axe durch ihren Mittelpunct dreht, oder ob die Scheibe nicht ſchwer wäre, ihr Gewicht aber in dem erwähnten Ringe herumgeführt würde, auch braucht das Gewicht nicht einmahl durch den ganzen Ring ausgetheilt zu ſeyn, ſondern könnte ſich irgendwo nur im Umfange deſſelben, an einer Stelle beyſammen befinden.

IIII. Man ſieht leicht wie dieſes *auf* einen Cylinder der ſich um eine verticale Axe dreht *anzu*wenden iſt, z. E. auf einen Mühlſtein. Daher wird dieſer Halbmeſſer des Ringes, als ein mittlerer Halbmeſſer bey Berechnungen im Maſchinenweſen gebraucht. Man ſ. z. E. Belidor Architectur. Hydraul. I. Part. Tom. I. art. 240; 652; u. ſ. w.

10. Anm. Wie in 7; findet man allemahl den Schwerpunct der Summe oder des Unterſchiedes von zwo Gröſſen, wenn man der einzelnen Gröſſen Schwerpuncte hat.

11. Aufg. Wenn ſich der Schwerpunct des Bogens MAN einer krummen Linie, in der geraden Linie CF befindet, ſeine Stelle in dieſer Linie zu finden.

Aufl. Das Moment jedes Elementes des Bogens iſt Nn. x; alſo $CF = \frac{\int x.\,Nn}{\int Nn}$

12. Ex. Für den Kreisbogen BOG; 41 Fig. wenn alles ſo verſtanden wird wie in (5) iſt Nn. $x = rxdx.\,(r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = - rdy$; wenn $PN = y$; das Integral davon alſo = Conſt − ry; Soll dieſes verſchwinden wenn $x = e$ oder $y = AG = h$; ſo wird das Integral $= r.(h - y)$; für den Bogen GN. Für den Bogen GO; ſetzt man $x = r$; oder $y = 0$; und das Integral iſt rh. Dieß wäre die Summe der Momente für den Bogen GO; für den doppelten Bogen GOB iſt ſie alſo 2rh

Der Winkel GCO heiſſe η; daß $h = r.\sin\eta$ So iſt der Bogen GOB oder $\int Nn = 2r.\eta$ und $CF = \frac{r.\sin\eta}{\eta} = \frac{1}{2}.\,CH$ (7)

13. Anm. Auf eine ähnliche Art findet man ohne Integralrechnung den Schwerpunct des Umfangs geradlinichter Figuren, davon Stevin in ſeiner Statik 2. B. verſchiedene Exempel hat.

14. Aufg. Den Schwerpunct eines Körpers zu finden, der aus Umdrehung der Figur ANG (39 F.) um ihre Axe AO entſteht.

Aufl. Weil er in der Linie AO iſt, ſo ſuche man ſeine Weite AF; Es ſey AP = x; PM = y; und AL die Axe (2) ſtatt CD. So iſt das Element des Körpers, das zwiſchen den Ebenen der Kreiſe enthalten iſt, die von PN und pn beſchrieben werden, $= \pi y^2 dx$ und ſein Moment $= \pi y^2 x dx$; Wenn alſo wiederum die Summe der einzelnen Momente dem Momente des ganzen Körpers gleichgeſetzt wird, ſo iſt CF =

$$\frac{\int y^2 x dx}{\int y^2 dx}$$; die Integrale ſo genommen, daß ſie für $x = 0$ verſchwinden, und alsdenn $f = AO$ ſtatt x geſetzt.

Exempel.

15. Für die Sphäroiden von Kegelſchnitten, wo $y^2 = bx - \frac{bx^2}{a}$ iſt

$$CF = \frac{f.(4a - 3f)}{2.(3a - 2f)}$$

Für die Parabel wird a unendlich und $CF = \frac{2}{3}f$.

16. Alle Stücken von Sphäroiden von Kegelſchnitten haben alſo einerley Schwerpunct, wenn ſie einerley Axe a; und einerley Höhe f haben.

Für

Für das Stücke, das die Hälfte des ganzen Sphäroids iſt, iſt $f = \frac{1}{2}a$ alſo $CF = \frac{5}{8}a$.

17. Aufg. Den Schwerpunct einer Pyramide, oder eines Körpers der durch kegelförmige Bewegung beſchrieben wird (Alg. 540.) zu finden.

Aufl. Seine Grundfläche heiſſe B, und ihre Weite von der Spitze A 40 F; oder die Höhe $= f$: BAG 40 F; ſey ein Schnitt von ihm, mit einer Ebene, die auf die Grundfläche ſenkrecht ſteht, und durch der Grundfläche Schwerpunct S geht, ſo befinden ſich alle Schwerpuncte der Schnitte, welche mit der Grundfläche parallel gehen, in der Linie AS, weil dieſe Schnitte alle einander ähnlich ſind, und gegen die Linie AS ähnliche Lagen haben. Ferner kann wie S. 61. S. 5 Z. das Element dieſes Körpers, das durch Ebenen begränzt wird, die nach MN; mn, mit der Grundfläche parallel gehen, als ein Priſma $= \frac{Bx^2\,dx}{ff}$ angeſehen werden, deſſen Schwerpunct in der Linie Qq iſt, die durch beyde Grundflächen Schwerpuncte geht. Alſo befindet ſich von jedem Elemente, und folglich vom ganzen Körper der Schwerpunct in der Linie AS. Er ſey in F; ſo iſt die Summe der Momente

 =

$= \int \frac{Bx^3\,dx}{ff}$ und das Moment des Körpers $= CF. \int \frac{Bx^2\,dx}{ff}$ beydes gleichgeſetzt, und f ſtatt x geſetzt giebt $CF = \frac{3}{4} f$ oder der Schwerpunct iſt allemahl $\frac{3}{4}$ der Höhe, von der Spitze entfernt.

18. Anm. Viel Exempel und andere hieher gehörigen Lehren, als Guldins jetzo völlig entbehrlicher Regel, wie man vermittelſt des Schwerpunctes Flächen und Körper ausrechnet, beyzubringen, leidet hier der Platz nicht. Man ſ. v. dieſer Regel Wolf El. Mech. §. 193. ſeqq. und mehr Exempel den Schwerpunct zu finden, beym *Carré* Methode pur la meſure des Surfaces &c. Sect. 3. *Stone* Anal. des inf. pet. Sect. VI. u. a.

Bayerische Staatsbibliothek München

Regi-

Regiſter

über die beyden erſten Theile der Anfangsgründe.

Ar. Arithmetik. Die römiſche Zifer bedeutet das Capitel. Die arabiſche den §.
G. Geometrie. S. bedeutet Satz. Z. Zuſatz
Tr. Trigonometrie.
Sph. Sphäriſche Trigonometrie.
P. Perſpectiv. Im folgenden bedeuten die Zifern allemahl die §.
St. Statik.
H. Hydroſtatik.
A. Aerometrie.
H. Hydraulik.
O. Optik.
K. Katoptrik.
D. Dioptrik.
A. Aſtronomie.
G. Geographie.
Ch. Chronologie.
Gn. Gnomonik.
Art. Artillerie.
F. Fortification.
B. Baukunſt.
Z. Zugaben.

Regiſter.

A

Abend A. 43.
Abendſeite A. 15.
Abendſtern A 191.
Abenduhr Gn. 41.
Abendweite A. 100.
Ab-und Anlauf B. 14.
Abſtand vom Mittagskreiſe A. 51.
Abſteigung ſchiefe A. 100.
Abweichung wegen der Geſtalt des Glaſes. D. 43. wegen der Farben. 51.
Abweichung A. 46. der Magnetnadel G. 71. der Uhr Gn. 18.
Abziehen Ar. I. 11. 35.
Addiren Ar. I. 4; 11.
Aehnliche Figuren G 19. Erkl. Ob ihre Eigenſchaften aus dem metaphyſiſchen Begriffe zu erweiſen ſind 27. S Anm.
Aehnlichliegende Puncte G. 39 S.
Aequatio A. 245.
Aequator A. 27. ſeine Höhe 48.
Aequinoctialpuncte A. 71.
Aequinoctialuhr Gn. 10.
Aera Ch. 20.
Alligationsregel Ar. V. 48.
Altitudines correſpondentes A 61.
Amphiſcii G. 56.
Amphitheatra. D. 39.
Amplitudo ortiua und occidua. A. 100.
Anomalie mittlere; wahre, coäquirte A. 245.
Anomaliſtiſcher Umlauf der Sonne A 249.
Anſteckelkiel H. 15.
Antipodes G. 56.,
Antoeci G. 56.
Anziehende Kraft A. 277.
Aphelium A. 235.
Architrab B. 13.
Art, Dinge von einer Ar. I. 1.
Aſcii G. 56.
Aſteriſmi ſ. Sternbild.
Aufgehen A. 15.
Aufriß B. 21.
Aufſatzröhren H. 15.
Aufſteigung gerade A 93. ſchiefe. ihr Unterſchied 100.
Auge, deſſen Theile D. 56. u. ſ. warum wir die Sachen aufgerichtet und nur einmahl ſehen. 65.
Augenpunct P. 11.
Ausdehnung geometriſche G. 3. Erkl.
Ausrechnung geradlinichter Figuren G. 42 S. des Kreiſes 44 S. der Körper 54 u. ſ. S.

Au-

Auſenwerke F. 23.
Axe der Welt A. 26.
Axis in peritrochio St. 70
Azimuth A. 53.

B

Bänder B. 14.
Banket F. 8.
Barometer A. 67.
Baſtion F. 12.
Bejaht Ar. I. 90.
Berme F. 21.
Beugung des Lichts D. 113.
Bevölkerung zu berechnen
Bewegung tägliche oder gemeine A. 15. eigene 37. mittlere 244.
Bewegungspunct St 25.
Bild eines Punctes vom ebenen Spiegel K. 25. vom Glaſe D. 32.
Bild eines Gegenſtandes von einiger Gröſſe; vom Spiegel K. 29. vom Glaſe D. 38.
Bilder im verfinſterten Zimmer, ihre Erklärung D. 28.
Biſſextilis Ch. 16.
Bleyrecht St. 3.
Bodenſtücke Art. 11.
Böſchung F. 10.
Bogenſchuß Art. 21.
Bollwerk; Spitze, Winkel, F. 12.
Bomben Art. 18. ihr Weg 22; 23.
Borlach hat die Epicycloiden bey den Zähnen der Räder angebracht St 76.
Bradley Entdeckungen A. 218. 293.
Brechungswinkel D. 6.
Breite und Breitenkreis, A. 107. auf der Erde G 30.
Brennpunct K 41. D. 21. phyſiſcher und geometriſcher D. 27. der Elipſe A. 236.
Bruch A. 152.
Bruſtwehre F. 8.
Buchſtabenrechnung Ar. II.

C

de la *Caille* Beſtimmung der Schiefe der Ekliptik A. 78. Verzeichniß der Firſterne 111.
Calender julianiſcher Ch. 15. 26. ſeine Fehler 17. 18. 10 Veränderung deſſelben vom Pabſte Gregorius XIII. 61. 62. 63. ihre eigentliche Abſicht und Wichtigkeit 73; der gregorianiſche

Calender iſt mit Grunde von den Proteſtanten nicht ſogleich angenommen worden 73. Verbeſſerter Calender 74.
Caliber ſtab; Art. 13. 16.
Camera obſcura; ſ. verfinſtertes Zimmer.
Capitallinie F. 17.
Capitäl B. 12.
Caponieres F. 24.
Cardines A. 43.
Carthaune Art. 19.
Catalogi fixarum A. 111.
Cathetus incidentiae D. 6.
Centralkraft A. 277.
Centrum grauitatis ſ. Schwerpunct.
figura *Characteriſtica*. Ar. VI. 31.
Chriſtliche Zeitrechnung Ch. 21.
Cirkel ſ. Kreis.
Clima G. 55.
Coluri A. 89.
Commutationswinkel A. 259.
ComplementumTr 3. Erkl.
Computus eccleſiaſticus Ch. 55.
Continuum G. 2. Erkl.
Contraminen F. 24.
Contreſcarpe F. 24.
Copernicus; hat die wahre Weltordnung aus ſchlechten Beobachtungen entdeckt A 216.
Coſecante Tr. 5. Erkl.
Coſinus Tr. 3 Erkl.
Cotangente Tr. 5 Erkl.
Cubikwurzel ausziehen Ar. IIII. 40.
Cyclus Solis Ch. 31. lunae 38. indictionum 21.

D

Dämmerung A. 133. kürzeſte 135.
Decken G. 3 Grundſ.
Declinatio A. 46.
Defenslinie F. 15. beſtändige, kleine, ſtreichende, 18.
Delphine Art. 11.
Regel Detri Ar. V. 37. Verkehrte 49.
Diameter G. 13 Erkl.
Dichter St. 10.
Dies primi mobilis A. 81.
Differentia aſcenſionalis A. 100.
Differenz Ar. I. 11.
Dionyſiſche Zeitrechnung Ch. 21. 22. ihr Anfang in der julianiſchen Periode 48
Directionslinie St. 48.
Diſtanzpunct P. 11.
Diviſion Ar. I. 13. V. 20.
Dioptriſche Sätze, die vornehmſten analytiſch bewieſen Z. 561. S.

Dô-

Dodecaedrum G. 2 Th. 7. Erkl. 1. Anm.
Dodecatemoria A. 125.
Dörfel hat die paraboliſche Bahn der Kometen entdeckt A. 309.
Drachenkopf und Schwanz. A. 258.
Dreyecke G. 14 Erkl. ſphäriſche ſph. Tr. 1. Erkl.
Druckwerk H. 16.
Durchmeſſer G. 13 Erkl.
Durchmeſſer ſcheinbare der Weltkörper A. 230.
Durchſchnitt B. 21.

E

Ebene G 7. Erkl.
Eccentricität A. 235.
Eccentriſcher Kreis A. 234
Eigene Schweren verſchiedener Körper. H. 42. 49. 51.
Einheit Ar. I. 4.
Einſchaltung Ch. 10.
Ekliptik Ch. 70. ihre größte Abweichung oder Schiefe A. 73. zu finden 78. warum man ſchließt, ſie nehme ab 79.
Elaſtiſch A. 6.
Elemente G. 24 S. 1. Z.
Ellipſe A. 236. wie ſich ein Körper in ihr bewegt 280.
Elongationswinkel A. 259.
Entgegengeſetzte Gröſſen Ar. I. 90.
Epocha Ch. 20.
Erbzoll St. 127.
Ergänzung Tr. 3. Erkl.
Erdbahn ob ſie mit der Weite der Fixſterne in Vergleichung komme? 217. ihre Axe verrückt ſich A. 248.
Erdaxe ihr Wanken A. 293.
Erde, phyſiſcher Beweiß, daß ſie um den Aequator erhabener iſt. G. 14. u. f. Beſtimmungen ihrer Geſtalt aus Beobachtungen 19 Nutzen davon 21. Sie weicht nicht ſehr von der Kugel ab. 20. ihre Umſchiffungen ſind eigentlich Fahrten um den Südpol. 39. dabey wird ein Tag gewonnen oder verlohren 38.
Erdkugeln G. 38.
Erdſchatten, ſeine Gröſſe, wo er auf den Mond fällt, zu berechnen. A. 296.
Eſcarpe F. 9.
Eſplanade F. 24.
Eurythmie B. 6.
Exponent der Potenz Ar. I. 45. der Verhältniß V. 26.

F

Facen F. 13.
Fachbaum St. 126.
Factoren Ar. I. 7.
Faden G. 32 S. 1 A
Fadenkreuz St. 118. D. 102.
Farben des Priſma D. 44.
Fauſſebraye F. 21.
Feldmeſſen aus einem Stande G. 36 S. 2. A.
Feldſchanzen F. 28.
Fernrohr holländiſches oder galiläiſches D. 87. Sternrohr 89. Erdrohr 90. mit 5 Augengläſern 92. newtoniſches 98. gregoriſches, caſſegräniſches, dollondiſches 99. doppeltes 101. ein längeres zeigt die himmliſche Begebenheiten nicht zu gleicher Zeit mit einem kürzern. G. 36.
Feſte, bewegliche und unbewegliche Ch. 51.
Feſtrechnung cycliſche Ch. 55.
Figuren G. 12 Erk. reguläre 18 Erkl. ähnliche Figuren 19 Erkl.
Fixſterne A. 34. ihre Stellen durch Beobachtungen zu beſtimmen. A. 104. welcher Länge und Breite man braucht A 110. Verzeichniſſe derſelben 111. einiger Nahmen 115. Gröſſen, und Neblichte 117. Veränderliche 118 ihre eigene Bewegung 124. werden durch keine Fernröhre vergröſſert 223. ſind Sonnen 225. von ihren Weiten von der Sonne 222. 226.
Flanken F. 13. zurückgezogene (retirés) 16.
Flaſchenzug St. 90.
Flüßiger Körper H. 1.
Focus K. 41.
Fortification F. 1. reguläre und irreguläre 5. Manieren 26.
Frieß B. 13.
Friſen Art. 11.
Frühlingspunct A. 71.
Füſſe warum eine Sache auf dreyen feſte ſtehet. G. 2. Th. Grundſ. Anm.
Fundamentallinie P. 6.
Fuß G 32 S. rheinländiſcher, ſo auch in Dänemark eingeführt iſt, 2. Anm. deſſen Verhältniß zum pariſer; daſ.
Fußgeſimſe B. 11.
Futtermauer F. F. 10.

Regiſter.

G.

Gallerie F. 22.
Gebälke B. 9.
Gebrochner Winkel D. 6.
Gefälle St. 116.
Gegenfüſſer G 56.
Geiſtliche wozu ſie vorzeiten die Aſtronomie gebraucht. Ch. 55.
Gemeine Zeitrechnung Ch 21
Geocentriſcher Ort A 259.
Gerinne St 126 128.
Geſellſchaftsregel Ar. V. 47.
Geſichtskreis A. 8.
Geſichtslinien F. 12.
Geſtirne ſ. Sternbild.
Getriebe St. 75.
Glaci F. 24.
Gläſer geſchliffene; deren Arten D. 17. flächere oder erhabenere D. 32.
Gleichgewicht St. 1.
Gleichlaufende Linien G. 9. Erkl. Grundſatz von ihren Eigenſchaften 12 G.
Gleichung A. 245. der Zeit 252.
Glieder B. 14.
Gnomon Gn 13.
Göpel St. 71.
Grad der Potenz Ar. I. 45.
Grad des Winkels G. 13 G. 5. Z. Anm. des Bogens 22 G. 5. Z.
Grad auf der Erdfläche zu finden. G. 7. was aus ihrer Ungleichheit folgt. 9.
Grade des Mittagskreiſes, die man wirklich gemeſſen hat. G. 18.
Gränze G. 1. Erkl.
Granaten Art. 18.
Grießſäulen St. 126.
in Grund legen G. 40 G.
Grundriß B. 21.
Grundwerk St. 126.
Güldene Zahl Ch. 38.

H

Halbmeſſer G. 13. Erkl.
Halbſchatten P. 33. D. 19.
Haubitzen Art. 10.
Hauptgegenden A. 43. G 57.
Hauptgeſimſe B. 9.
Hauſen deſſen Vorrichtung den Druck der Atmoſphäre zu zeigen A. 31. Unterſuchung der Figur des Mondſchattens auf der Erde A 302. allgemeine Verzeichnung der Sonnenuhren, Gn. 67. und Schattenwege 68.
Hebel mathematiſcher St. 25. ſchwerer 50.
Heber H. 4.

Heerd=

Heerdpfähle St. 126.
Heliocentriſcher Ort A. 259
Heliomêtre A. 228.
Herbſtpunct A. 71.
Hexaedrum G. 2. Th. 7. Erkl. 1. Anm.
Himmelskugel A. 119.
Höhe eines Dreyecks G. 14 S. 2. Z. wie weit man von einer ſehen kann? G. 28. der Sonne O. 19. durch den Schatten zu meſſen 22. eines Sternes. A. 4.
Höhen übereinſtimmende oder zuſammengehörige A. 61.
Hohlkehlen B. 14.
Hommel von ihm hat Tycho de Brahe, zu Leipzig den verjüngten Maaßſtab gelernt G. 32. S. 7. Anm.
Horizont P. 6. A. 8. ſcheinbarer A. 32.
Horizontalfläche St. 3.
Horizontallinie P. 11. St. 3. wahre 120.
Horizontalrefraction zu finden A. 143. Erinnerung wegen des gewöhnlichen Exempels 144. merkwürdige Beyſpiele von ihr 145.
Horizontaluhr Gn. 31. ihre trigonometriſche Verzeichnung Gn. 34. Weg des Schattens auf ihr von einem gegebenen Puncte, für jeden Tag. 68.
Horologia primaria Gn. 62. inclinata, reclinata 65. deinclinata 66.
Hugen, deſſen Entdeckungen, wegen der Kreisrechnung G. 43 S. Anm. eines Sternrohres D. 92. Der Regeln für die Verhältniſſe bey Fernröhren 95. beym Saturn A. 197. 198; Der Geſetze des Schwunges 209. der Vertiefungen in den Mondflecken 182
Hypomochlium St. 25.

J.

Jahr haben nicht alle chriſtliche Völker allezeit vom 1. Jan. angefangen Ch. 50.
Jahrszeiten G. 52. u. f.
Julianiſche Periode Ch. 44. ihr Jahr aus den chronologiſchen Kennzeichen zu finden 46. ihr Gebrauch 49.
Julianiſches Jahr Ch. 16. ſeine Fehler 17. u. f.
Jupiter ſeine Flecken und Streifen A. 194. Umdrehung 195. Trabanten 196.

Ico-

Icoſaedrum G. 2. Th. 7. Erkl. 1. Anm.
Inclinatio D. 6.
Incommenſurabiles Ar. IIII. 26.
Indictio Ch. 41. u. f.
Intercalaris Ch. 16.
Irrationalverhältniſſe wie auf ſie erſtreckt wird was bey Rationalverhältniſſen erwieſen worden. G. 22 S. 11. Z. und 24 S. ſ. Irrationalzahlen.
Irrationalzahlen A. IIII. 26. wie die Sätze von Rationalzahlen auf ſie erſtreckt werden, Ar. IIII. 49. u. f. Sie durch Linien auszudrücken. G. 42 S. 11. Z.

K.

Kammen St. 74.
Kammerſtücken Art. 10.
Kammrad St. 129.
Karnies B. 13. 14.
Kegel G. 2. Th. 5. Erkl.
Kehllinie F. 17.
Keil St. 105.
Kennzifer Ar. VI. 31.
Kepler hat die Brechung zu meſſen gelehret. D. 14. ſeine Theorie der Planeten A. 247. 266. 282. Gedanken von der Lage der Fixſterne 226.
Kernſchuß Art. 21.
Keſſel Art. 17.
Kettenregel V. 56.
Klafter G. 32 S. 1. A.
Klappe A. 47. H. 11.
Kloben St. 90.
Knallpulver Art. 6.
Knauf B. 12.
Knoten A. 258. zu finden 261
Körper geometriſcher G. 4. Erkl.
. . . ſenkrechte und ſchiefe, G. 2. Th. 4. Erkl. Ordentliche 7. Erkl.
Kolben H. 12.
Koluren A. 89.
Kometen A. 303. u. f.
Kopf Art. 11.
Kräfte ihre Zuſammenſetzung St. 60.
Kraft St. 1. todte und lebendige daſ.
Kreis und Wörter von ihm G. 13. Erkl. concentriſche 20 S. welche weniger gekrümmt ſind 8 Z. Verhältniß des Durchmeſſers zum Umfange G. 43. S. 2.
. . . hat unter allen Figuren von gleichem Umfange die größte Fläche G. 44 S. 9. Z. 1. A. Größter G. 49 S. 1. Z.

Kreuz=

Kreuzfuß G. 42 S. 6. Z.
Kreuzhaſpel St. 71.
Kröpfung St 128.
Kronrad St. 74.
Kugel G. 2. Th. 6. Erkl.
Kugeldreyeck ſph. Tr. 1. Erkl.
Kurzſichtige D. 77. wie ſie ſich helfen 78.

L.

Lachter G. 32 S. 1. A.
Ladeſchaufel Art. 12.
Länge der Sonne A. 95. der Sterne 107. auf der Erde G. 30. wie ſie da gefunden wird 32. u. f. warum ſie zur See nicht zu finden iſt? 35.
Läufer St. 129.
Landcharte G. 62. u. f. Verzeichnung einer für ein kleines Stück der Erdfläche 64.
Laſt St. 1.
Lauf Art 11.
von leichterer Art St. 10.
Licht, ſeine allmähliche Fortpflanzung A. 219. u. F.
Lichtſtral O. 1.
Linie beſteht nicht aus Puncten G. 5. Erkl. gerade und krumme G. 6. Erkl. Theil des Zolles G. 32 S.
Logarithmen Ar. VI. 17.
Logarithmiſches Syſtem Ar VI. 19.
Lothrecht St. 3.
Loxodromie G. 69.
Luft A. 1.
Luftpumpe A. 39. 50.

M.

Maaßſtab verjüngter G. 32 S. 4 A. von wem ihn Tycho gelernt 7 A.
Magnetnadel ihre Abweichung G. 71.
Mahlpfahl St. 127.
Mantiſſa Ar. VI. 31.
Mars nimmt ab und zu A. 191. Flecken 194. Umdrehung 195.
Mayer Bemühungen wegen des Verzeichniſſes der Fixſterne A. 111. der Kenntniß des Mondes 185.
Meer chernes G. 44 S.
Meilen geographiſche heiſſen nneigentlich deutſche G. 40.
Meridianus A. 28.
Merkur nimmt ab und zu A. 191. geht durch die Sonne 192. entfernt ſich nie über 28 Gr. von ihr. 202.

Meß=

Meßtiſchchen, ſein Gebrauch G. 35 S. u. f.
Mikrometer D. 103 A. 227
Mikroſkop einfaches D. 105. zuſammengeſetztes 106. Sonnenmikroſkop 107.
Million Ar. I. 19.
Minen F. 25.
Minute G. 22 S. 5. Z. bey Finſterniſſen A. 300. bey Parallelkreiſen auf der Erde G. 40.
Mittag A. 43.
Mittagskreis A. 28. Unterſchied in Zeit G. 23. in Graden 25.
Mittagslinie A. 30. zu finden A. 61. 62. des Aequators Gn. 6. der Uhr 19.
Mittagsſeite einer lothrechten Ebene, wie lange ſie beſchienen wird. Gn. 39. 55.
Mittagsuhr Gn. 37. Verzeichnung 38.
Mittelpunct eines Glaſes D. 35.
- - - der Kräfte A. 277.
Mitternacht A. 43.
Mitternachtuhr Verzeichnung Gn. 40.
Model B. 19.
Mörſer Art. 9. ſtehender; hangender; Fuß; Schemel; 17
Moment St. 38.
Monat periodiſcher und ſynodiſcher A. 213. Erleuchtungsmonat Ch. 8.
Mond ſein Zu- und Abnehmen, Viertheile; voller, neuer, A. 171. wird erklärt 175. Finſterniß 177. u. f. Flecken 180. ſind wohl keine Waſſer 182. Berge 183. Charte 184. Wanken 186. Atmoſphäre 190. halber Mond F. 23.
Mondeszirkel Ch. 38.
Mondenjahr ſein Unterſchied vom julianiſchen Ch. 33.
- - - der Morgenländer Ch. 78. u. f.
Mondsbruch A. 175.
Morgen A. 43.
Morgenſeite A. 15.
Morgenſtern A. 191.
Morgenuhr Gn. 42.
Morgenweite A. 100.
Mühleiſen St. 129.
Mühlengang St. 129.
Multipliciren Ar. I. 7. V. 20.
Mundſtücke Art. 11.
Myops ſ. kurzſichtig.

N.

N.

Nachtgleiche A. 71. Vorrücken derſelben 125. Urſache davon A. 291.
Nadir A. 28.
Nebengegenden G. 57.
Nebenſtreiche F. 18.
Negativ Ar. I. 90.
Neigung eines Planeten A. 258. Grösse zu finden 262. der Uhr Gn. 18.
Neigungsloth D. 6.
Neper Erfinder der Logarithmen Ar. VI. 34. einer allgemeinen Regel zur ſphäriſchen Trigonometrie ſph. Tr. 10 S. 2. A.
Netze G. 2. Th. 7. Erkl. 2. A.
Newton deſſen Entdeckungen von den Farben D. 50. der allgemeinen Schwere A. 282. den Kometenbahnen A. 309. Sein Teleſkop D. 98.
Nicäiſche Kirchenverſammlung. Schluß wegen des Oſterfeſtes den man ihr zuſchreibt Ch. 53. Erinnerungen dabey 76.
Norden A. 43.
Nordpol A. 31.

O.

Oberſchlächtiges Rad St. 73.
Octaedrum G. 2. Th. 7. Erkl. 1. Anm.
Oelichte Körper brechen die Strahlen ſtärker als andre D. 15.
Operngucker D. 100.
Ordnungen der Einheiten Ar. I. 22.
Ordnungen der Säulen B. 17. 18.
Orillon F. 16.
Ortus und occaſus, coſmicus, acronyctus, heliacus. A. 126.
Oſten A. 43.
Oſtergränze A. 56. 57. gregorianiſche 68.
Oſtern welchen Tag es zu feyern. Ch. 52. Berechnung nach dem julianiſchen Calender 58. nach dem gregorianiſchen 69. nach dem verbeſſerten 73. wenn die letzten beyden unterſchieden ſind? 76.

P.

Panſterzeug St. 130.
Parabel Weg der Kometen A. 306. u. f. geworfener Körper Art. 8.
Parallaxe 149. u. f. der Erdbahn 218. 259.
Parallel ſ. gleichlaufend
Parallelepipedum G. 2 Th. 4 Erkl.
Parallelkreiſe G. 51. S. auf der Erde zu berechnen G. 40.
Parapet F. 8.
Perihelium A. 235.
Periodus ſ. Umlaufszeit.
Perioeci G. 56.
Periſcji G. 56.
Perſpectiviſche Abbildung P. 5. eines Würfels P. 37. Höhe P. 7.
Pfeiler B. 9.
Phaſis A. 175.
Phyſiſche Aſtronomie. A. 277. u. f.
Planeten ſind dunkele Körper A. 199. Haupt- und Nebenplaneten; obere und untere; 200. ob ſie bewohnt ſind? 201.
- - - werden von der Sonne angezogen, und die Nebenplaneten auch von den Hauptplaneten A. 281.
Planetenſtunden Ch. 4.
Planum G. 7. Erkl.
Platten B. 14.
Poeten wie ſie den Auf- und Untergang der Sterne verſtehen A. 127. 128.
Polarkreiſe A. 87.
Polaruhr Gn. 59. u. f.
Pole eines Kreiſes G. 49. S. 9. Z. der Welt A. 26.
Polemoſkop D. 100.
Polhöhe A. 48. zu finden A 64. 68.
Polygon ſ. Vieleck.
- - - äuſere, innere, F. 17.
Poſtement B. 9. Geſimſe 11.
Potenzen Ar. I. 45.
Praeceſſio aequinoctiorum. A. 125.
Presbyta ſ. weitſichtig.
Priſma G. 2. Th. 4. Erkl.
Product Ar. I. 7.
Profil B. 21.
Projection P. 5. orthographiſche P. 23. einer Kugel P. 28. ſtereographiſche Horizontalprojection G. 63.
Proportion Ar. V. arithmetiſche 7. geometriſche 17. ſtetige 8; 17. der geometriſchen Eigenſchaften 31. u. f.

Proſtaphaereſis A. 245.
Pulver Art. 2. ob es zum groben Geſchütze mit Vortheil ſchlechter gemacht werde? 3. enthält zuſammengepreßte Luft 5.
Pulverproben Art. 4.
Pumpen H. 14.
Punct G. 5 Erkl.
Punct, phyſiſcher, O. 1.
Pyramide G. 2 Th. 5. Erkl.

Q.

Quadrant G. 22 S. 4 Z.
Quadrat Ar. I. 43. G. 16 Erkl.
Quadratfuß G. 42 S. 6 Z.
Quadratur des Kreiſes G. 44 S. G. Z. 3. A.
Quadratura lunae A. 172.
Quadratwurzel ausziehen Ar. IIII. 23.

R.

Rad St. 70.
Radius G. 13. Erkl.
- - - groſſer, kleiner; F. 17.
- - - vector A 240.
Rauhe Fläche, warum ſie kein Spiegel iſt, K. 14.
Ravelin F. 23.
Rautenglas D. 111.
Rectaſcenſion A. 93.
Reflexion K. 8. ihr Geſetz 11. 12. bey krummen Spiegeln 16.
Refraction D. 6. ihr Geſetz 7. 9. deſſen Erfinder 14.
das Reiben St. 149.
Reifen Art. 11.
Reihe geometriſche, Ar. VI 10.
Ringkugel A. 92.
Rolle St 20.
Rota directa und retrograda St. 73.
Ruhepunct St. 25.
Runenſtäbe Ch. 77.
Ruthe G. 32. S.

S.

Säulen B. 9. ihre Arten oder Ordnungen B. 17. 18.
Saturn ſein Ring A. 197. Trabanten A. 198.

Satz

Satz niedriger, hoher, H. 15.
Saugwerk H. 14.
Schaft Geſimſe B. 12.
Schaltjahr, Schalttag, Ch. 16.
Schatten P. 30. einer Kugel O 16. ſein Gebrauch Höhen zu meſſen O. 18. 22.
Scheinbare Gröſſe; Durchmeſſer O. 30.
Scheitelkreis A. 44.
Scheitelpunct A. 28.
Schemelmörſer Art. 17.
Schiefe Fläche St. 95.
Schieſſen Art. 9.
Schiffarth allgemeiner Begriffe von ihr G. 68. u. f
Schildgapfen Art. 17. 11.
Schlangen Art 19.
Schnellwage St. 69.
Schober Theorie und Verſuche von der Ueberwucht St. 151.
Schraube St. 106.
Schrotwage St. 118.
Schulterwinkel F. 20.
Schwere St. 3.
- - - erhält den Mond in ſeiner Bahn A. 823. Wirkungen der gegenſeitigen Schweren des Monds der Erde und der Sonne in die Bewegung des Mondes 284. u. f.
von ſchwererer Art St. 10.
Schwerpunct St. 41. bey jedem Körper 48.
Schwung ſ. vis centrifuga.
Secante Tr. 4 Erkl.
Sechzigtheilichte Brüche Ar III. 15.
Secunde G. 20. S. 5 Z.
Seecharten, mit wachſenden Graden oder Breiten G. 70.
Seele Art. 10.
Sehewinkel O. 30. der kleinſte empfindliche O 40.
Sehen wie nahe eine Sache ſeyn darf deutlich zu ſehen, D. 72.
Sehungsbogen A. 129. zu finden, A. 131.
Semidiameter G. 13. Erkl.
Setzkolben Art. 12.
Sideriſcher Umlauf der Sonne A. 249.
Sinus Tr. 2. Erkl. natürliche und künſtliche, 2. S. 2. A.
Solidum G. 4. Erkl.
Solſtitia A. 72.
Sommerpunct A. 72.
Sonne wie man ſie betrachtet A. 164. ihre Atmoſphäre A. 167.

Sonnencirkel Ch. 22.
Sonnenfackeln A. 165.
Sonnenfinſterniß A. 168. u. f. iſt eine Erdfinſterniß 301.
Sonnenflecken A. 160. u. f.
Sonnenjahr zu finden, A. 120.
. . . bürgerliches und aſtronomiſches Ch. 11.
Sonnenmeſſer A. 228.
Sonnennähe und Ferne, A. 235.
Sonnenmonat Ch. 8.
Sonnenſtandspuncte A. 72.
Sonnentag A. 98. mittlerer und wahrer, 250. Sn. 4.
Sonnenuhren auf Verticalflächen; allgemeine Theorie Sn. 43. auf jeder willkührlichen Ebene, können als Horizontaluhren beſchrieben werden. 53. 54. obere, untere 58. geneigte 58. 63. wie man auf ihnen die Längen der Tage, die Monatstage u. ſ. w. verzeichnet. 99. auf krummen Flächen 70.
Sonntagsbuchſtabe Ch. 25. u. f.
Species Ar. I. 18.
Specifice grauiora und leuiora St. 10.
Sphaera armillaris ſ. materialis. A. 92. recta, parallela, obliqua. G. 45.
Sphäroid G. 9. zuſammengedrucktes 12, länglichtes 13.
Spiegel K. 1. 15.
Spielraum Art. 13.
Stab B 14.
Staberrad St. 130.
Statik; Carteſens Grundſatz derſelben St. 54.
Stempel A 39.
Sternbilder A. 112. Urſprung ihrer Nahmen, A. 113.
Sterne ihre Weite A. 3. Höhe; Abſtand vom Scheitel A. 4.
Sternrad oder Stirnrad St. 74.
Sterntag A. 81.
Stetig G. 2. Erkl.
Stiefel A. 50. H. 16.
Stoß Art. 17.
Strahlenbrechung A. 136 u. ſ. zu finden 147. u. ſ.
Strahlenkegel D. 29.
Strauberrad St. 130.
Streichen F. 12. Streichwinkel 20.

Stücken Art. 9. Tafel von ihren Arten. 19. unter ſie rücken F. 11.
Stunden, europäiſche, gleiche, italiäniſche ungleiche, jüdiſche, alte babyloniſche, morgenländiſche, Ch. 4.
Stundenkreiſe Gn. 2.
Stundenlinie G. 23.
Stundenwinkel A. 84. der Uhr Gn. 23.
Stylus Gn. 13.
Subſtylarlinie Gn. 14.
Subtrahiren Ar. I. 11. 35.
Süden A. 43.
Südpol A. 31.
Summe Ar. I. 6.
Surdi Ar. IIII. 26.
Symmetrie B. 6.
Syſtema ſ. Weltordnung.

T.

Tag, natürlicher Ch. 3. Sein Anfang bey verſchiedenen Völkern. Ch. 4.
Tage ihr Unterſchied für verſchiedene Bewohner der Erde G. 47. u. f.
Tagebogen A. 100. zu finden 102.
Tagekreiſe A. 25.
Tangente einer krummen Linie zeigt ihre Richtung an G. 41 S. A.
Teleſcopium ſ. Fernrohr
Terreplein F. 9.
Tetraedrum G. 2. Th. 7. Erkl. 1. Anm.
Theilbarkeit ohne Ende folgt für die phyſiſche Ausdehnung nicht aus der geometriſchen G. 3. Erkl. Anm.
Theorie der Planeten, kepleriſche. A. 239. 247.
Thermometer A. 81. metallene 88 Vergleichung ihrer Grade Z. 55 S.
Thierkreis A. 90.
Thierkreislicht A. 167.
Toiſe G 32 S. 1. A. ihre Vergleichung mit der Ruthe 2. A.
Torricellianiſche Röhre A. 34.
Vacuum *torricellianum* A. 34.
Traube Art. 11.
Traverſes F. 24.
Triangel ſ. Dreyeck.
Triebſtöcke St. 75.
Tropici A. 86.
Trigonometrie ebene Tr. 1 Erkl.
Tropiſcher Umlauf der Sonne A. 149.
Trigonometriſche Tafeln; wieviel in ihnen völlig wahr iſt? Tr. 2 S. 3 A.

Trigonometriſche Lehrſätze durch die Buchſtabenrechnung gefunden Tr. 19. u. f. S.
Trilling St. 73.
Tubus ſ. Fernrohr.
Tycho de Brahe; ſeine Nachricht und Anwendung vom verjüngten Maaßſtabe G. 32 S. 7. Anm. hat zuerſt richtigere aſtronomiſche Beobachtungen zu halten angefangen A. 216. die Strahlenbrechung richtiger bemerkt, aber in ihrer Theorie geirrt 144. ihm iſt man in Abſicht auf die Beobachtungen mehr ſchuldig als dem Kopernik; warum er bey ſeinen edlen Geſinnungen gegen denſelben deſſen Weltgebäude nicht, angenommen 216.

U.

Ueberſchuß Ar. I. 11.
Ueberwucht St. 21. 151.
Uhren St. 143.
Undeutlichkeit der Bilder von Gläſern D. 52. u. f. des Sehens 68.
Unendlich G. 12 S. 12 Z. dadurch geſchieht der Uebergang aus dem Bejahten ins Verneinte 14 Z. die gerade Linie iſt ein Bogen eines unendlichen Kreiſes 20 S. 2 Z.
Unendlichklein G. 24 S. 1 Z.
Untergehen A. 15.
Unterlage St. 25.
Unterſchlächtiges Rad St. 73
Unterſchied Ar. I. 11.
Unterwall F. 21.
Urſachen, Wirkungen und Zeiten verglichen Ar. V 53.

V.

Vectis homodromus und heterodromus St. 26.
Ventil A. 47.
Venus nimmt ab und zu A. 191. geht durch die Sonne 192; 193; Gebrauch dieſes Durchganges 273 ihre Berge 194.

Flecken

Flecken 195. Umdrehung ſtreitig 195. entfernt ſich nie über 47 Gr. von der Sonne 202.
Vergnügen B. 5.
Verfinſtertes Zimmer O. 26. D. 110 wie weit es dem Auge ähnlich iſt? D. 64.
Verhältniß Ar. V. arithmetiſche 1. geometriſche 2. zuſammengeſetzte VI. 1. verdoppelte 7. triplicata 9.
- - - der Brechung D. 9.
Verhältniſſe gute B. 7.
Vermiſchung zweyer Metalle, ob ſie ſich hydroſtatiſch entdecken läßt. H. 54.
Verneint Ar. I; 90.
Vieleck G. 14 Erkl. Möglichkeit der ordentlichen 23 S 1. Z.
Vertical St. 3.
Viereckichte Figuren G. 16 Erkl.
Viertheilsſtab B. 14.
Vis centrifuga macht die Körper beym Aequator leichter C. 209. wie ſolches an Perpendikeln wahrgenommen worden 210.
- - - centripeta A. 277.
Viſirſchuß Art. 21.

W.

Wagen St. 66.
Wagrecht St. 3.
Wall F. 6.
Wallgang F. 9.
Wargentin Beſtimmung der Parallaxe des Mars aus ſeiner Beobachtung A. 158.
Waſſerplumpe H. 12.
Waſſerwage St. 108.
Weg, bedeckter F. 24.
Weiſer Gn. 13.
Weite der Sonne von der Erde A. 277.
Weiten der Planeten von der Sonne zu vergleichen, A. 265. ihre Würfel verhalten ſich wie die Quadrate der mittlern Entfernungen 266.
- - - der Oerter auf der Erde zu finden G. 59.
Weitſichtige D. 82. wie ſie ſich helfen 83.
Weltkörper ihre Gröſſen, und Entfernungen von der Sonne und Erde A. 274. und ihren Hauptplaneten A 276.
Weltordnung; kopernikaniſche A. 206 216.
Wendekreiſe A. 86.

Werfen Art. 9. mit zwey Feuern oder mit einem 18.
Weſten A. 43.
Windmühlen St. 132.
. . . holländiſche und deutſche, 142.
Windraum Art. 13.
Winkel G. 8 Erkl. ſeine Arten 11 Erkl. auswärts und einwärts gehende, 13 S 7 Z. Anm. ihr Maaß 22 S. 8 Z. bey verſchiedenen Halbmeſſern 44 S. 11 Z. Körperlicher G. 2 Th. 3 Erkl. kleiner F. 17.
. . . an der Sonne und Erde A. 259.
Winkelhebel St. 55.
Winkelmeſſer G. 37 S.
Winterpunct A. 72.
Wiſchkolben Art 12.
Woche ihr Urſprung Ch. 7.
Würfel Ar. I. 44. G. 2 Th. 8 Erkl. 1 Anm. B. 11.
Wurzel Ar. I. 47.

Z.

Zähne St. 74. ihre Geſtalt 76.
Zahl ganze Ar. I. 2.
Zapfen Art. 11.
Zapfenſtücke Art. 11.
Zauberlaterne D. 108.
Zehntheiliche Brüche Ar. III.
Zehrzoll St. 127.
Zeichen der arithmetiſchen Arbeiten Ar I 30.
. . . himmliſche A 74. geſtirnte und ungeſtirnte 125.
Zeit ihre Arten u. Verwandlungen A. 81; 98; 99. Z. 576 S.
Zeitbogen A. 84.
Zenith A. 28.
Zerſtreuungspunct D. 27.
Zierrathen auſerweſentliche B. 8.
Zifern; Erfindungen der Morgenländer Ar. I. 25.
Zodiacus A. 90.
Zoll G. 32 S. bey den Finſterniſſen A. 300.
Zonen G. 42. u f. ihre Wärme richtet ſich nicht nach ihrer Lage auf der Erde 50.

Regiſter
über den
dritten und vierten Theil der
Anfangsgründe
oder die
Analyſis.

II. Bedeutet die Analyſis unendlicher Gröſſen.
E die ihr beygefügten Exempel ihrer Anwendung.

A.

Abſchnitte eines Kreiſes zu quadriren II. 273; 275.
Abſciſſen 331.
Abwickelung ſ. Evolute.
Achteck beſchrieben 160.
Aehnlichkeit krummer Linien 388. ihre Verhältniß. II. 578; ähnliche kr. L. ſind als ähnliche Vielecke anzuſehen 580.
Aequatio ſ. Gleichung.
Algebra 51.
Algebraiſche Function 323.
Alligationsregel 69.
Anomalie wahre, ihre Vergleichung mit der Weite II; 630 mit der mittlern 634.
Aſymptoten 408 ſind Tangenten an unendl. entfernten Stellen II. 108. zu finden 113. 119.
Aufgabe deliſche 508.
Aufgaben unbeſtimmte, 179. u. f. wie ſie durch Gleichungen beſtimmt werden 207. mehr als beſtimmte 213.
Axe 331. kleine 365.

B.

Berührungspunct iſt als ein doppelter Durchſchnitt anzuſehen 452.
Binomialcoefficient für m = ∞ II. 144.

Binomialſatz für ganze bejahte Exponenten 116. u. f. allgemein erwieſen II. 46.
Bote Aufgabe davon 64.
Brennpunct 358 Summe der Linien an die Ellipſe aus beyden Brennpuncten 378. Urſache der Benennnng II. 99.
Bruch ſ. Function. Sein Werth wenn Zähler und Nenner zugleich verſchwinden II. 372.

C.

Cardans Regel 699.
Ciſſois 470.
Coefficienten 3. 57. ſ. Gleichung. ihr Verhalten gegen die Summen der Potenzen der Wurzeln 751. Uebereinſtimmung derer von binomiſchen Satze, u. derer von den höhern Differentialen. II 144.
Combinationen 735.
Conchoide 477.
Conuergere 11
Coordinaten, rechtwinklichte 331.
Coſinus des vielfachen Winkels 175. aus ihm den Bogen zu finden II. 296.
Cubiſche Gleichungen ihre Auflöſung 699.
Cubikzahlen ihr Wachsthum wenn die Wurzeln um 1 wachſen 45. Differenzenreihen 48; Tafeln für ſie zu verfertigen 48.
Cycloide 597.
Cylinder ſeine Schnitte ſind Ellipſen 524.

D.

Differentiale und deren Verhältniß II. 13. ihre Bezeichnung 18. höhere 132; 137. wie ſie beſtimmte Werthe bekommen 143. Differentiale für gewiſſe Werthe der veränderlichen Gröſſe 472; 474. Eigenſchaft der Differentiale der Functionen die zwo veränderliche Gröſſen enthalten 481; derer die drey veränderliche Gröſſen enthalten 487; der gleichartigen Functionen 478;
Differentiirung; zweyfache die auf zweyerley Arten einerley giebt. II. 481.

Differenzenreihen der Potenzen 50; 310.
Diuergere 11.
Diviſion zuſammengeſetzter Gröſſen 6.
Diviſionen die aufgehen 243 u. f.
Dreyeck gleichſeitiges, in einen Kreis zu beſchreiben. 153.
Durchmeſſer 431. zuſammengehörige 445.

E.

Element II. 68.
Ellipſe 362. wie ſich ihr Bogen einem paraboliſchen nähert 384. Berechnung ihrer Fläche C l; 1.
Ergänzung 11. wenn ſie zu betrachten nothwendig iſt 15; 719. der Wurzeln 321.
Evolute II. 563. u. f. krumme Linien zu finden die ihren Evoluter ähnlich ſind 578. u. f.
Exponentialrechnung II. 225. u. f.

F.

Factore dreytheilichte zu finden 389 u. f.
Fallen 2.
Flächen Gleichungen für ſie 514. Ihre Schnitte 520. u. f. 549.
Fluxionen II. 31. wie ſie mit den Differentialen übereinſtimmen 45.
Fünfeck beſchrieben 159.
Functionalgebraiſche, 323. vielförmige 328. transcendentiſche 571 rationale gebrochne zu zerlegen II. 361; 368.

G.

Gleichung 52. einfache 58. in ihr die unbekannte Gröſſe zu finden 59. aus dreyen drey unb. Gr. zu finden 61. beſtimmte 70. höhere; quadratiſche, cubiſche, u. ſ. f. 72. reine, unreine 73.

auf

auflöſen 74. quadratiſche reine 75. und unreine 78. aufzulöſen. Beſtimmte rational zu machen 191. zu ordnen 192. wie jede eine unb. Gr. beſtimmt 206. 210. jede kann als ein Product aus einfachen angeſehen werden 220. 221. 222. wieviel ſie Wurzeln hat 223. wie die Coefficienten durch die Wurzeln gegeben werden 224. reine wieviel ſie mögliche Wurzeln hat 237. in jeder ſind unmögliche W. paarweiſe 272. II. 174. Eine Gl. vollſtändig zu machen 281. das zweyte 282. dritte 287. Glied wegzuſchaffen, für eine krumme Linie 335. Conſtruction der beſtimmten 500.

Gleichungen aus zwo eine unb. Gr. wegzuſchaffen 195. 199. aus n; n — 1 u. G. wegzuſch. 205. ihr Urſprung aus der Multiplication 214. 219. für Flächen 514. gleichartige 529. cubiſche; wie man die Zahl der unmöglichen Wurzeln in ihnen findet II. 185.

Glied allgemeines, 9.

Grad einer Gleichung und Linie 467.

- - - ſeine Gröſſe II. 309.

Gränzen der Wurzeln 301. u. f. II. 194. u. f. der Gröſſen II. 4; 7.

Grandi, Guido, ſein Irrthum 15.

Gröſſen, unmögliche, 34. zwo Gattungen 35. unbekannte ſie zu finden ſ. Gleichung veränderliche 322. beſtändige 323. flieſſende II. 201. Regel ſie mit ſich ſelbſt zu multipliciren 36.

Gröſte und kleinſte II. 152. zu finden 155.

H.

Harriots Lehrſatz II. 193.

Hauptreihe 724.

Höhe, wie weit man von einer ſehen kann 17.

Hufförmige Abſchnitte II. 617.

Hyperbel 389. iſt eine Ellipſe mit verneinter Axe 391. Gleichſeitige 417. Quadratur ihrer Ausſchnitte II. 317. Vergleichung derſelben mit den Ausſchnitten des Kreiſes 322.

J.

Regiſter.

J.

Integral II. 201. bey jedem iſt eine veränderliche Gröſſe zu addiren 204.

Integrationen allgemeine Formeln derſelben II. 245.. 255. durch Verwandlungen zu finden 257. u. f. der rationalen Differentiale 385; 397, einer zweytheilichten Irrationalgröſſe 399 u. f. wenn die veränderlichen Gröſſen vermengt ſind 405. u f. 494. u. f. durch Reihen 419. u. f. von ds. Sin ds $\int \frac{ds}{(\sqrt{\alpha + \beta ss})}$ - (588)

K.

Kegelförmige Bewegung 540.

Kegelſchnitte, 550; bey ihnen aus der Weite des Brennpunctes, und dem Parameter die Axe zu finden II. 628.

Kepleriſche Theorie der Planeten durch die Algebra erläutert E. I.

Knoten 483.

Körper Gleichungen für ihre Flächen 514. priſmatiſche 518. runde 545. Dieſer Flächen zu berechnen II. 606.. Ihr Innhalt 609; ihre Abſchnitte 617. u. f. 676. u. f.

Kreis um ein ordentliches Vieleck beſchrieben. 174. wie ſeine Quadratur und Rectification unmöglich iſt? 621. Winkel ſeines Elements mit dem Halbmeſſer II. 96. Quadraturen und Rectificationen die zum Kreiſe gehören 373. Linie die aus ſeiner Abwickelung entſteht 577. Gleichung für ihn zwiſchen Ordinaten aus einem Puncte und Perpendikeln auf die Tangenten. 598.

Krümmung, unendliche, II. 529. ihre Veränderung und Beſchaffenheit 560.

Krümmungskreis II. 538. zu finden 543. 548. 555. 556.

556. 557. 596. wenn er verſchwindet 550.
Krümmungswinkel II. 511. zu finden 518.
Krumme Linie ſ. auch Linien Gleichung für ſie zwiſchen Ordinaten aus einem Puncte, und Perpendikeln auf die Tangenten. 593. wo $y = a + \sqrt[3]{a(a - x^2)}$ 474. wo $FM + fM = a$ 475. In wieviel Puncten eine von einer geraden Linie geſchnitten werden kann 492; in wieviel Puncten ein Paar einander ſchneiden 494. durch wieviel Puncte eine beſtimmt wird 495. tranſcendentiſche 574. jede iſt gegen ihre Tangente II; 70. und Aſymptote II. 110. hohl. Wenn ſie hohl oder *erhaben iſt* 521. von der ſich nur ein Raum algebraiſch quadriren läßt 559. VIIII.

L.

Latus tranſuerſum 389.
Linie gerade 340 parallele 348. logarithmiſche II. 213.
Linien der zweyten Ordnung 419. aus der Gleichung zu erkennen 465. algebraiſche 467. paraboliſche welche die Lehre von den Gleichungen erläutern II. 163.
Logarithme ſein Differential II. 218. ihn durch Reihen zu finden 220. 223. aus ihm die Zahl zu finden 221. zweene einer Zahl verhalten ſich wie die Subtangenten ihrer logarithmiſchen Linien 222. natürlicher 225; der erſten zehn Zahlen zu finden 226. künſtliche 227. briggiſche 231. Zahl deren natürlicher *Logarithme* 1 iſt 232. Verbindung der Logarithmen mit der Hyperbel 233; einer Zahl gehören unzählich viel Logarithmen zu 332; unmögliche Logarithmen laſſen ſich auf die Quadratur des Kreiſes bringen 325 Logarithme des halben Umfangs 343. eines Sinus 344.

Logarithmiſche Linie II. 213. ihre Differentialgleichung 217.
Lombre Berechnungen der Wahrſcheinlichkeit darinnen 741.

M.

Minute ihre Gröſſe II. 309.
Mittelpunct 365. 442.
Monden 559. X.
Muſchellinie 477.

N.

Nichts unendlichemahl, genommen ſoll ½ geben 15.
Normallinie 91.

O.

Ordinaten Winkel 331.
Ordnen eine zuſammengeſetzte Gröſſe 2.
Ort, geometriſcher, 497.

P.

Parabel 349. paraboliſche Linien ſ. Linien. neiliſche II. 269.
Parallelogramm, newtoniſches 632.
Parameter 349.
Planeten Anwendung der Algebra auf ihre Theorie. II. 626. u. f.
Product deſſen einer Factor verſchwindet der andere unendlich wird II. 382.
Progreßion ſ. Reihe.
Projection 520
Punct doppelter 489. dreyfacher 490. vielfacher 493. Gleichung für einen Punct II; 598.

Q.

Quadrant des Kreiſes, Reihe für ſeine Fläche II. 274.
Quadrate ihren Unterſchied zu finden, wenn die Wurzeln um 1 wach-

ſen

ſen 39. ſind Summen der ungeraden Zahlen 40. Ihre Differenzenreihen 42. Sie ohne Multiplication zu finden 44. deren Summe oder Unterſchied ein Quadrat iſt 185. 186.

Quadratur der krummen Linien II. 207; 505 der Parabel 208; unzähliger Parabeln 210. der cubiſchen Hyperbel 211. des Kreiſes 273. u. f. leibniziſche 301 der Spiralen 505 u. f.

Querſinus den Bogen aus ihm II 282; ihn aus dem Bogen zu finden 293.

Quotient wenn er eine unendliche Reihe wird 7.

R.

Radlinie 597: ihre Krümmung 557. Quadratur, Rectification. 559. u. f. wickelt ſich ſelbſt ab 590. VIIII. u. f.

Rectification II. 267. 509. der neiliſchen Parabel 268 der apolloniſchen 771. der logarithmiſchen Spirale 510. wie die Rectificationen mit den Quadraturen zuſammenhängen 270.

Reihe 9. die ſich nähert oder entfernt 11. wenn jedes geſchieht? 12. arithmetiſche 80. u. f. ſteigende, fallende 82 wie in ihr die Zahl der Glieder ein Bruch werden kann. 84. geometriſche 96. u. f. fallende und ſteigende 99. 100. Summe einer unendlichen fallenden 108 u. f. Geſtalt einer Reihe 628. Functionen durch unendliche Reihen auszudrücken 631; 694 Ihr allgemeinſter Ausdruck 757.

Reihen, allgemeine Formeln ihrer Glieder aus den Differenzen 724. u. f. durch die höhern Differentiale II. 148. figurirte I. 727; 758. für Wurzeln 752. die für ganze verneinte Exponenten abbrechen 755. unendliche, Formeln für ihre Potenzen II. 56. Integrationen durch Reihen 419. u. f. der

Werth der Reihe $\frac{2}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \ldots$ iſt unendlich groß.
Reihen der Unterſchiede ſ. Differenzenreihen.
Rückkehrpunct von zwo Arten II. 516. 535. VIIII. eu finden 520.

S.

Scheitel der Parabel 354.
Schneckenlinie 578.
Schnitte der körperlichen Flächen 520; 542; 549 u. f. die den beſchreibenden Linien ähnlich ſind II 628.
Schwerpunct zu finden; E. II.
Secante aus dem Bogen zu finden II. 303.
Secunde ihre Gröſſe II. 309.
Sehne zu einer gehören unzählich viel Bogen 612.
= = = des Unterſchiedes finden 163. des doppelten Bogens 166.
Semiordinat 353.
Silber von deſſen Vermiſchung 69.
Sinus aus den Vielecken finden 162 des vielfachen Winkels finden 175. zu einem gehören unzählich viel Bogen 613. zwiſchen ihm und dem Bogen giebt es keine algebraiſche Gleichnug 616; aus ihm den Bogen II. 281; ihn aus dem Bogen zu finden 285. 310. die Sinus zu berechnen 311. u f Gleichung für ſie durch unmögliche Logarithmen. 329, 330. Gleichung zwiſchen dem Sinus und Coſinus des einfachen und des vielfachen Winkels 337; Logarithmen der Sinus zu finden 334
Sphäroiden 548. ſ. runde Körper.
Spirale archimediſche 578. paraboliſche II. 107. logarithmiſche 510. dieſe wickelt ſich ſelbſt ab 589. VII. hyperboliſche oder verkehrte archimediſche 599.
Spitze II. 516.
Steigen 2.
Subnormallinie II. 91.

Subtangente II 76.
Summe einer Reihe 10. 108. oder Integral II; 201.
Supplementum 11.
Syllogismen die Menge ihrer Arten zu berechnan 744.

T.

Tangente eines Bogens aus ihr den Bogen II. 299; Sie aus dem Bogen zu finden 301.
Tangente 449. zu ziehen II. 77; 104. an den Kegelſchnitten 84; 85. an der Muſchellinie 97. der Cycloide 102. der archimediſchen Spirale 106. der paraboliſchen 107. die Regeln dazu ſind mit Barrows ſeinen einerley 90.
Tangenten, *verkehrte Methode der*, II. 262.
Terminalis generalis 9.
Triangulum characteriſticum II. 78.

V.

Verſetzungen zu finden 51.
Vieleck von n Seiten zu beſchreiben, wenn man das von 2n Seiten beſchreiben kann. 155. welche ſich geometriſch verzeichnen laſſen 173. allgemeiner Ausdruck ihrer Seiten *II.* 336.

U.

Umkreis ſeine Verhältniß zum Durchmeſſer, durch eine Reihe II 300. in Zahlen 306. u. f. durch Logarithmen 333; ſein Logarithme 343.
Unendlich ſich einem Werthe nähern II. 7.
Unendlich groß, iſt eigentlich keine Gröſſe II. 4.

Unend-

Unendlich wachſen II. 1. wie es vom Wachſen ohne Ende unterſchieden II. 2

Unendliche Gröſſen; ihre Ordnungen II. 11. mehr als unendliche 212; die Summe der Reihe $\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \ldots$ iſt unendlich 612. Unendlich lange Körper können endlich oder unendlich ſeyn 614.

Unendlichkleines Grund deſſelben 47. II. 5.

Unterſchied zweer Gröſſen in dem Falle da beyde unendlich werden zu finden II. 383.

Vngula II. 617.

W.

Wein von ſeiner Vermiſchung 67.

Wendungspunct II. 112. zu finden 532.

Winkel Zweydeutigkeiten bey deſſen Theilung 170. Theilung in drey Theile 508. Vervielfältigung vermittelſt der Sinus 175. und II. 337. der Tangenten II. 331.

Winkelbewegung 590.

Würfel zu verdoppeln 508.

Wurzelgröſſen Rechnung mit ihnen 18. u. f.

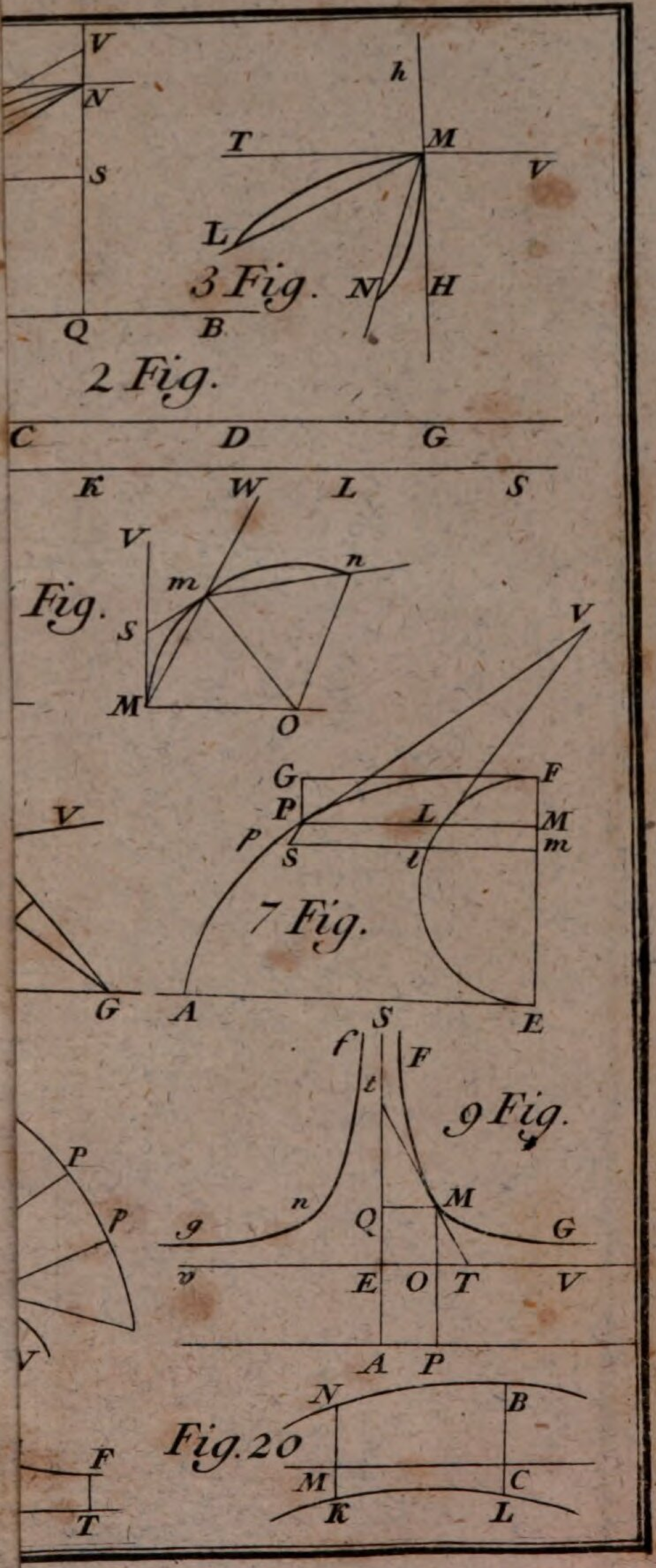
Wurzeln einer Gleichung ihre Zahl 223. wie die Coefficienten durch ſie gegeben werden 224. Von den irrationalen 228. 233. unmöglichen 235. die letzten ſind allemahl paarweiſe vorhanden 272. Sie zu vermehren oder zu vermindern 274. 275. zu multipliciren 278. 280. zu entdecken wenn ſie ganze Zahlen ſind 294. u. f. irrationale durch Näherung zu finden 304 u. f. gleiche wieviel von ihnen in der Differentialgleichung bleiben II. 172. nnmögliche, ihre Zahl zu finden 175. u. f. verneinte und bejahte; ihre Zahl aus den Zeichen der Coefficienten zu finden 186. u. f.

Z.

Zahlen gerader und ungerader Eigenſchaften 37. 40. figurirte 727.

Zehneck in den Kreis beſchreiben 156

Zuſammengeſetzte Gröſſe 1



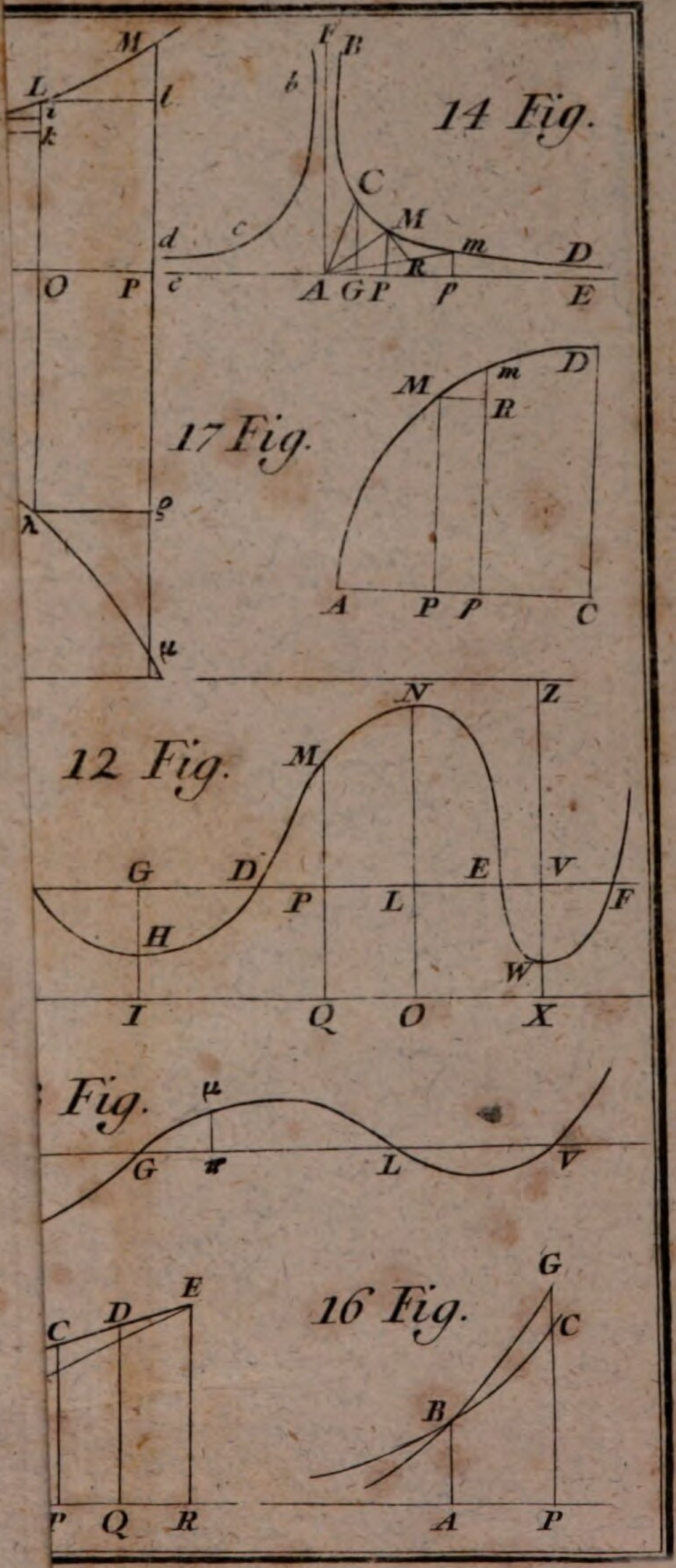
2 Fig.

3 Fig.

7 Fig.

9 Fig.

Fig.20



14 Fig.
17 Fig.
12 Fig.
Fig.
16 Fig.

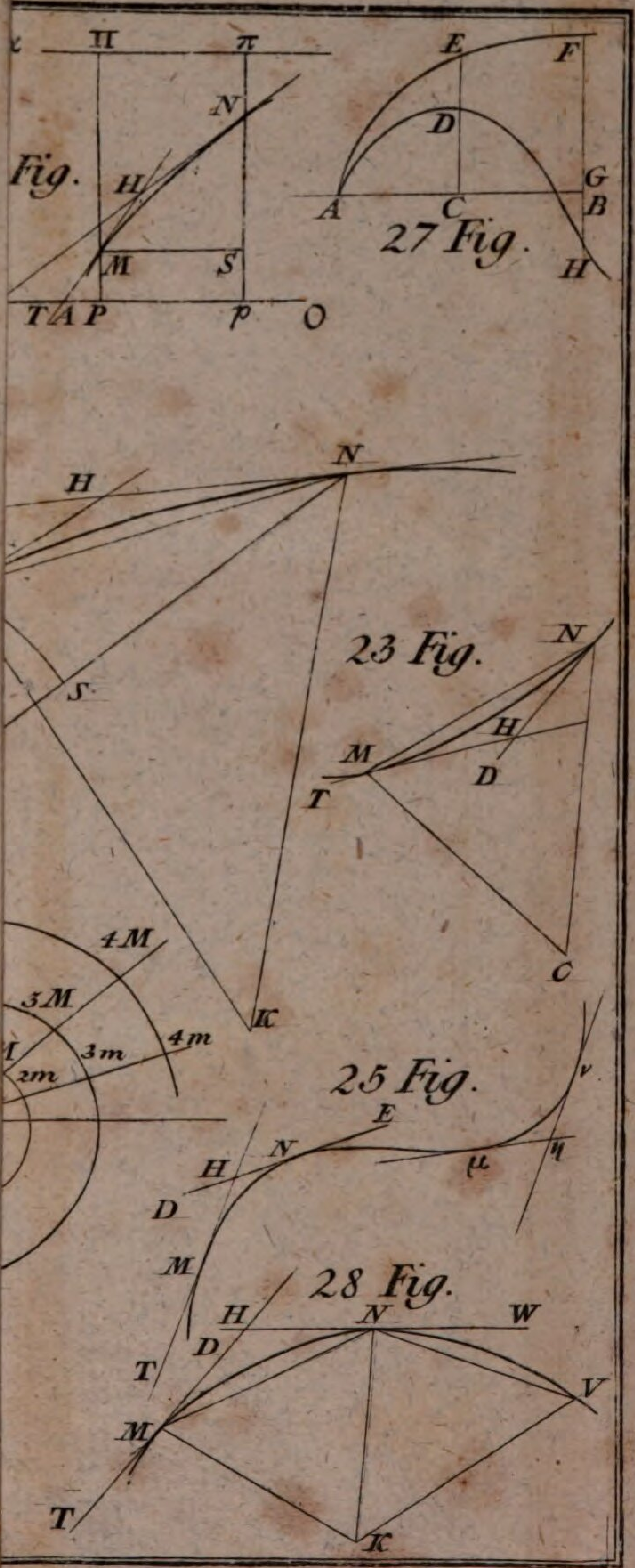


Fig.

27 Fig.

23 Fig.

25 Fig.

28 Fig.

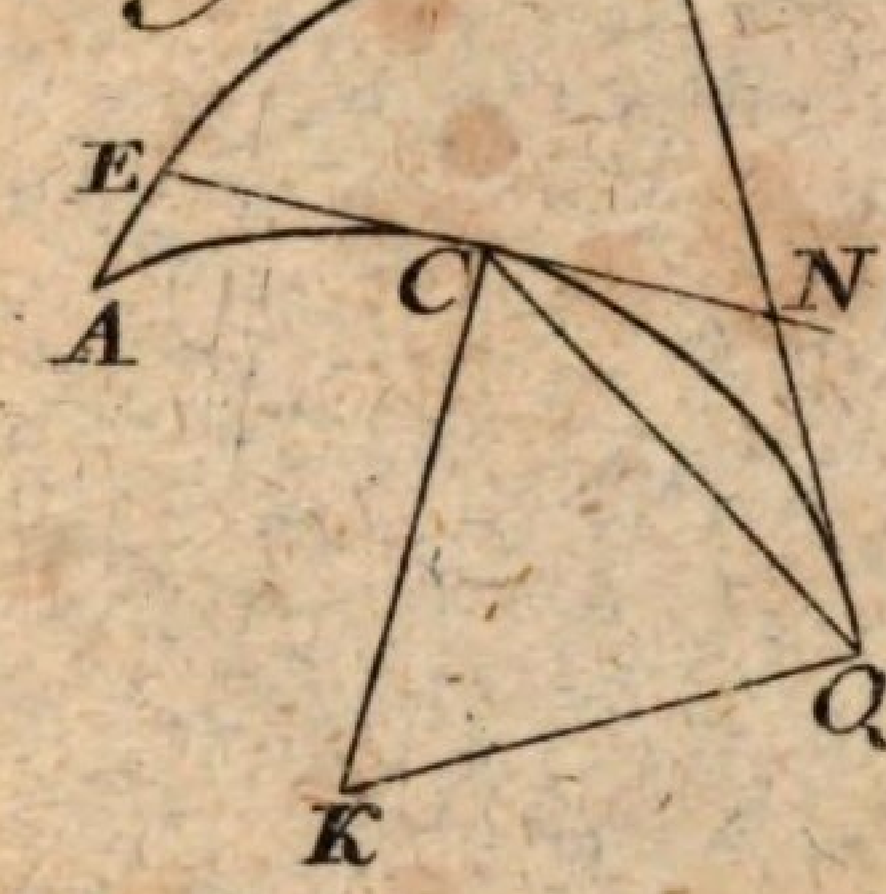
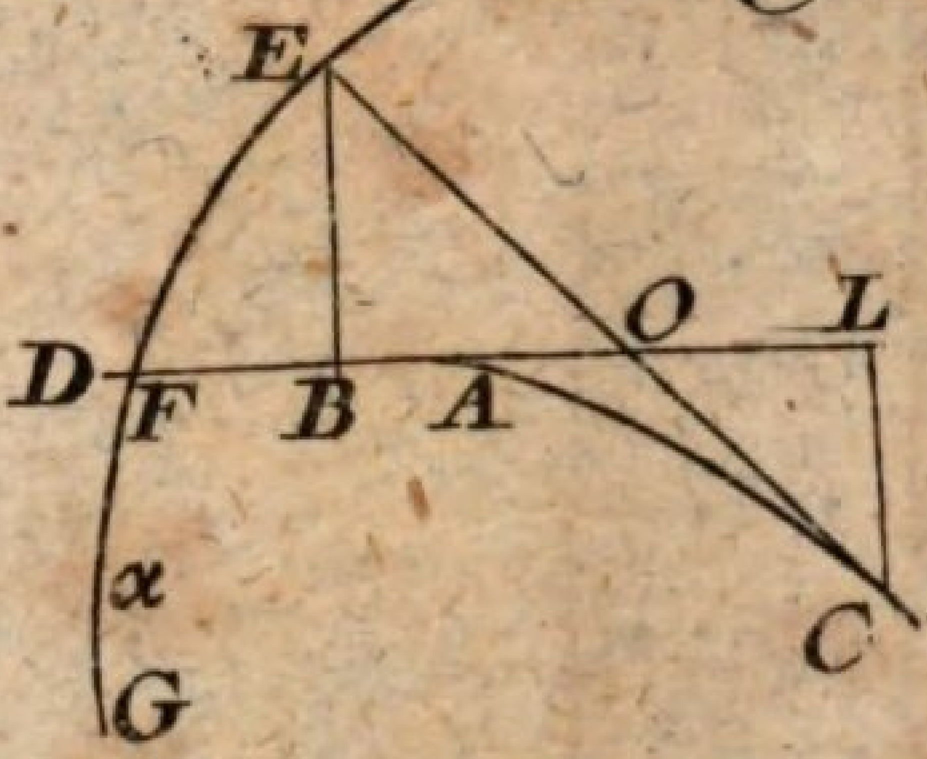
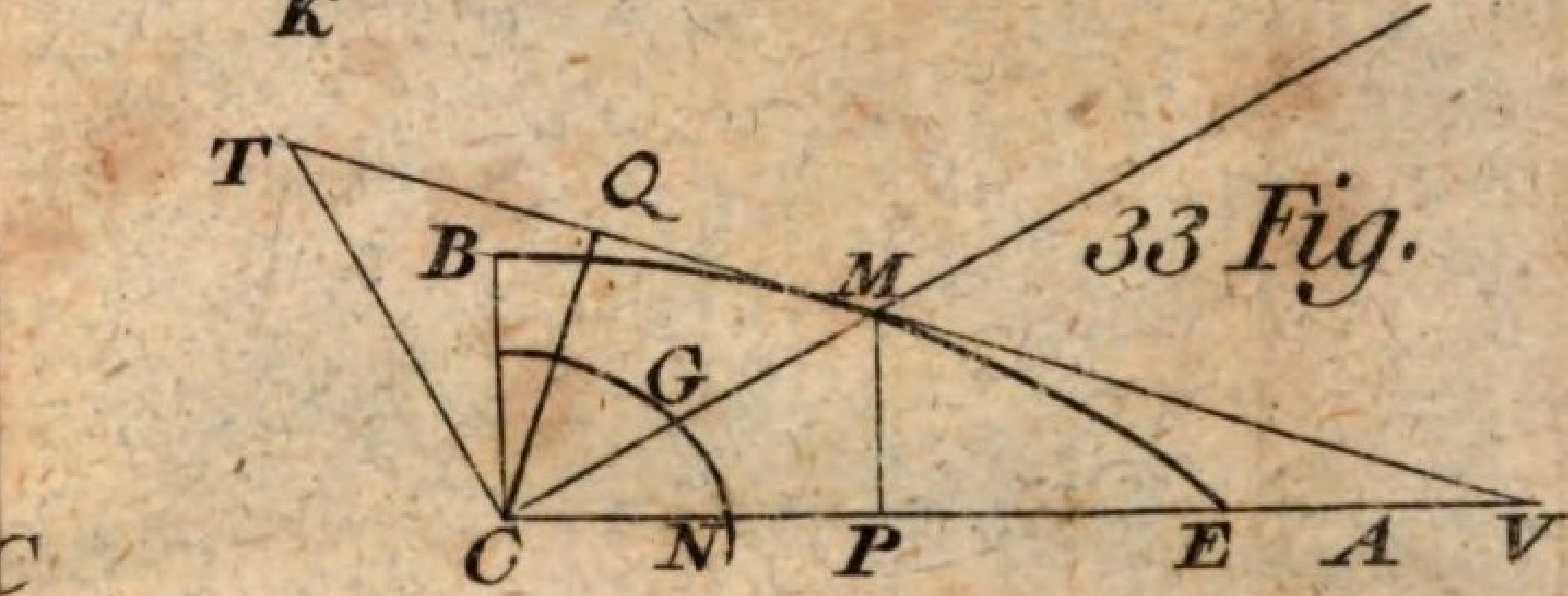


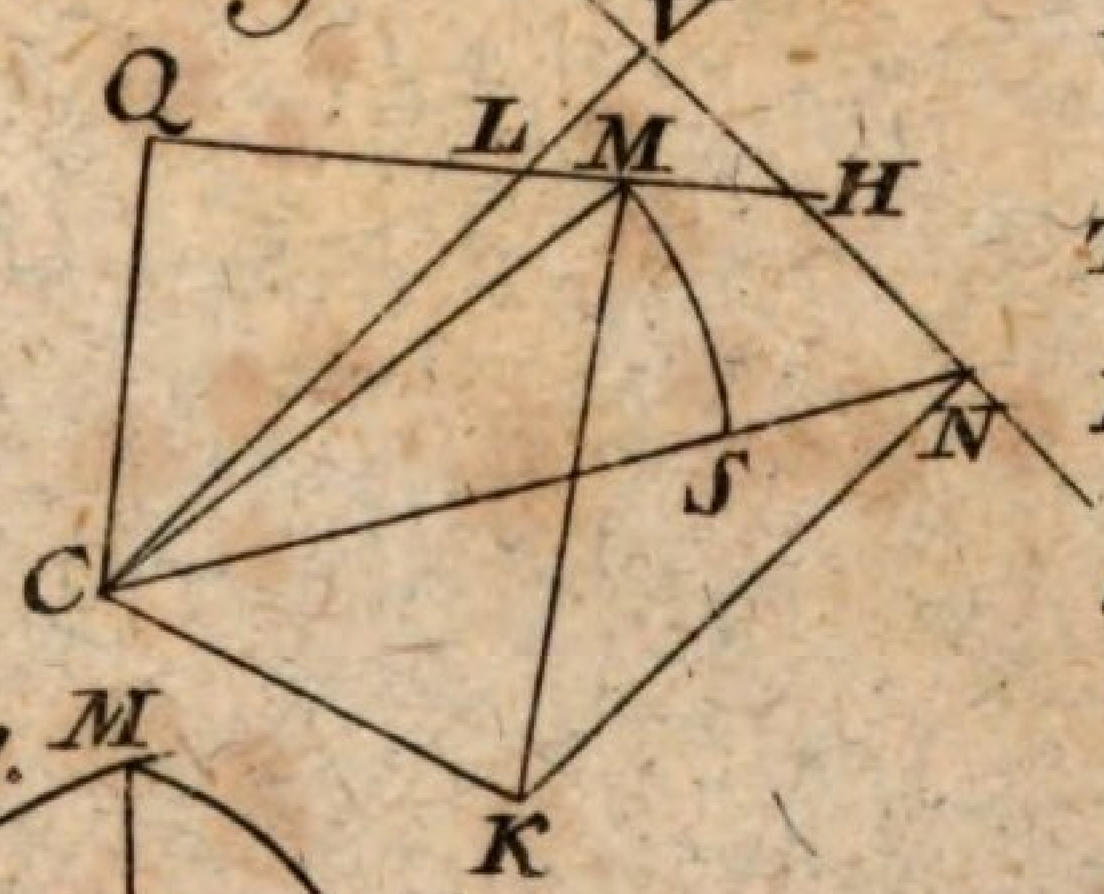
Fig.



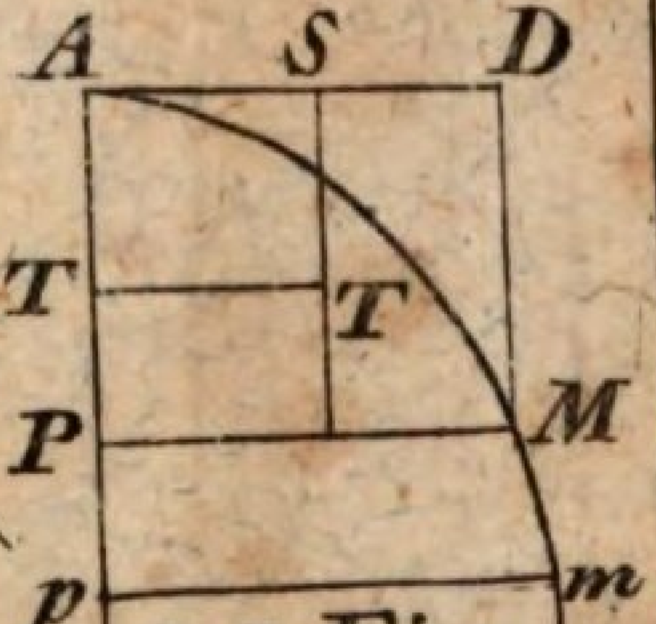
31 Fig.



33 Fig.



34 Fig.



35 Fig.

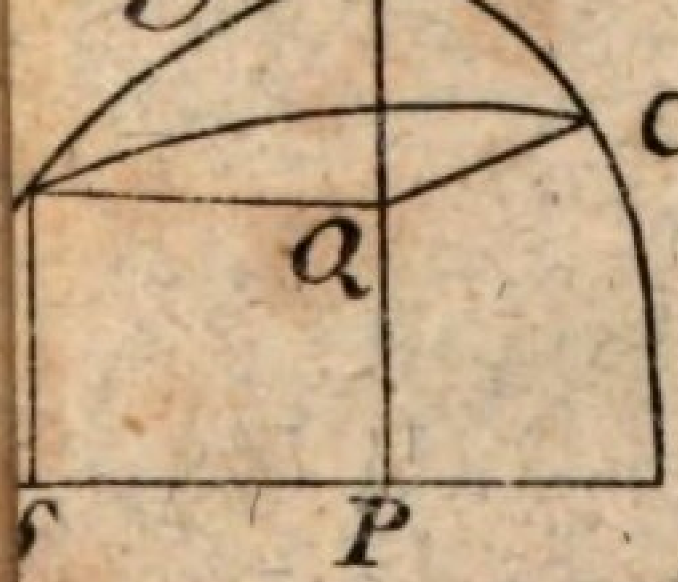
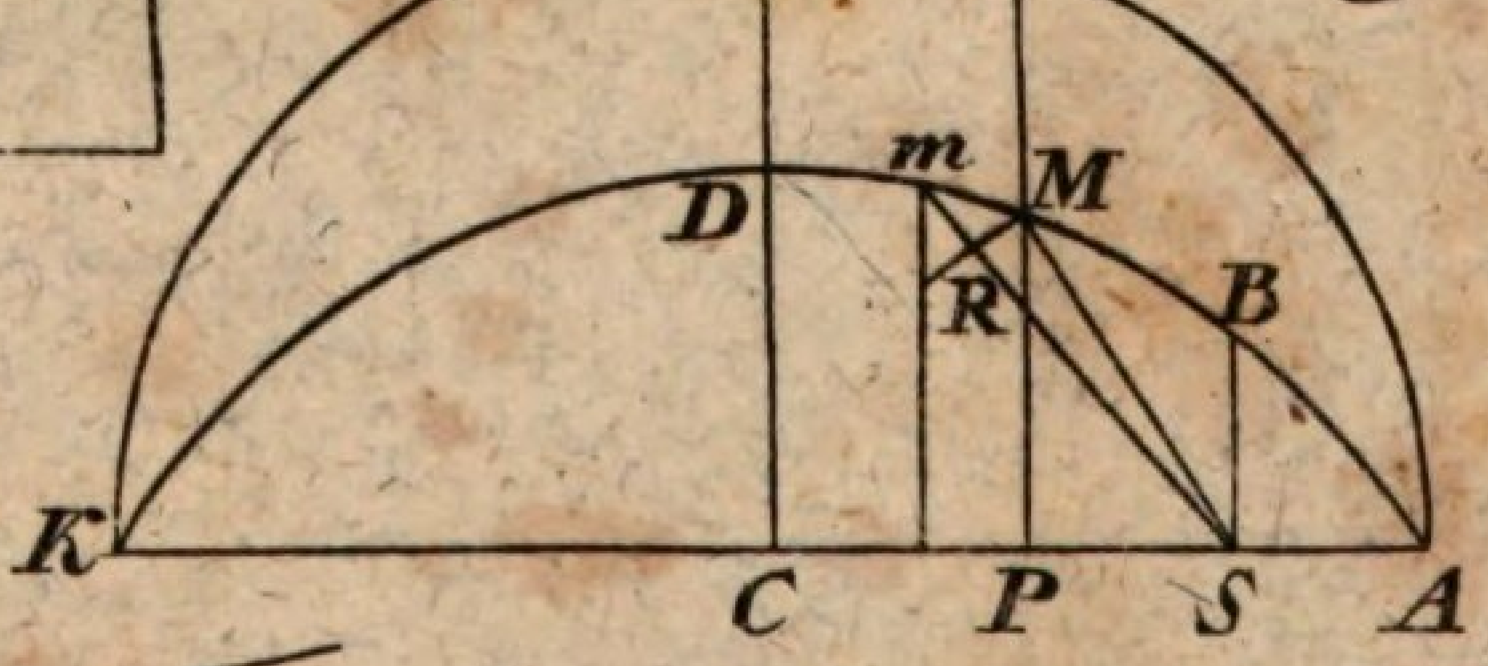


Fig.



38 Fig.

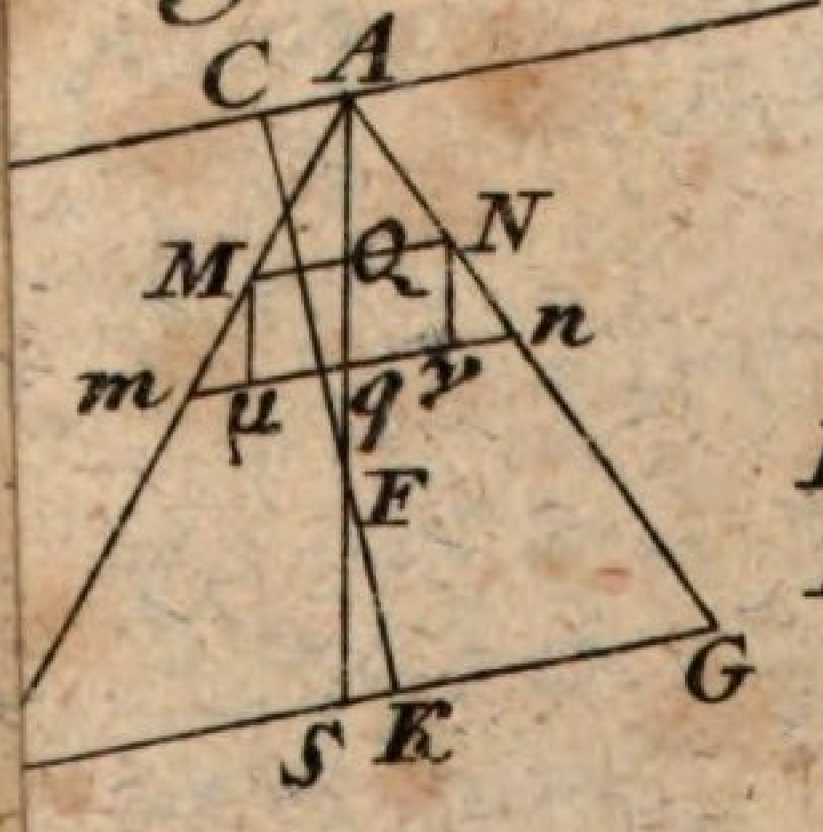
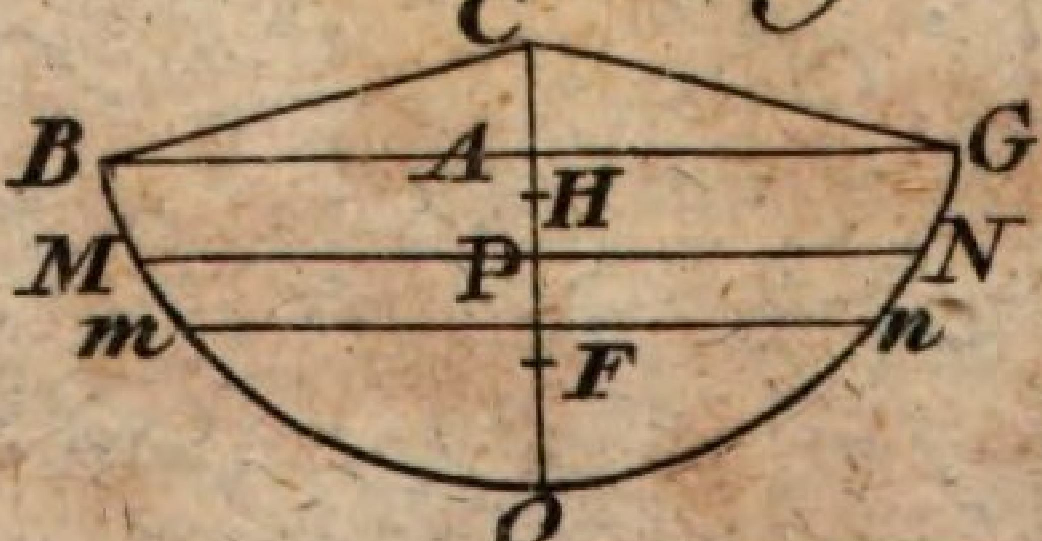


Fig.



41 Fig.

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Kästner, Abraham Gotthelf, 1719-1800

Anfangsgründe der Mathematik

Bd.: 3,2

Göttingen 1770

Math.u. 77-3,2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10593983-3
VD18 80011977-001